AL KUT JOURNAL OF ECONOMIC AND ADMINISTRATIVE SCIENCES
Publisher: College of Economics and Management - Wasit University

# تحليل معولية نظام متعدد المكونات من نوع s-out -of-k

# مع عناصر متانة معتمدة باستعمال دالة الاقتران

# Reliability Analysis of $s-out-of-k$ Multicomponent System with Dependent Strength Components Using a Copula Function

مشعل حسين فلغوص[1] الأستاذ الدكتورعباس لفته كنيهر[2]

**المستخلص :-**

يتناول هذه البحث دراسة دالة المعولية لنموذج الاجهاد – المتانة متعدد المكونات في حالة نظام ( s-out - of-k ) بالاعتماد على توزيع بور النوع الثاني عشر Burr $XII$ ، وتم اشتقاق الخصائص الاحصائية للنموذج بما في ذلك دالة المعولية ( $R_{s,k}$ ) ودالة الكثافة الاحتمالية (Pdf) . وقد تمت نمذجة الاعتمادية بين مكونات المتانة باستعمال دالة الاقتران (Clayton Copula) مما ادى الى تقدير اكثر دقة للمعولية كما تم تقدير معلمات التوزيع الغير معروفة $c, k$ ومعولية النظام $R_{s,k}$ باستعمال طريقة الامكان الاعظم (MLE ).ولغرض تقييم اداء المقدرات ومقارنتها تم اجراء المحاكاة بطريقة مونت كارلو وباستعمال البرنامج الاحصائي (R) استناداً على معيار المقارنة متوسط مربعات الخطأ (MSE) ، اظهرت النتائج انه طريقة الامكان الاعظم اعطت اقل قيم لمتوسط مربعات الخطأ (MSE) مع تزايد حجم العينة ، واظهرت نتائج المحاكاة ايضاً انه عند مراعاة الاعتمادية بين مكونات المتانة يُحسن من دقة التقدير ويجعل المقدرات اقرب الى القيم الحقيقية وقد تم استعمال بيانات حقيقية المتمثلة بسعات خزان المياه (خزان شاستا ) بهدف التحقق من النموذج وتقدير معولية النظام في سياق حالات الجفاف المفرط وقد دعمت نتائج التطبيق العملي ما توصلت اليه نتائج المحاكاة مؤكدة اهمية تضمين الاعتمادية في تحليل معولية الانظمة .

الكلمات المفتاحية :( تحليل المعولية ، نظام متعدد المكونات ، نموذج الاجهاد والمتانة ، دالة الاقتران ، توزيع بور النوع الثاني عشر )

**Abstract:-**

This study investigates the reliability function of a multi-component stress–strength model under the s-out-of-k system configuration, based on the Burr XII distribution. The statistical properties of the model, including the reliability function $R_{s,k}$ and the probability density function (PDF), were analytically derived. Dependence among the strength

components was modeled using the Clayton Copula function, leading to more accurate reliability estimation. The unknown distribution parameters($c$, k) as well as the system reliability $R_{s,k}$, were estimated using the Maximum Likelihood Estimation (MLE) method.To evaluate and compare the performance of the estimators, a Monte Carlo simulation was conducted using the R statistical software, based on the Mean Squared Error (MSE) criterion. The results demonstrated that MLE produced lower MSE values with increasing sample sizes. Additionally, the study showed that accounting for dependence among strength components significantly improves the accuracy of reliability estimates and brings the parameter estimates closer to their true values.Real-world data on water tank capacities were used to validate the model and estimate its parameters in the context of extreme drought assessment. The application results supported the simulation findings, emphasizing the importance of incorporating dependence in reliability analysis.

Keyword: (Reliability analysis ; s-out-of-k system ; multicomponent system; stress-strength model; copula function ; Burr *X*II distribution)

**1- المقدمة :-**

في دراسة المعولية يستعمل نموذج الاجهاد – المتانة بشكل متكرر لقياس معولية نظام يمتلك متانة عشوائية (Y ) ويتعرض لأجهاد عشوائي (X ) قُدّم نموذج الاجهاد – المتانة بواسطة Birnbaum[1]، وتمت مناقشة تقدير المعولية $R = P(Y > X)$ بشكل واسع من قبل العديد من الباحثين عندما يتبع متغير الاجهاد (X ) ومتغير المتانة (Y ) توزيعاً محدداً مثل Srinivasa et a1 [2], Sharma [3] . مؤخرًا، قدم العديد من المؤلفين أعمالهم لدراسة تحليل الموثوقية لنظام الإجهاد-المتانة متعدد المكونات. ففي عام 2017 ناقش الباحث [5] (Srinivasa et al. ) تقدير المعولية عندما يكون X وY متغيرين عشوائيين مستقلين يتبعان توزيع exponentiated Weibull، مع معلمات شكل مختلفة، ومعلمات شكل وقياس مشتركة، وفي عام 2018 اقترح الباحث [6] .Liu et al تقدير المعولية لنظام التكرار البارد من نوع N-M عندما يكون التوزيع الأساسي هو توزيع لوجستي نصف عام . الدراسات المذكورة أعلاه تعتمد جميعها على الافتراض بأن متغير المتانة مكون من عنصر واحد ومع ذلك، في بعض الحالات العملية، يكون من الأكثر واقعية افتراض أن متغير المتانة مكون من زوج من العناصر معتمدة. لذلك في عام 2015 و 2018 ناقش الباحثان[15][16] ( Nadar and Kizilaslan ) بتقدير المعولية في نموذج الاجهاد – المتانة استناداً الى التوزيع الكوماراسومي ثنائي المتغيرات حيث تمت دراسة نظاماً يحتوي على K من مكونات المتانة المستقلة احصائياً والمتماثلة في التوزيع وكل مكون يتكون من زوج من العناصر المعتمدة احصائياً $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_K, Y_K)$ تتبع هذه العناصر التوزيع الكوماراسومي ثنائي المتغيرات حيث تم تقدير معولية النظام باستعمال الاساليب الكلاسيكية والبايزية وتم تطوير مقدرات بيز بواسطة تقريب ليندلي وطرق سلسلة ماركوف مونت كارلو.

إن مجال الاسهام الذي قدمته هذه الورقة مبني على كيفية تحليل المعولية لنظام الإجهاد-المتانة متعدد المكونات من نوع s-out -of-k عندما يبنى متغير المتانة بواسطة عناصر معتمدة، والتي يتم وصفها بواسطة دالة الاقتران.

**2- هدف البحث :-**

الحصول على افضل تقدير لدالة معولية نظام الاجهاد – المتانة متعدد المكونات s-out-of-k في ظل افتراض ان كلاً من متغيري المتانة والاجهاد عبارة عن متغيرات عشوائية مستقلة ومتماثلة تتبع توزيع Burr $XII$ بمعلمات مختلفة ، وعندما يبنى متغير المتانة بواسطة عناصر معتمدة والتي توصف بواسطة دالة الاقتران (copula function ) ويتم ذلك من خلال مقارنة عدة طرائق تقديرية .

**3- مشكلة البحث :-**

تتمثل المشكلة في كيفية نمذجة وتحليل معولية نظام s-out-of-k متعدد المكونات بوجود دالة الاقتران copula ( function)

**4- نظرية الاقتران [13][16][17]** **Copula theory**

تُعد دراسة الاقترانات او الروابط (Copulas) في تطبيقات الاحصاء طريقة حديثة نسبياً ، حيث تم استعمال مصطلح الاقتران (Copula) في السياق الرياضي او الاحصائي لأول مرة من قبل عالم الرياضيات الامريكي (Abe Sklar) في عام 1959 في نظريته المعروفة باسمه (Sklar theory) حيث تنص نظريته على انه اي دالة توزيع مشتركة متعددة المتغيرات يمكن تمثيلها بواسطة دالة تربط بين التوزيعات الحدية

في مايلي نُقدم بعض اساسيات النظرية:

ليكن$S(x_{1,}x_2)$ دالة البقاء المشتركة ثنائية الابعاد ذات التوزيعات الحدية $\mathrm{R}_1(\mathrm{x}_1),\mathrm{R}_2(\mathrm{x}_2)$

$$\mathrm{S}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2)=\mathrm{C}(\mathrm{R}_1(\mathrm{x}_1),\mathrm{R}_2(\mathrm{x}_2)) \quad \ldots\ldots(1)$$

حيث يطلق على الرمز $C(.)$ هو دالة الاقتران للبقاء

ولتكن $H(x_1,x_2)$ هي دالة فشل مشتركة ثنائية الابعاد ذات الدوال الهامشية $H_1$ و $H_2$

فهناك اقتران يرمز له بالرمز( $C_H$ )وكالاتي

$$H(x_1,x_2)=C_H(\mathrm{F}_1(\mathrm{x}_1),\mathrm{F}_2(\mathrm{x}_2)) \quad \ldots\ldots..(2)$$

حيث يطلق على( $C_H(.)$ دالة الاقتران للفشل.

والعلاقة بين دالة الاقتران للفشل$C_H$ ودالة الاقتران للبقاء $C$ هي

$$C_H(\mathrm{F}_1(\mathrm{x}_1),\mathrm{F}_2(\mathrm{x}_2))=1-\mathrm{R}_1(\mathrm{x}_1)-\mathrm{R}_2(\mathrm{x}_2)+\mathrm{C}\big(\mathrm{R}_1(\mathrm{x}_1),\mathrm{R}_2(\mathrm{x}_2)\big) \quad \ldots.(3)$$

ولتكن $\mathrm{f}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2)$ هي دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة ( $PDF$) *للمتغيرين* $x_{1,}x_2$

$$f\big(x_{1,}x_2\big)=\frac{\partial^2 H(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \quad \ldots..(4)$$

في دراستنا يتم استعمال الاقتران من النوع اقتران كلايتون ثنائي الابعاد لتمثيل علاقة الاعتماد بين عناصر المتانة وهو نوع من دوال الاقتران المعروفة ويستعمل على نطاق واسع بسبب خصائصه الجيدة مثل شكله البسيط والتناظر وقدرته على الجمع , وعلاقة دالة الاقتران تعطى بالشكل الآتي

$$C(u,v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{\frac{-1}{\theta}} \qquad \ldots\ldots(5)$$

حيث انه المعلمة $\theta$ تقيس الاقتران ويصبح اقتران مستقل عندما تقترب ال $\theta$ من الصفر

**5- توزيع بور النوع الثاني عشر[11][12] Burr *X*II Distribution**

تمت دراسة توزيع بور النوع الثاني عشر Burr *X*II Distribution لأول مره من قبل الباحث Burr وكان ذلك في سنة (1942) واصبح فيما بعد يستعمل بشكل متكرر في دراسات تحليل بيانات مدئ الحياة وتحليل المعولية ( Reliability Analysis) ونمذجة اوقات الفشل( Failure Time Modeling) لغرض التقليل من احتمالية حدوث الفشل ، وقد نال هذا التوزيع اهتماماً متزايداً من الباحثين وخاصةً في العقود الثلاث الاخيرة نظراً لتطبيقاته الواسعة في العديد من المجالات ، يعتبر توزيع بور النوع الثاني عشر من التوزيعات المستمرة المرنة جداً وايضاً من التوزيعات ثقيلة الذيل حيث يمكنه التعامل مع القيم المتطرفة ولتوزيع Burr *X*II ذو المعلمتين $(c,k)$ دالة كثافة احتمالية (PDF) ودالة التوزيع التراكمية (CDF) ودالة المعولية كما في الصيغ الآتية على التوالي :

$$f(t;c,k) = \frac{ckt^{c-1}}{(1+x^c)^{k+1}} \quad , \quad x > 0\,,\ c,k > 0 \qquad \ldots.(6)$$

$$G(t;c,k) = 1 - (1 + \mathrm{x}^{\mathrm{c}})^{-\mathrm{k}} \qquad , c,k,x > 0 \qquad \ldots.(7)$$

$$\mathrm{R(t)} = 1 - (\,1 - (1 + \mathrm{x}^{\mathrm{c}})^{-\mathrm{k}}) \qquad \ldots.(8)$$

**6- وصف نموذج وموثوقية نظام s-out -of-k [9]**

لنفترض انه X يتبع توزيع Burr XII بيور النوع الثاني عشر و $c,k$ هما المعلمتان اللتان تتحكمان في شكل التوزيع ويرمز له بالرمز $\mathrm{Bu}(c,k)$ . اذن تكون دالة الكثافة الاحتمالية(PDF ) والدالة التراكمية (CDF) للمتغير X هي كما في الصيغ (6,7)

لتكن $T, z_1, z_2, \ldots., z_k$ متغيرات مستقلة ، حيث $G(t)$ هي الدالة التراكمية (CDF) لمتغير الاجهاد T ، و $F(Z)$ هي الدالة التراكمية المشتركة لمتغيرات المتانة $z_1, z_2, \ldots\ldots, z_k$ . في الحالة العامة تكون المعولية لنظام s-out -of-k في نموذج الاجهاد – المتانة متعدد المكونات الذي تم تطويره بواسطة Bhattacharyya and Johnson[10] تُعطئ كالاتي

$$R_{s,k} = P(at\ least\ of\ the\ (z_1, z_2, \ldots, z_3) exceed\ T)$$

$$= \sum_{i=s}^{k} \binom{k}{i} \int_{-\infty}^{\infty} \big(1 - F(t)\big)^{i} \big(F(t)\big)^{k-i}\, dG(t) \qquad \ldots\ldots(9)$$

**لنفترض انه العلاقة بين** $X_1 \sim \mathrm{Bu}(c,k_1)$ و $X_2 \sim \mathrm{Bu}(c,k_2)$ يتم تمثيلها بواسطة دالة الاقتران (كلايتون) ثنائية الابعاد وفقاً للمعادلات (1)-(5) فأنه دالة البقاء المشتركة للمتغيرين $(x_1,x_2)$ تُعطى بالعلاقة الآتية:

$$S(x_1,x_2) = C\,[R(x_1),R(x_2)]$$

$$C\,[R(x_1),R(x_2)] = [\,(R_{(x_1)})^{-\theta} + (R_{(x_2)})^{-\theta} - 1]^{\frac{-1}{\theta}}$$

$$S(x_1,x_2) = [(1+{x_1}^{c})^{\theta k_1} + (1+{x_2}^{c})^{\theta k_2} - 1]^{\frac{-1}{\theta}} \quad \ldots..(10)$$

ووفقاً للمعادلات (2) و(3) و(4) وباشتقاق دالة المعولية المشتركة $S(x_1,x_2)$ بالنسبة للمتغيرين $(x_1,x_2)$ يمكن كتابة دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة على النحو الآتي

$$f(x_1,x_2) = \frac{\partial^2 S(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$$f(x_1,x_2) = \boldsymbol{\theta k_1 k_2 c^2 {x_1}^{c-1} {x_2}^{c-1}} * \left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{1}\right) * (\mathbf{1} + \boldsymbol{{x_1}^{c}})^{\boldsymbol{\theta k_1 - 1}} * (\mathbf{1} + \boldsymbol{{x_2}^{c}})^{\boldsymbol{\theta k_2 - 1}} *$$
$$[(\mathbf{1} + \boldsymbol{{x_1}^{c}})^{\boldsymbol{\theta k_1}} + (\mathbf{1} + \boldsymbol{{x_2}^{c}})^{\boldsymbol{\theta k2}} - \mathbf{1}]^{\frac{-1}{\theta}-2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

لنفترض نظاماً يحتوي على K من المكونات ذات المتانة المستقلة والمتطابقة احصائياً ، حيث يتكون كل مكون من زوج من العناصر المعتمدة احصائياً . يخضع النظام لإجهاد عشوائي مشترك، وسيستمر النظام في العمل عندما يتبقى S او اكثر من المكونات فعالاً في ان واحد. ولنفترض انه التوزيع الهامشي لمتجهات المتانة $(X_{11},X_{21}),(X_{12},X_{22}),\ldots,(X_{1k},X_{2k})$ ومتغير الاجهاد T يتبع توزيع بيور النوع الثاني عشر . وليكن $Z = min(X_1,X_2)$ ل (PDF) دالة البقاء ودالة الكثافة الاحتمالية حيث $Z_i = min(X_{i1},X_{i2})$ $i = 1,2,\ldots,k$ تُعطى على النحو الآتي ، على التوالي:

$$R_z^{(t)} = P(z>t) = P(x_1>t\,,x_2>t)$$

$$S(t,t) = [(1+t^c)^{\theta k_1} + (1+t^c)^{\theta k_2} - 1]^{\frac{-1}{\theta}} \quad ,t>0 \quad \ldots.(12)$$

$$f_z^{(t)} = \frac{-\partial\, s(t,t)}{\partial t}$$

$$f_z^{(t)} = [(1+t^c)^{\theta k_1} + (1+t^c)^{\theta k_2} - 1]^{\frac{-1}{\theta}-1}\,[k_1(1+t^c)^{\theta k_1 - 1} + k_2(1+t^c)^{\theta k_2 - 1}] * ct^{c-1}$$
$$, \qquad \ldots\ldots.(13)$$

لنفرض انه$T \sim Bu\,(k_3,\theta)$ وباستعمال المعادلتين (8) و(9) يمكن التعبير عن دالة المعولية $R_{s,k}$ على النحو الآتي :

$$R_{s,k} = \sum_{i=s}^{k} \binom{k}{i} \int_0^{\infty} [(1+t^c)^{\theta k_1} + (1+t^c)^{\theta k_2} -$$
$$1]^{\frac{-i}{\theta}}\,[1 - \left((1+t^c)^{\theta k_1} + (1+t^c)^{\theta k_2} - 1\right)^{\frac{-1}{\theta}}]^{k-i} * k_3 c t^{c-1}(1+t^c)^{-k_3-1}\,dt$$

Let u= $t^c \Rightarrow \frac{du}{dt} = ct^{c-1}$

$$R_{s,k=} \sum_{i=s}^{k} \binom{k}{i} \int_0^{\infty} [(1+u)^{\theta k_1} + (1+u)^{\theta k_2} - 1]^{\frac{-i}{\theta}} [1 - ((1+u)^{\theta k_1} + (1+u)^{\theta k_2} - 1)^{\frac{-1}{\theta}}]^{k-i} * k_3 (1+u)^{-k_3-1} du$$

$$R_{s,k=} \sum_{i=s}^{k} \sum_{j=0}^{k-i} \binom{k}{i} \binom{k-i}{j} (-1)^j k_3 \int_0^{\infty} [(1+u)^{\theta k_1} + (1+u)^{\theta k_2} - 1]^{\frac{-(i+j)}{\theta}} (1+u)^{-k_3-1} du \quad \dots\dots (14)$$

### 7 – مقدرات الامكان الاعظم Maximum Likelihood Estimation of $R_{s,k}$ [7][8]

تعتبر طريقة الامكان الاعظم طريقة مهمة جداً في عملية تقدير المعلمات اذ انها طريقة تجعل دالة الامكان للمتغيرات اعظم ما يمكن واكثر استعمالاتها تستخدم في عملية تقدير معالم توزيع معين لكونها تتصف بعدة صفات منها تمتلك خاصية عدم التحيز وتُعطي مقدرات تتميز بالكفاءة والكفاية، فضلاً عن أنها تمتلك اقل تباين وخاصية الثبات (Invariant) وهي طريقة دقيقة جداً مقارنةً مع طرق التقدير الاخرى ولاسيما عند زيادة حجم العينة وأول من وضعها هو العالم (C.F Gaus) وأول من قام بتطبيقها هو الباحث (R.A. Fisher) .

لنفرض لدينا n من الانظمة خضعت لتجربة حياة. البيانات المحتملة هي $T_i, i = 1,2, \dots, n$ و $(X_{1i1}, X_{2i1}), (X_{1i2}, X_{2i2}), \dots, (X_{1ik}, X_{2ik})$

حيث $X_{ij}$ تمثل اوقات الفشل المحتملة للمكونات و $T_i$ هوه وقت الفشل الفعلي للنظام $i$ .

البيانات المشاهدة هي $Z_{i1}, Z_{i2}, \dots, Z_{ik}$ و $T_i$

حيث $Z_{ij} = min(X_{i1j}, X_{i2j})$ i=1,2…,n , j=1,2,…,k

دالة الامكان الاعظم ل $\{Z_{ik}\}$ و $\{t_i\}$ تُعبر عن احتمال الحصول على القيم المشاهدة بناءً على معلمات النموذج . عادةً تشُتق دالة الامكان من دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة. ففي هذه الحالة نظراً لأن $Z_{ij}$ و $T_i$ يعتمدان على اوقات الفشل المحتملة والفعلية فأن دالة الامكان الاعظم ستعتمد على توزيع هذه الاوقات . وبما انه اوقات الفشل تتبع توزيع بيور النوع الثاني عشر بمعلمة $k_3$ فأن دالة الامكان الاعظم تُكتب على النحو الآتي

$$L(K_1, K_2, K_3, C, \theta) = \prod_{i=1}^{n} [\prod_{j=1}^{k} f_z(z_{ij})] g(t_i)$$

حيث يمثل الحد الاول دالة الامكان للأوقات المحتملة $Z_{ij}$

والحد الثاني يمثل دالة الامكان لوقت الفشل الفعلي $T_i$

$$L = \prod_{i=1}^{n}\left[\prod_{j=1}^{k}\left(\left(1+z_{ij}^{c}\right)^{\theta k_1}+\left(1+z_{ij}^{c}\right)^{\theta k_2}-1\right)^{\frac{-1}{\theta}-1}\left(k_1\left(1+z_{ij}^{c}\right)^{\theta k_1-1}+k_2\left(1+z_{ij}^{c}\right)^{\theta k_2-1}\right)c{z_{ij}}^{c-1}\right]ck_3\,(t_i)^{c-1}(1+{t_i}^{c})^{-k_3-1} \quad \ldots..(15)$$

$$\log L = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\left[-\frac{1+\theta}{\theta}\log\left(\left(1+z_{ij}^{c}\right)^{\theta k_1}+\left(1+z_{ij}^{c}\right)^{\theta k_2}-1\right)+\log\left(k_1\left(1+z_{ij}^{c}\right)^{\theta k_1-1}+k_2\left(1+z_{ij}^{c}\right)^{\theta k_2-1}\right)+(c-1)\log z_{ij}\right]+(nk+n)\log c+n\log k_3+(c-1)\sum_{i=1}^{n}\log t_i+(-k_3-1)\sum_{i=1}^{n}\log(1+{t_i}^{c}) \quad \ldots\ldots(16)$$

$$\frac{d\,\log L}{dk_1}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\left[-\frac{1+\theta}{\theta}\;\frac{\theta\left(1+z_{ij}^{c}\right)^{\theta k_1}\ln\left(1+z_{ij}^{c}\right)}{\left(1+z_{ij}^{c}\right)^{\theta k_1}+\left(1+z_{ij}^{c}\right)^{\theta k_2}-1}+\frac{\left(1+z_{ij}^{c}\right)^{\theta k_1-1}+k_1\theta\left(1+z_{ij}^{c}\right)^{\theta k_1-1}\ln\left(1+z_{ij}^{c}\right)}{k_1\left(1+z_{ij}^{c}\right)^{\theta k_1-1}+k_2\left(1+z_{ij}^{c}\right)^{\theta k_2-1}}\right]=0$$

$$\frac{d\,\log L}{dk_2}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\left[-\frac{1+\theta}{\theta}\;\frac{\theta\left(1+z_{ij}^{c}\right)^{\theta k_2}\ln\left(1+z_{ij}^{c}\right)}{\left(1+z_{ij}^{c}\right)^{\theta k_1}+\left(1+z_{ij}^{c}\right)^{\theta k_2}-1}+\frac{\left(1+z_{ij}^{c}\right)^{\theta k_2-1}+k_2\theta\left(1+z_{ij}^{c}\right)^{\theta k_2-1}\ln\left(1+z_{ij}^{c}\right)}{k_1\left(1+z_{ij}^{c}\right)^{\theta k_1-1}+k_2\left(1+z_{ij}^{c}\right)^{\theta k_2-1}}\right]=0$$

$$\frac{d\,\log L}{dk_3}=\frac{n}{k_3}-\sum_{i=1}^{n}\log(1+{t_i}^{c})=0$$

$$\frac{d\log L}{dc}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\left[-\frac{1+\theta}{\theta}\;\frac{\theta k_1\left(1+z_{ij}^{c}\right)^{\theta k_1-1}z_{ij}^{c}\ln z_{ij}+\theta k_2\left(1+z_{ij}^{c}\right)^{\theta k_2-1}z_{ij}^{c}\ln z_{ij}}{\left(1+z_{ij}^{c}\right)^{\theta k_1}+\left(1+z_{ij}^{c}\right)^{\theta k_2}-1}+\frac{k_1(\theta k_1-1)\left(1+z_{ij}^{c}\right)^{\theta k_1-2}z_{ij}^{c}\ln z_{ij}+k_2(\theta k_2-1)\left(1+z_{ij}^{c}\right)^{\theta k_2-2}z_{ij}^{c}\ln z_{ij}}{k_1\left(1+z_{ij}^{c}\right)^{\theta k_1-1}+k_2\left(1+z_{ij}^{c}\right)^{\theta k_2-1}}+\log z_{ij}\right]+\frac{nk+n}{c}+\sum_{i=1}^{n}\log(t_i)+(-k_3-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{{t_i}^{c}\ln t_i}{1+{t_i}^{c}}=0$$

$$\frac{d\log L}{d\theta}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\left[\frac{1}{\theta^2}\log\left(\left(1+z_{ij}^{c}\right)^{\theta k_1}+\left(1+z_{ij}^{c}\right)^{\theta k_2}-1\right)-\left(\frac{1}{\theta}+1\right)\right.$$

$$*\frac{\left(1+z_{ij}^{c}\right)^{\theta k_1}\ln\left(1+z_{ij}^{c}\right)*k_1+\left(1+z_{ij}^{c}\right)^{\theta k_2}\ln\left(1+z_{ij}^{c}\right)*k_2}{\left(1+z_{ij}^{c}\right)^{\theta k_1}+\left(1+z_{ij}^{c}\right)^{\theta k_2}-1}$$

$$\left.+\frac{k_1\left(1+z_{ij}^{c}\right)^{\theta k_1-1}\ln\left(1+z_{ij}^{c}\right)*k_1+k_2\left(1+z_{ij}^{c}\right)^{\theta k_2-1}\ln\left(1+z_{ij}^{c}\right)*k_2}{k_1\left(1+z_{ij}^{c}\right)^{\theta k_1-1}+k_2\left(1+z_{ij}^{c}\right)^{\theta k_2-1}}\right]$$

$$=0$$

ونظراً للصيغ المعقدة اعلاه اذن لا يمكننا ايجاد الحلول التحليلية لمعادلات التقدير وعليه يمكن استعمال الطرق العددية والطرق التقريبية للحصول على تقديرات الامكان الاعظم (MLEs) للمعلمات$(\hat{k}_1,\hat{k}_2,\hat{k}_3,\hat{c}\ ,\hat{\theta})$ وبالآتي باستعمال خاصية الثبات في التباين لمقدرات الامكان الاعظم يتم الحصول على تقدير الامكان الاعظم ل $R_{s,k}$ من معادلة رقم (13)

$$R_{s,k=}\sum_{i=s}^{k}\sum_{j=0}^{k-i}\binom{k}{i}\binom{k-i}{j}\ (-1)^j\ \hat{k}_3\int_0^{\infty}\left[(1+u)^{\hat{k}_1\hat{\theta}}+(1+u)^{\hat{k}_2\hat{\theta}}-1\right]^{\frac{-(i+j)}{\hat{\theta}}}(1+u)^{-\hat{k}_3-1}\,du \qquad \ldots.(17)$$

حيث انه u= $t^{\hat{c}}$

**8 – الجانب التجريبي:-**

بعد ايجاد مقدرات الامكان الاعظم للمعلمات $(\hat{k}_1,\hat{k}_2,\hat{k}_3,\hat{c}\ ,\hat{\theta})$ والتعويض في معادلة المعولية معادلة رقم (17) وحل التكامل الموجود في المعادلة بالطرق العددية تم الحصول على النتائج . حيث تم اجراء محاكاة باستعمال لغة R الاحصائية لمقارنة اداء مقدرات الامكان الاعظم للمعلمات المجهولة ومعولية $R_{s,k}$ لنظام الاجهاد – المتانة متعدد المكونات حيث تم الحصول على المقدرات بأحجام عينات مختلفة ومعلمات نماذج مختلفة وتم الحصول على مقدار التحيز (Bias) ومتوسط مربعات الخطأ(MSE) وخطوات طريقة المحاكاة هي :

1- تحديد القيم الافتراضية :تم اختيار خمسة حجوم للعينات هي (10,25,50,75,100) ونموذجين واستعمال قيم افتراضية لمعلمات دالة النظام $(\theta,k_1\ ,k_2,k_3,c)$ وهي كالاتي :

جدول رقم (1) يمثل القيم الافتراضية لمعلمات ومعولية النظام

| النماذج المفترضة | $\theta$ | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | C | $R_{1,3}$ | $R_{2,4}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| النموذج الاول | 1.2 | 1.3 | 0.03 | 1.8 | 1 | 0.82902 | 0.69714 |
| النموذج الثاني | 3.5 | 1.5 | 1.4 | 2.5 | 1.5 | 0.83276 | 0.68887 |

2- توليد البيانات : تم توليد البيانات باستعمال دالة ال (CDF) العكسية

$$t_i = [(1 - U_t)^{\frac{-1}{\alpha}} - 1)]^{\frac{1}{c}} \quad , \quad t_i = X_1, X_2, T \quad , \alpha = k_1, k_2, k_3$$

وتطبيق المعادلات والاشتقاقات التي توصلنا اليها سابقا لتقدير دالة المعولية

وللمقارنة بين قيم المعولية المقدرة نستخدم معيار المقارنة متوسط مربعات الخطأ

$$MSE(\hat{R}_{s,k}) = \frac{\sum_{i=1}^{p}(\widehat{R}_{s,k} - R_{s,k})^2}{p}$$

اذ ان :

$\hat{R}_{s,k}$ : تمثل القيمة التقديرية لدالة معولية نموذج الاجهاد والمتانة متعدد المكونات .

$R_{s,k}$ : تمثل القيمة الحقيقية لدالة معولية نموذج الاجهاد والمتانة متعدد المكونات .

$p$ : عدد مرات تكرار التجربة وهو (1000) مرة

**9– الجداول والرسومات :**

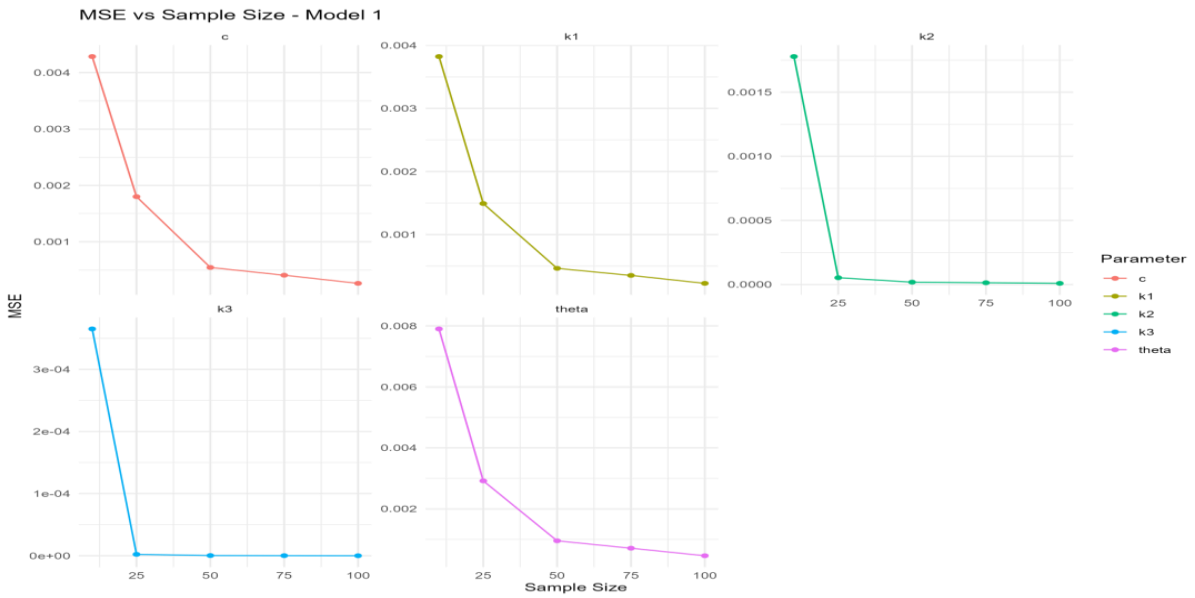
جدول رقم (2) يمثل القيم التقديرية والقيم الحقيقية ومقدار متوسط مربعات الخطأ MSE للنموذج الاول باستعمال طريقة التقدير ( MLE)

| **n** | **Parameter** | $\boldsymbol{\theta}$ | $\boldsymbol{k_1}$ | $\boldsymbol{k_2}$ | $\boldsymbol{k_3}$ | $\boldsymbol{c}$ | $\boldsymbol{R_{1,3}}$ | $\boldsymbol{R_{2,4}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **True Value** | **1.2** | **1.3** | **0.03** | **1.8** | **1** | **0.82902** | **0.69714** |
| **10** | **Estima** | 1.155815 | 1.26954 | 0.02285 | 1.79908 | 0.96788 | 0.83444 | 0.70468 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **te** | 4 | 36 | 42 | 09 | 81 | 92 | 25 |
| **25** | | 1.1732725 | 1.2811621 | 0.0263450 | 1.8000466 | 0.9796976 | 0.8324041 | 0.7017740 |
| **50** | | 1.1861888 | 1.2903798 | 0.0280674 | 1.8000235 | 0.9895266 | 0.8307441 | 0.6994873 |
| **75** | | 1.1892992 | 1.2925209 | 0.0285009 | 1.8000254 | 0.9920086 | 0.8303612 | 0.6989651 |
| **100** | | 1.1916521 | 1.2942080 | 0.0288251 | 1.8000110 | 0.9938518 | 0.8300573 | 0.6985495 |
| **10** | **Bias** | -0.0441846 | -0.030456 | -0.007145 | -0.000919 | -0.032111 | 0.0054273 | 0.0075414 |
| **25** | | -0.0267275 | -0.018837 | -0.003655 | 0.0000466 | -0.020302 | 0.0033822 | 0.0046328 |
| **50** | | -0.0138112 | -0.009620 | -0.001932 | 0.0000235 | -0.010473 | 0.0017222 | 0.0023461 |
| **75** | | -0.0107008 | -0.007479 | -0.001499 | 0.0000254 | -0.007991 | 0.0013392 | 0.0018240 |
| **100** | | -0.0083479 | -0.005792 | -0.001174 | 0.0000110 | -0.006148 | 0.0010354 | 0.0014083 |
| **10** | **MSE** | 0.0079029 | 0.0038223 | 0.0017786 | 0.0003652 | 0.0042871 | 0.0001248 | 0.0002415 |
| **25** | | 0.002918 | 0.00149 | 0.00005 | 0.00000 | 0.00179 | 0.00004 | 0.00009 |

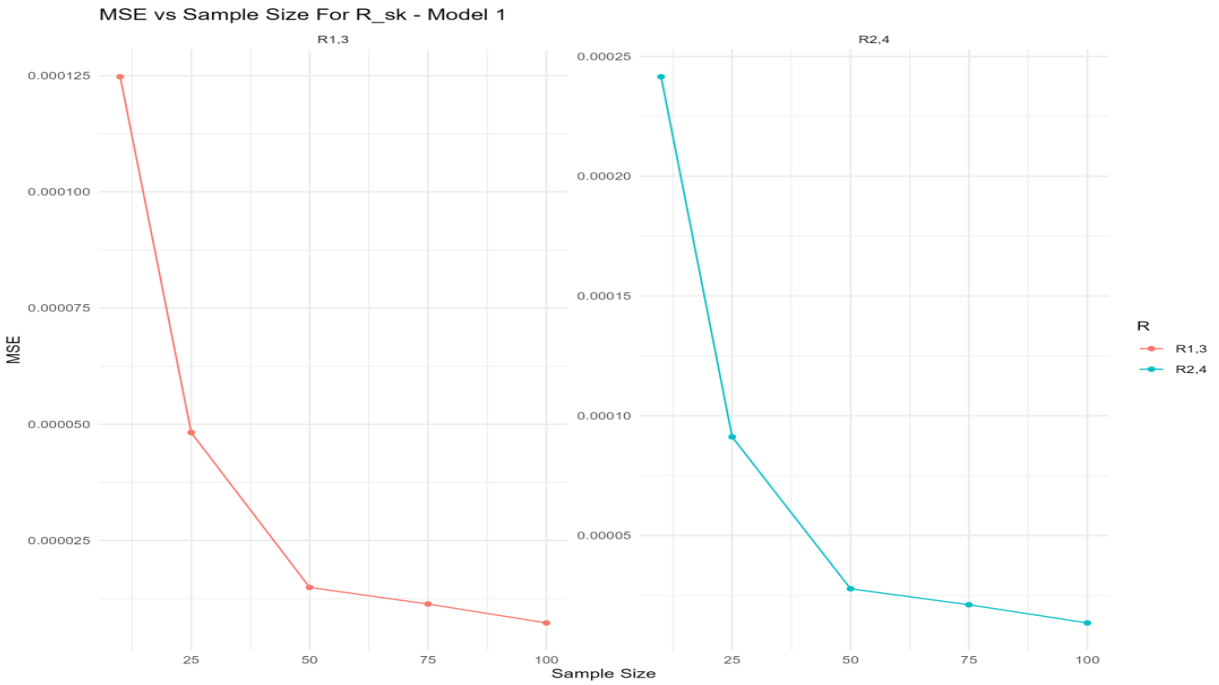
| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 6 | 15 | 28 | 23 | 99 | 82 | 12 |
| **50** | | 0.000951 3 | 0.00046 39 | 0.00001 83 | 0.00000 03 | 0.00054 37 | 0.00001 49 | 0.00002 78 |
| **75** | | 0.000708 5 | 0.00035 22 | 0.00001 36 | 0.00000 02 | 0.00040 63 | 0.00001 13 | 0.00002 11 |
| **100** | | 0.000462 1 | 0.00022 64 | 0.00000 90 | 0.00000 01 | 0.00026 20 | 0.00000 73 | 0.00001 35 |

من الجدول اعلاه نلاحظ ان جميع التقديرات تقترب تدريجياً من القيم الحقيقة للمعلمات مع زيادة حجم العينة مما يدل على خاصية ال (Consistence) لطريقة الامكان الاعظم وكذلك نلاحظ تنخفض قيم متوسط مربعات الخطأ (MSE) بشكل واضح مع زيادة حجم العينة مما يعكس تحسناً في دقة التقدير وهذه من الخصائص المعروفة لطريقة الامكان الاعظم وبشكل عام تؤكد النتائج كفاءة طريقة الامكان الاعظم في تقدير المعلمات المدروسة لاسيما مع تزايد حجم العينة .




الشكل ( 1 )

يوضح تغير قيم MSE للنموذج الاول عندما $( \theta = 1.2, k_1 = 1.3, k_2 = 0.03, k_3 = 1.8, c = 1 )$




الشكل (2)

يوضح تغير قيم MSEعندما ( $R_{1,3}$ =0.8290219 و $R_{2,4}$ =0.69714)

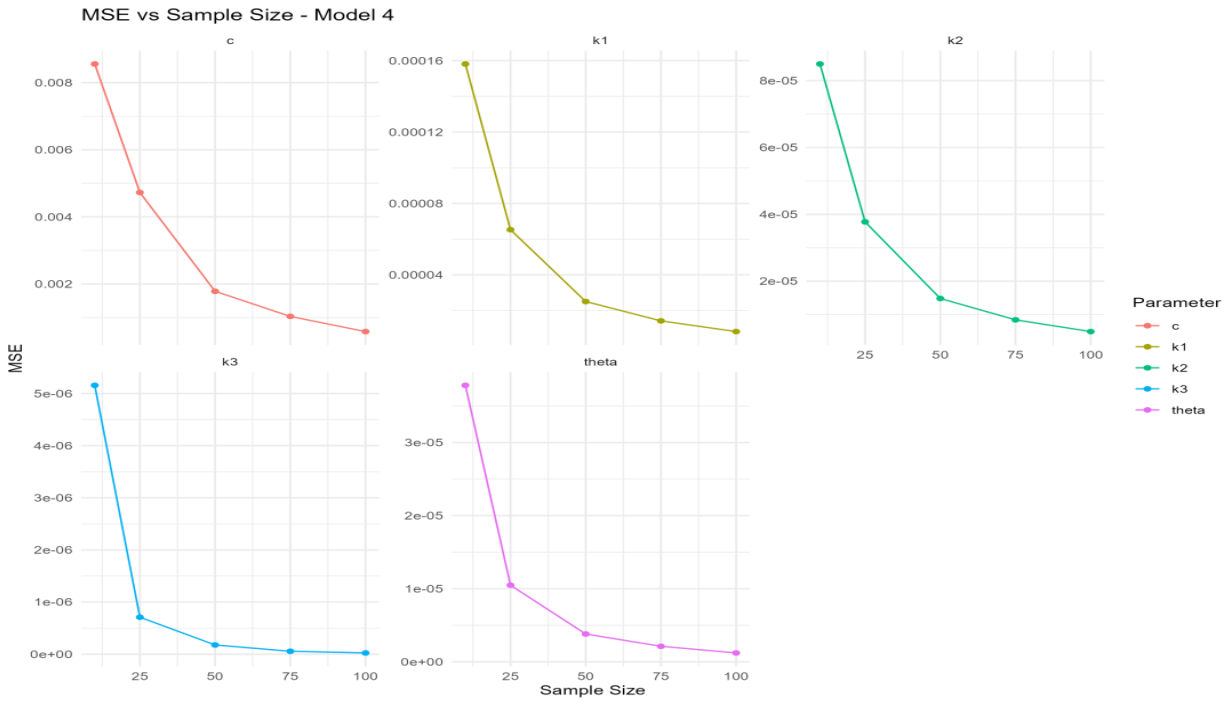
الشكل (1) والشكل (2) يوضحان تغير قيم متوسط مربعات الخطأ للمعلمات عند الافتراض بأنه القيم الحقيقية هي ( $\theta = 1.2, k_1 = 1.3, k_2 = 0.03, k_3 = 1.8, c = 1$) وقيمة المعولية $R_{1,3}$ و $R_{2,4}$ هما ( 0.69714 ، 0.82902) على التوالي ومن الرسم نلاحظ انخفاض قيم ال (MSE) كلما زاد حجم العينة وهذا ماتوصلت اليه النتائج .

جدول رقم (3) يمثل القيم التقديرية والقيم الحقيقية ومقدار متوسط مربعات الخطأ MSE للنموذج الثاني باستعمال طريقة التقدير ( MLE)

| n | Parameter | $\theta$ | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $c$ | $R_{1,3}$ | $R_{2,4}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **True Value** | **3.5** | **1.5** | **1.4** | **2.5** | **1.5** | **0.83276** | **0.68887** |
| **10** | **Estimate** | 3.502378 | 1.505805 | 1.404285 | 2.500108 | 1.452270 | 0.83208 | 0.68794 |
| **25** | | 3.501474 | 1.503813 | 1.402925 | 2.500121 | 1.467292 | 0.83231 | 0.68825 |
| **50** | | 3.500917 | 1.502383 | 1.401835 | 2.500063 | 1.479962 | 0.83248 | 0.68848 |
| **75** | | 3.500615 | 1.501611 | 1.401242 | 2.500026 | 1.486322 | 0.83257 | 0.68860 |

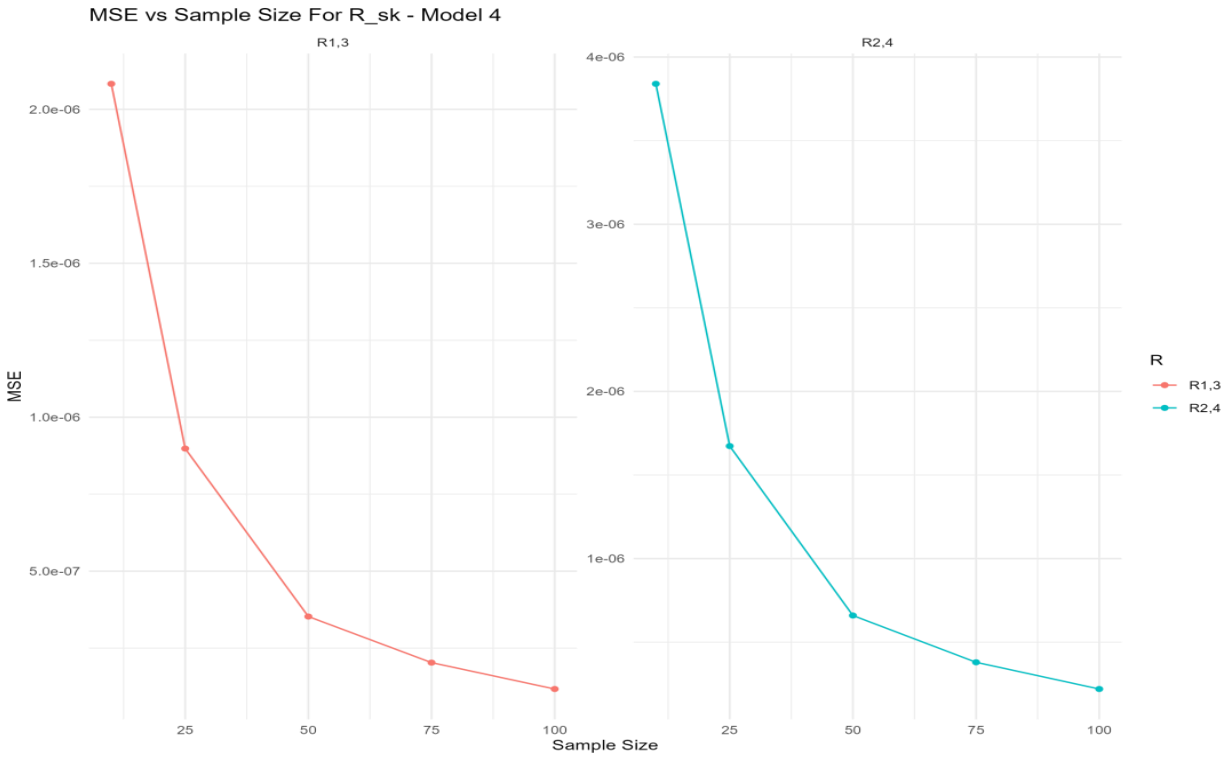
| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **100** | | 3.500491 | 1.501281 | 1.400988 | 2.500023 | 1.489321 | 0.83261 | 0.68866 |
| **10** | | 0.002378 | 0.005805 | 0.004285 | 0.000108 | -0.047729 | -0.00068 | -0.00092 |
| **25** | | 0.001474 | 0.003813 | 0.002925 | 0.000121 | -0.032707 | -0.00045 | -0.00061 |
| **50** | **Bias** | 0.000917 | 0.002383 | 0.001835 | 0.000063 | -0.020037 | -0.00028 | -0.00038 |
| **75** | | 0.000615 | 0.001611 | 0.001242 | 0.000026 | -0.013677 | -0.00019 | -0.00026 |
| **100** | | 0.000491 | 0.001281 | 0.000988 | 0.000023 | -0.010678 | -0.00015 | -0.00021 |
| **10** | | 0.000037 | 0.000158 | 0.000085 | 0.000005 | 0.008555 | 0.00021 | 0.00003 |
| **25** | | 0.000010 | 0.000065 | 0.000037 | 0.000071 | 0.004727 | 0.00009 | 0.00001 |
| **50** | **MSE** | 0.000003 | 0.000025 | 0.000014 | 0.000018 | 0.001782 | 0.00004 | 0.00007 |
| **75** | | 0.000002 | 0.000014 | 0.000008 | 0.000006 | 0.001034 | 0.00002 | 0.00000 |
| **100** | | 0.000001 | 0.000008 | 0.000004 | 0.000002 | 0.000582 | 0.00001 | 0.00002 |

من الجدول اعلاه نلاحظ ان جميع التقديرات تقترب تدريجياً من القيم الحقيقة للمعلمات مع زيادة حجم العينة مما يدل على خاصية ال (Consistence) لطريقة الامكان الاعظم وكذلك نلاحظ تنخفض قيم متوسط مربعات الخطأ (MSE) بشكل واضح مع زيادة حجم العينة مما يعكس تحسناً في دقة التقدير وهذه من الخصائص المعروفة لطريقة الامكان الاعظم وبشكل عام تؤكد النتائج كفاءة طريقة الامكان الاعظم في تقدير المعلمات المدروسة لاسيما مع تزايد حجم العينة .




الشكل ( 3 )

يوضح تغير قيم MSE للنموذج الثاني عندما ( $\boldsymbol{\theta = 3.5, k_1 = 1.5, k_2 = 1.4, k_3 = 2.5, c = 1.5}$ )




الشكل (4)

يوضح تغير قيم MSE عندما ( $R_{1,3}$ =0.83276 و $R_{2,4}$ =0.68887)

الشكل (3) والشكل (4) يوضحان تغير قيم متوسط مربعات الخطأ للمعلمات عند الافتراض بأنه القيم الحقيقية هي ( $\theta = 3.5, k_1 = 1.5, k_2 = 1.4, k_3 = 2.5, c = 1.5$ )وقيمة المعولية $R_{1,3}$ و $R_{2,4}$ هما (0.68887، 0.83276) على التوالي ومن الرسم نلاحظ انخفاض قيم ال (MSE) كلما زاد حجم العينة وهذا ما توصلت اليه النتائج .

**10- تحليل البيانات**

في هذا القسم يتم تحليل مجموعة من البيانات الحقيقية للتحقيق في موضوع الجفاف العالي. وقد تضمنت مشاهدات حقيقية مثلت مستويات سعة المياه في خزان شاستا في ولاية كاليفورنيا وقد تم استعمال هذه البيانات من قبل العديد من الباحثين (Kizilaslan and Nadar) [15], ( Kohansal and Shoae) [18]

وتم الحصول على البيانات من موقع California Data Exchange Center (CDEC) التابع الى ولاية كالفورنيا عبر الرابط .http://cdec.water.ca.gov/cgi-progs/queryMonthly?SHA

حيث تمت دراسة معولية نظام خزان المياه في ضل ظروف الجفاف اذ تعتبر سعة الخزان في شهر ديسمبر مؤشراً على متغير الاجهاد للنظام $T$ وتعتبر قدرة الخزان في شهري اغسطس وسبتمبر عناصر متانة ( $X_1, X_2$) حيث تقاس ادنى مستويات المياه في هذين الشهرين كمؤشر على متانة النظام . إذا كانت سعة خزان المياه في ديسمبر من العام السابق تتجاوز تقريباً نصف السعة القصوى، وكان الحد الادنى لمنسوب المياه في الاشهر اغسطس وسبتمبر خلال سنتين على الاقل من السنوات الخمسة الآتية اكبر من كمية المياه المتوفره في ديسمبر، فأنه يتم الادعاء بعدم حدوث جفاف مفرط لاحقاً

لنفترض انه $T_1, T_2, \ldots, T_6$ تمثل سعات خزان المياه في ديسمبر للأعوام 1980,1986,1992,1998,2004,2010 كما نفترض انه $X_{1k}, Y_{1k}$ حيث k=1,2,3,4,5 يمثلان سعات خزانات المياه لشهري اغسطس وسبتمبر خلال المدة من 1980 الى 1985 على التوالي . بينما $X_{2k}, Y_{2k}$ حيث k=1,2,3,4,5 تمثلان سعات خزانات المياه لنفس الشهرين خلال الفتره من 1987 الى 1991 على التوالي.

تمت معالجة البيانات حتى عام 2015 ولتوحيد القيم تم تحويل كل قيمة بين 0,1 من خلال قسمة القيم الاصلية على السعة الاجمالية لخزان (شاستا) والتي تبلغ سعته (4,552,000) أيكر – قدم ومن ثم تم استعمال البيانات المحولة في التحليل الاحصائي

$$X_1 = \begin{bmatrix} X_{111} & X_{112} & \ldots & X_{115} \\ X_{121} & X_{122} & \ldots & X_{125} \\ \vdots & & \ldots & \vdots \\ X_{161} & X_{162} & \ldots & X_{165} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5597 & 0.8112 & 0.8296 & 0.7262 & 0.4238 \\ 0.4637 & 0.3634 & 0.4637 & 0.3719 & 0.2912 \\ 0.7540 & 0.5381 & 0.7449 & 0.7226 & 0.5612 \\ 0.7552 & 0.6686 & 0.5249 & 0.6060 & 0.7159 \\ 0.7188 & 0.7420 & 0.4688 & 0.3451 & 0.4253 \\ 0.7951 & 0.6139 & 0.4616 & 0.2948 & 0.3929 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} X_{211} & X_{212} & \dots & X_{215} \\ X_{221} & X_{222} & \dots & X_{225} \\ \vdots & & \dots & \vdots \\ X_{261} & X_{262} & \dots & X_{265} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5449 & 0.7659 & 0.7946 & 0.7118 & 0.4345 \\ 0.4631 & 0.3484 & 0.4605 & 0.3597 & 0.2943 \\ 0.6814 & 0.4617 & 0.6890 & 0.6786 & 0.5071 \\ 0.7310 & 0.6558 & 0.4832 & 0.5620 & 0.6941 \\ 0.6667 & 0.7041 & 0.4128 & 0.3041 & 0.3897 \\ 0.7340 & 0.5693 & 0.4187 & 0.2542 & 0.3520 \end{bmatrix}$$

$$T' = (0.7009 \quad 0.6532 \quad O.4589 \quad 0.7183 \quad 0.531 \quad 0.7665)$$

**لنفترض انه**

$$Z_{ik} = min(X_{1ik}, X_{2ik}), Z = \{Z_{ik}, i = 1, \dots, 6, k = 1, \dots, 5\} \; T = \{T_1, T_2, \dots, T_6\}$$

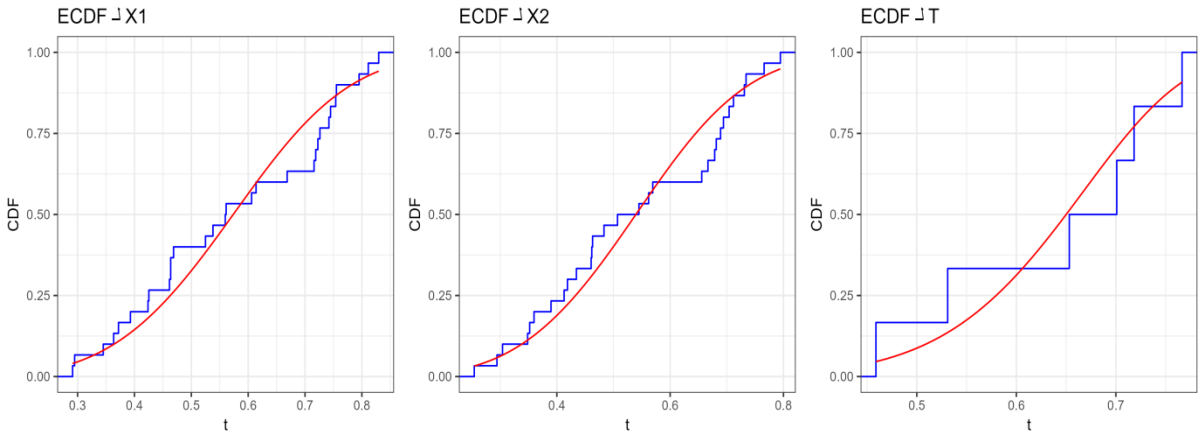
ويمكن اعتبار انه البيانات المشاهده **(Z,T)** هي من نظام 2-out-of-5 **.**

قبل ان نستمر في العمل لابد ان نقوم اولاً بالتحقق فيما إذا كان توزيع Burr xll في المعادلة (8) يمكن استعماله لتحليل هذه البيانات الحقيقية. وتم ذلك من خلال استعمال اختبار حسن المطابقة اختبار كولمقروف- سميرنوف **(K-S)** للبيانات اعلاه وكما في الجدول الآتي :

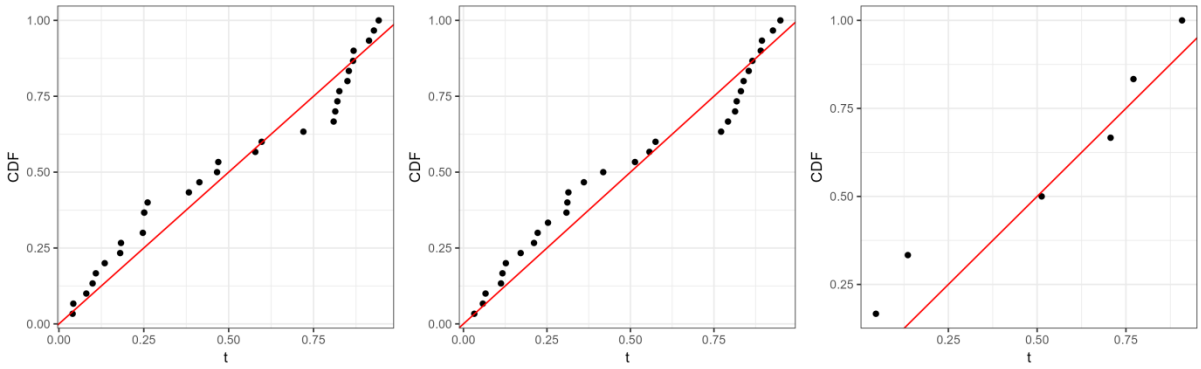
الجدول رقم (4) يمثل نتائج اختبار البيانات الحقيقية

| | **K-S test** | | **k est.** | **c est.** | **n** |
|---|---|---|---|---|---|
| | **D** | **P-value** | | | |
| $X_1$ | 0.1758 | 0.3118 | $k_1$=7.60468 | $c_1 = 4.2288$ | 6 |
| $X_2$ | 0.17138 | 0.3055 | $k_2 = 9.0362$ | $c_2$=4.0989 | 6 |
| $T$ | 0.2067 | 0.9158 | $k_3 = 19.973$ | $c_3$ =7.7635 | 6 |

نلاحظ في الجدول اعلاه انه قيمة اختبار (Kolmogorov Smirnov) قد بلغت (0.1783 ، 0.1758 ،0.2067) وقيمة P-value لهذا الاختبار قد بلغت (0.3118 ، 0.3055 ، 0.9158) وبما انه هذه القيم جميعها اكبر من مستوى الدلالة ($\alpha = 0.05$ ) لذلك قمنا بقبول فرضية العدم وعليه تمت مطابقة بيانات الدراسة مع توزيع بور النوع الثاني عشر وللمزيد من التوضيح ، يتم رسم التوزيعات التراكمية التجريبية ومقارنتها مع توزيع Burr xll النظري . تظهر النتائج في الشكل (5) كما تعرض المخططات الاحتمالية – الاحتمالية (P-P) في الشكل رقم( 6) والتي تشير ايضاً الى انه توزيعBurr xll يمكن اعتباره نموذجاً مناسباً . وللتحقق من الارتباط قمنا بحساب معامل الارتباط بين $X_1$ و $X_2$ باستعمال طريقة بيرسون حيث بلغت قيمته ( 0.9917912 )وكان مستوى الدلالة (P-value) يساوي 0.0000 مما يدل على ان البيانات($X_1, X_2$ ) يمكن اعتبارها غير مستقلة احصائياً.




الشكل (5) يمثل التوزيع التجريبي والتوزيع التراكمي لعينات الاجهاد والمتانة




الشكل (6) يمثل مدى ملائمة البيانات الحقيقية لتوزيع بور النوع الثاني عشر

بناءً على الطرق المقترحة تم تقدير معلمات النموذج والموثوقية المقدرة (MLEs)

جدول رقم (5)يمثل تقدير دالة المعولية ومعلمات النظام للبيانات الحقيقية

| θ | $K_1$ | $K_2$ | $K_3$ | C | $R_{2,5}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 3.6308056 | 9.4210387 | 11.7196875 | 8.0827617 | 4.9902518 | 0.5142942 |

الجدول اعلاه يمثل القيم التقديرية للبيانات الحقيقية والتي تم تقديرها باستعمال طريقة الامكان الاعظم .

لنفترض انه $X_1$ و $X_2$ هما عنصرين غير مستقلين لمتغير المتانة ولنفرض انه T هوه متغير الاجهاد.

فأن قيمة $R_{2,5}$ , والتي تساوي (0.5142942) يمكن اعتبارها احتمالاً بعدم حدوث جفاف مفرط .

**11- الاستنتاجات :**

1- القيم التقديرية للمعلمات الخمسة في جميع التجارب كانت قريبة جداً من القيم الافتراضية وخاصةً عند زيادة حجم العينة وهذا يثبت الدقة في نتائج التجارب .

2- لجميع التجارب المستخدمة التي تم توضيحها في الجانب التطبيقي كان متوسط مربعات الخطأ MSE لمعولية النظام $R_{s,k}$ تقل قيمتها كلما زاد حجم العينة

3- معولية النظام $R_{s,k}$ تزداد قيمتها مع زيادة قيمة معامل الارتباط $\theta$ ولمختلف النماذج .

4- البيانات الحقيقية التي تم تناولها في الجانب التجريبي اظهرت ملائمتها لتوزيع بور النوع الثاني عشر مما يعني ملائمة توزيع بور للبيانات الحقيقية المدروسة.

5- مراعاة الاعتمادية بين متغيرات المتانة المعتمدة هذا يؤدي الى التوصل لنتائج اكثر دقة مقارنةً عند اهمال الاعتمادية.

**12- التوصيات:**

1- يوصي الباحث باستعمال دالة الاقتران الكوبولا عند ربط متغيرات المتانة المعتمدة لانها دالة مرنة وقابلة للاشتقاق .وتمتلك معامل الاعتمادية $\theta$ لقياس قوة الترابط .

2- يوصي ايضاً بأجراء بحوث لاستعمال دالة الاقتران على توزيعات اخرى.

3- استعمال طرائق تقدير اخرى لتقدير معولية النظام كالتقدير البيزي مثلاً بالاضافة الى تقديرات الامكان الاعظم واجراء المقارنة.

**References**

1. Z. W. Birnbaum, On a use of Mann-Whitney statistics, in Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1 (1965), 13-17.

2. R. G. Srinivasa, M. Aslam, O.H. Arif, Estimation of reliability in multicomponent stress-strength based on two parameter exponentiated Weibull Distribution, Commun. Stat. Theory Methods, 46 (2017), 7495-7502.

3. V. K. Sharma, Bayesian analysis of head and neck cancer data using generalized inverse Lindley stress-strength reliability model, Commun. Stat. Theory Methods, 47 (2018), 1155-1180.

4. W. Kuo, M. J. Zuo, Optimal Reliability Modeling: Principles and Applications, John Wiley & Sons, Hoboken, 2003.

5. R. G. Srinivasa, M. Aslam, O.H. Arif, Estimation of reliability in multicomponent stress-strength based on two parameter exponentiated Weibull Distribution, Commun. Stat. Theory Methods, 46 (2017), 7495-7502.

6. Y. Liu, Y. Shi, X. Bai, P. Zhan, Reliability estimation of a N-M-cold-standby redundancy system in a multicomponent stress-strength model with generalized half-logistic distribution,Phys. A,490(2018),231-249.

7. Aldrich, J. (1997). RA Fisher and the making of maximum Likelihood 1912-1922. Statistical science, 12(3), 162-176.

8. O. Nave, S. Ajadi, Y. Lehavi, Analysis of the dynamics of fuel spray using asymptotic methods: The method of integral invariant manifolds, Appl. Math. Comput., 218 (2012), 50877-5890.

9. Al-Mutairi , D.k. ,Ghitany , M.E. & Gupta R.D. (2009). " Inference 0n Strees-Strength Reliability from Lindley distribution

10.Bhattacharyya , G.K. & Johnson , R.A. (1974) . " Estimation of Multicomponent Stress – Strength Model ", Journal of American Statistical Assocciation , Vol. 69 , NO. 348 , PP.966-970.

11- Ali Mousa, M.A.M., Jaheen, Z.F. (2009). Statistica inference for the Burr model based on Progressively censored data. Computers and Mathematics with Applications, 43, 1441-1449.

12. Wu, J.W., Yu, H.Y. (2005). Statistical inference about the shape parameter of the Burr type *X*II distribution under the failure-censored sampling plan, Applied Mathematics and Computation, 163,443-482.

13. Fisher, N.I., 1997. Copulas. In:Kotz, S., Read, C.B., and Banks, D.L., eds. Encyclopedia of Statistical Sciences, Update Vol 1. New york: Wiley, pp.159-163.

14. M. Nadar, F. Kizilaslan, Estimation of reliability in a multicomponent stress-strength model based on a Marshall-Olkin bivariate Weibull distribution, IEEE Trans. Reliab., 65 (2015), 370-380.

15. F. Kizilaslan, M. Nadar, Estimation of reliability in a multicomponent stress- strength model based on a bivariate Kumaraswamy distribution, Stat. Papers, 59 (2018), 307-340.

16. A. Sklar, Functions de repartition an dimensions et leurs marges, Publication de Institut de Statistique de 1 Universite de Paris, 1959.

17. R. B. Nelsen, An Introduction to Copulas, Springer, New York, 2006.

18. A. Kohansal, S. Shoaee, Bayesian and classical estimation of reliability in a multicomponent stress-strength model under adaptive hybrid progressive censored data, Stat. Papers, 62 (2021), 309-359.