AL KUT JOURNAL OF ECONOMIC AND ADMINISTRATIVE SCIENCES
Publisher: College of Economics and Management - Wasit University

دراسة مقارنة لبعض الطرائق الحصينة لتقدير دالة المعولية

لتوزيع برناف مع تطبيق عملي

Comparison of some Robust Estimation Method to Estimate the Reliability Function for Parnav Distribution with Application

هبة يونس مكطوف[1] أ.م.د. أحمد مهدي صالح[2] أ.م.د. حيدر رائد طالب[3]

Asst. PhD. Haider Raed Talib Asst. PhD. Ahmed Mahdi Salih Hiba Younis Maktoof

كلية الإدارة والاقتصاد / جامعة سومر كلية الإدارة والاقتصاد / جامعة واسط

المستخلص

أصبحت عملية بناء ونمذجة التوزيعات الإحصائية الاحتمالية ذات أهمية متزايدة في السنوات الأخيرة، ففي هذه الدراسة تم تقديم توزيع لمدى الحياة الذي قد يكون أفضل من التوزيعات الأخرى هو توزيع برناف ذات المعلمة الواحدة وأنه عباره عن مزيج من توزيعين التوزيع الاسي و توزيع كاما ، كما تم تقديم دوال خاصة بهذا التوزيع كالدالة التجمعية (Cumulative Function)، دالة كثافة الاحتمال (probability density function، دالة المعولية (Reliability Function) تم تقدير معالم هذا التوزيع باستعمال طرائق التقدير الحصينة فضلا عن استعمال طرائق التقدير الكلاسيكية وذلك لتحري الدقة والموضوعية. وتم تقديم ثلاثة من الطرائق الحصينة المتمثلة بـ(**M** الحصينة، طريقة الانحرافات المطلقة الصغرى، طريقة تقدير **B** الأمثل) لتقدير معلمة التوزيع وحساب دالة المعولية.

وقد توصلت الدراسة من خلال مناقشة النتائج في الجانب التجريبي والتطبيقي حيث استعملت المحاكاة بأسلوب (Monte-Carlo) فضلا عن استعمال بيانات حقيقية مختبرية حيث قُدرت معلمة التوزيع ودالة المعولية وإيجاد أفضل طريقة تقدير من طرائق المقترحة، باستعمال المقياس الاحصائي متوسط مربعات الخطأ(MSE) وتم التوصل إلى أفضلية طريقة B الأمثل عن سائر طرائق التقدير الحصينة الأخرى.

Abstract

The development and modeling of probabilistic statistical distributions have garnered considerable interest in recent years. This research introduces the one-parameter Parnav distribution, an amalgamation of the exponential and gamma distributions, as a lifetime distribution that may surpass previous distributions. Furthermore, the specific functions related to this distribution are delineated, encompassing the Reliability function, probability density function, and cumulative distribution function. Three robust estimate methods were employed: the M estimator, the least absolute deviations method, and the optimal B estimation approach, for estimating the distribution parameter and calculating the reliability function. The study concluded with a discussion of the conclusions derived from both actual laboratory data and simulations utilizing the Monte Carlo method, addressing both experimental and practical dimensions. The reliability function and distribution parameter were established, and the Mean Squared Error (MSE) was employed to identify the optimal estimating technique among the proposed options. Compared to other robust estimation strategies, the optimal B method is deemed the superior choice.

المقدمة

الهدف الرئيس من الاحصاء هو جمع وتلخيص استنتاجات من البيانات المتوفرة لحل المشكلات المختلفة لجميع الظواهر. وذلك على بأنه أحد اهم العلوم الرياضية التي تحظى باهتمام الكثير من المختصين لإمكانية تطبيقه في مختلف الميادين والمجالات العامة. واهم مرحله لحل وتحليل البيانات هو معرفه سلوك وتوزيع البيانات الظاهرة المدروسة، وهناك الكثير من المشاكل الضرورية التي لا تتناسب فيها البيانات الحقيقية مع أي من نمإذج الاحتمالات القياسية أو الكلاسيكية. حيث تستخدم توزيعات العمر لنمذجة بيانات العمر في العديد من العلوم التطبيقية مثل الإحصاء الحيوي والهندسة والطب والتمويل وتحليل البقاء، لأن التحليل الإحصائي يعتمد بشكل واسع على نموذج الاحتمالات أو التوزيعات المفترضة. ومن هذه التوزيعات Pranav Distribution هو توزيع جديد نسبيا لمدى الحياة مكون من معلمه واحدة وقدم تم دراسته وإيجاد الخصائص الرياضية والاحصائية لنمذجة بيانات العمر ففي عام 2018 قام الباحث (Shukla) بتقديم بحث تضمن اقتراح Pranav Distribution، وهو توزيع جديد ذو معلمة واحدة، حيث تم استنباط خصائصه الإحصائية والرياضية منها) دالة الكثافة الاحتمالية، الدالة التجميعية، الوسط الحسابي ،التباين، منحنياتBonferroni and Lorenz ، الإحصاءات المرتبة، وقياس Renyi Entropy، ودالة المعولية ومتوسط العمر المتبقي .(كما تمت مناقشة طرق التقدير لتقدير معلمة التوزيع منها طريقة الإمكان الأعظم وبعدها تم عرض مدى ملائمة البيانات الحقيقية المتمثلة بقوة زجاج نافذة الطائرة لـ Pranav Distributionومقارنته بالتوزيعات العمرية الأخرى ذات المعلمة الواحدة باستعمال معيار المقارنة متوسط مربعات الخطأ MSEواعتبر Pranav Distribution جيدا للدراسة وفي عام 2019 قام الباحث (Uwaeme) واخرون بتقديم بحث

يتضمن اقتراح تعميم لـ Pranav Distribution بواسطة Shukla عام 2018 يسمى An Extended Pranav Distributionتم الحصول على التوزيع الجديد الموسع من خلال طريقة الأسس. وكذلك تم اشتقاق الخصائص الاحصائية لهذا التوزيع الجديد منها العزوم ودالة المولدة للعزوم والإحصاءات المرتبة ودالة المعولية و Renyi Entropy وكذلك الرسوم التوضيحية لإشكال دالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيع التراكمي. ثم الحصول على تقديرات المعلمة بواسطة طريقة التقدير الإمكان الأعظم، وبعدها قاموا بفحص أداء هذا التوزيع الجديد باستعمال بعض مجموعات البيانات الواقعية باستعمال بعض مقاييس المقارنة منها AIC, BIC لإظهار مرونته وصلاحيته مقارنة بالتوزيعات الأخرى.

في العام نفسه، قام الباحثان (Abebe & Shukla) بتنفيذ Pranav Distribution المتقطع، وهو نظير منفصل لـ Pranav Distributionالمستمر؛ لأنه في العقود الأخيرة جذبت عملية تقسيم التوزيع المستمر انتباه الباحثين؛ لإنها تولد توزيعات يمكن استعمالها للبيانات المنفصلة تماما. وحصل على خصائصه الإحصائية المهمة التي منها: معامل التباين والالتواء، والتفلطح والتشتت، ومن ثم، مناقشتها بيانيا، واستعمال طريقة التقدير الإمكان الأعظم لتقدير المعلمة الخاصة به، حيث يوضح التوزيع المقترح على بيانات العد الحقيقي حسن اللياقة واثبت بأنه أفضل مقارنة بالتوزيعات المنفصلة ذات المعلمة الواحدة. فإن الهدف من هذا البحث هو إيجاد أو تطوير بعض التوزيعات مع خصائصها وتقدير معلماتها. هنالك بعض البيانات لا تتبع سلوكاً واضحاً ومؤثراً، ولا تعطي نتائج جيدة لمجموعة البيانات البيولوجية والهندسية التي تعدُّ بمثابة توزيع مدى الحياة، عند اجراء التحليل الاحصائي لأي ظاهرة من الظواهر المختلفة، نبدأ برسم البيانات، وتحديد سلوكها، والتوزيع المناسب لها، وفي الكثير من الظواهر أو البيانات لم يتم تحديد توزيع مناسب لما لها من اشكال غير منتظمة ومعرفة التوزيع أو هنالك شواذ في بياناتها، لذلك قد بُحثَ عن توزيع جديد لمدى الحياة الذي قد يكون أفضل من توزيعات معينة.

ويهدف البحث إلى دراسة التوزيع والتعرف إلى اهم خواصه الإحصائية والرياضية الذي تجعله مناسبا لنمذجة بعض البيانات واستعمال عدة طرائق حصينة لتقدير معلمة ومعولية التوزيع النموذج بغية المقارنة بين هذه الطرائق باستعمال بعض المقاييس الإحصائية.

1- توزيع برناف

هو توزيع احتمالي تم اقتراحه من قبل الباحث Kamlesh Kumar Shukla في عام 2018 ذو معلمة واحدة الذي يقيس أو دراسة وقت الحياة أو دالة المعولية وانه عبارة عن مزيج من توزيعين، التوزيع الاسي الذي له معلمة قياس α وتوزيع كاما له معلمة الشكل وتساوي 4 وقياس α (Shukla, 2018).

ونسب الخليط بينهما يكون على التوالي:

$$\frac{\alpha^4}{\alpha^4+6} \quad and \quad \frac{6}{\alpha^4+6}$$

$$f(x;\alpha) = pg_1(x;\alpha) + (1-p)g_2(x;\alpha,4) \qquad \ldots \quad (1)$$

Where $p = \frac{\alpha^4}{\alpha^4+6}$, $g_1(x) = \alpha e^{-\alpha x}$, and $g_2(x) = \frac{\alpha^4 x^3 e^{-\alpha x}}{6}$

وله الخصائص الإحصائية والرياضية التي تجعله مناسبا لنمذجة بعض مجموعات البيانات البيولوجية والهندسية، كما يمكن استعمال Pranav distribution في دراسات أخرى غير البيولوجية والفزيائية والطبية، إذا كانت تتعلق ببيانات البقاء على قيد الحياة، أو مشاكل المعولية وتقييم المخاطر Pranav distribution يمكن ان يكون نموذجا مناسب لوصف الزمن حتى الموت أو الفشل أو حدوث حدث ما (Shukla, 2018) .

كما يحدث ان يستعمل لتحليل عمر الة أو مكون أو نظام ومدى قدرته على العمل بشكل سليم، يمكن التعبير عنه بواسطة دالة كثافة الاحتماليةpdf الاتية:

$$f_{(X,\alpha)} = \frac{\alpha^4}{\alpha^4 + 6} (\alpha + x^3) e^{-\alpha x} \quad \ldots (2)$$

حيث ان $\alpha > 0$ and $x > 0$

ولثبات ان دالة Pranav Distribution هي دالة الكثافة الاحتمالية (Probability Density Function) pdfأي ان.

i) $f_{(X)} \geq 0 \ , \ \forall x$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f_{(X)} \, dx = 1$

iii) $P(X = x) \ , \forall x$

$$\frac{\alpha^4}{\alpha^4 + 6} \int_0^{\infty} (\alpha + x^3) e^{-\alpha x} \, dx$$

$$\frac{\alpha^4}{\alpha^4 + 6} \left[\int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha x} \, dx + \int_0^{\infty} x^3 e^{-\alpha x} \, dx \right]$$

باستعمال التكامل بالتجزئة(Yang, et al., 1998)

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

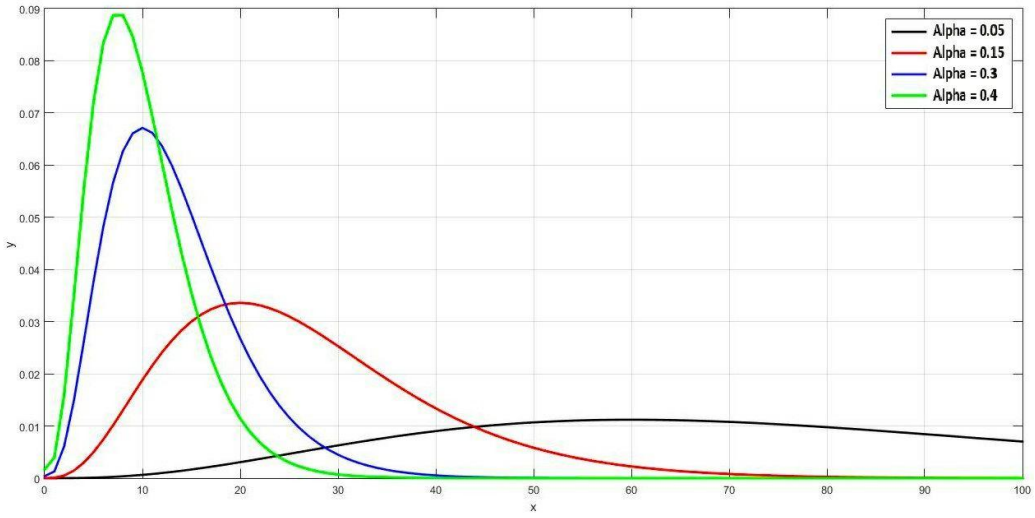
نحصل على

$$\frac{\alpha^4}{\alpha^4+6} \left[\int_0^{\infty} -e^{-\alpha x} + \int_0^{\infty} \frac{-1}{\alpha} \, e^{-\alpha x} - \frac{3x^2}{\alpha^2} e^{-\alpha x} - \frac{6x}{\alpha^3} \, e^{-\alpha x} - \frac{6}{\alpha^4} e^{-\alpha x} \right]$$

$$\frac{\alpha^4}{\alpha^4+6} \left[1 + \frac{6}{\alpha^4} \right]$$

$$\frac{\alpha^4}{\alpha^4+6}\left[\frac{\alpha^4+6}{\alpha^4}\right]$$

$$\int_0^{\infty} f_{(X,\alpha)}\, dx = 1$$



الشكل(1)

منحى دالة الكثافة الاحتمالية لـ Pranav Distribution لقيم مختلفة من المعلمة

∴ دالة Pranav distribution هي دالة كثافة احتمالية (Johannesson, et al., 2013)

ومن دالة التوزيع الاحتمالية pdf (2) يمكن الحصول على دالة التوزيع التراكمية CDF (Cumulative Distribution Functions)

$$F_{(X,\alpha)} = \int_0^X \frac{\alpha^4}{\alpha^4+6}\,(\alpha + u^3)\, e^{-\alpha u}\, du$$

$$F_{(X,\alpha)} = \frac{\alpha^4}{\alpha^4+6}\left[\int_0^X \alpha\, e^{-\alpha u}\, du + \int_0^x u^3 e^{-\alpha u}\, du\right]$$

وباستعمال التكامل بالتجزئة

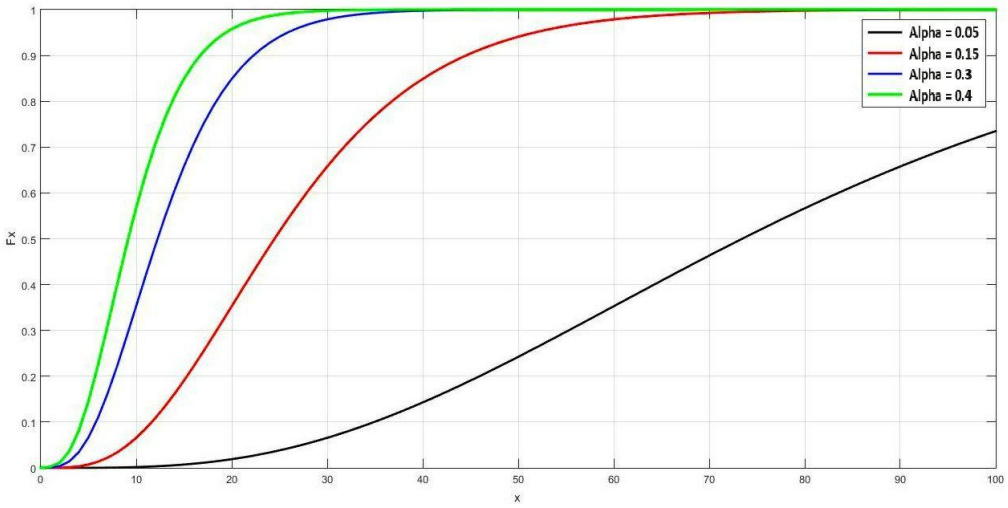
$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

$$F_{(X,\alpha)} = \frac{\alpha^4}{\alpha^4+6}\left[\int_0^x -e^{-\alpha u}\right] + \left[\int_0^x \frac{-u^3}{\alpha}e^{-\alpha u} - \frac{3u^2}{\alpha^2}e^{-\alpha u} - \frac{6u}{\alpha^3}e^{-\alpha u} - \frac{6}{\alpha^4}e^{-\alpha u}\right]$$

$$\frac{\alpha^4}{\alpha^4+6}\left[1-e^{-\alpha x}\right] + \left[\left(\frac{-x^3}{\alpha}e^{-\alpha x} - \frac{3x^2}{\alpha^2}e^{-\alpha x} - \frac{6x}{\alpha^3}e^{-\alpha x} - \frac{6}{\alpha^4}e^{-\alpha x}\right) - \left(\frac{-6}{\alpha}\right)\right]$$

$$F_{(X,\alpha)} = 1 - \left[1 + \frac{\alpha x(\alpha^2x^2+3\alpha x+6)}{\alpha^4+6}\right]e^{-\alpha x} \qquad x>0\,,\alpha>0$$

. . . (3)



الشكل(2)

منحى دالة التوزيع التراكمي لـ Pranav Distribution لقيم مختلفة من المعلمة

2- دالة المعولية

تعرف بأنها احتمال عدم فشل النظام في فترة زمنية محددة (0,t) ،أو بمعنى اخر متغير عشوائي يشير إلى وقت اشتغال النظام حتى حدوث الفشل ويرمز لها بالرمز R(t) يمكن التعبير عنها بالصيغة الاتية (Hager, et al., 1971)

$$R(t) = p(T > t) \qquad = \int_t^{\infty} f(u)du$$

$$R(t) = 1 - p(T \leq t)$$

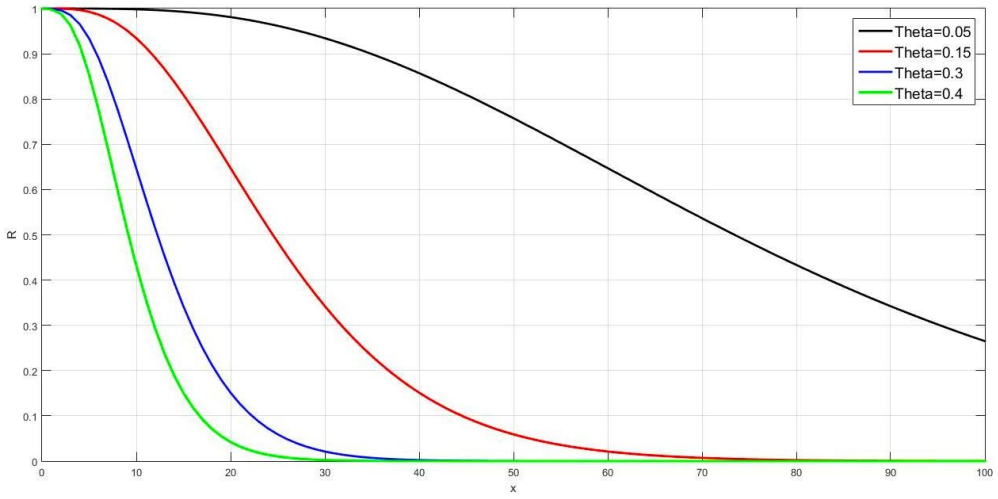
$$R(t) = 1 - F(t)$$

$$where\ R(t) + F(t) = 1$$

$$R(t) = 1 - \left[1 - \left[1 + \frac{\alpha t(\alpha^2 t^2 + 3\alpha t + 6)}{\alpha^4 + 6}\right] e^{-\alpha t}\right]$$

$$R(t) = \left[1 + \frac{\alpha t(\alpha^2 t^2 + 3\alpha t + 6)}{\alpha^4 + 6}\right] e^{-\alpha t} \qquad t \geq 0$$

$$R(t) = \left[\frac{\alpha^4 + 6 + \alpha^3 t^3 + 3\alpha^2 t^2 + 6\alpha t}{\alpha^4 + 6}\right] e^{-\alpha t} \qquad \ldots \quad (4)$$



الشكل(3)

منحى دالة المعولية لـ Pranav Distribution لقيم مختلفة من المعلمة

3- طرائق التقدير الحصينة

في بعض الأحيان قد يواجه الباحث بعض المشاكل في تفسير البيانات: مثل اختلاف توزيع المجتمع قيد الدراسة، عن التوزيع ، أو ابتعاد بيانات العينة عن التوزيع الطبيعي؛ وذلك بسبب القيم المتطرفة أو الشاذة التي تسبب انحرافات عن الافتراضات

التي وضعت لطرائق التقدير الكلاسيكية التقليدية، لهذا فقد تم إيجاد طرائق الحصينة حيث تميزت هذه الطرائق بأنها اقل تأثير بالقيم الشاذة، وتستعمل كذلك في حالة عدم معرفة التوزيع بشكل عام للبيانات، أو تكون ذات ذيل من طرف واحد، وتعمل بشكل جيد تحت مختلف التوزيعات(Aydın, et al., 2018)

4- طريقة M الحصينة

وهي من الطرائق الأساسية والعامة لوصف الانحدار الحصين تم تقديمها من قبل Huber عام 1964 حيث ان هذه الطريقة تعتبر حصينة ضد الخروقات في فرضيات النموذج الخطي. وكذلك تكون حصينة لوجود القيم الشاذة والمتطرفة، تعتمد هذه الطريقة على توليفة خطية لحاصل ضرب الخطأ العشوائي e_i مع دالة الهدف ρ حيث ان مقدر M الحصين هو الحل المتباينة الآتية(Banaś, 2012) :

$$Minimize \sum_{i=0}^{n} \rho(e_i) \qquad \ldots \quad (5)$$

لإيجاد الحل للمتباينة أعلاه لابد أولا من اختيار دالة الهدف وهنا سيتم اختيار دالة الهدف الآتية (1964) Huber.

$$f_{(e_i)} = \begin{cases} \frac{1}{2} e_i^2, & , \quad if|e_i| < a \\ a|e_i^2| - \frac{1}{2}a^2, & if|e_i| \geq a \end{cases} \qquad \ldots \quad (6)$$

وعليه سيكون الاشتقاق لهذه الدالة كما يأتي:

$$\rho'_{(e_i)} = \psi(e_i)$$

$$\psi(e_i) = \begin{cases} e_i \\ a\ sign\ e_i \end{cases} , \quad a = 1.345 \qquad \ldots \quad (7)$$

وبما ان المتباينة في المعادلة (5) هي تصغير إذن نقوم باشتقاقها لتكون كمايلي

$$Minimize \sum_{i=0}^{n} \rho(e_i) \quad f(x, \vartheta)$$

حيث ان $f(x, \vartheta)$ هي دالة الكم Quantile Function وعليه فأن

$$\sum_{i=0}^{n} \psi(e_i) \frac{\partial F(x,\vartheta)}{\partial(\alpha)} = 0 \quad \ldots \quad (8)$$

$$\sum_{i=0}^{n} e_i \frac{\partial F(x,\vartheta)}{\partial(\alpha)} = 0 \quad \ldots \quad (9)$$

حيث ان دالة الكم لـ Pranav distribution صعبة الاشتقاق لكون التوزيع معقد نوع ما لذلك قام Onyekwere[1] واخرون بإيجاد صيغة تقاربية لدالة الكم لـ Parnav distribution؛ لتكون الصيغة الآتية (Bowie, et al., 1998):

$$f(x,\vartheta) = [\frac{1}{\alpha} \ln (\frac{1}{F(x,\alpha)} + \frac{\alpha^3 u^3 + 3\alpha^2 u^2 + 6\alpha u}{F(x,\alpha)(\alpha^3 + 6)})] \quad \ldots \quad (10)$$

5- طريقة الانحرافات المطلقة الصغرى LAD

وهي طريقة حصينة عملية في حالة وجود القيم الشاذة حيث تم اشتقاق هذه الطريقة عام 2006 من قبل (Fang and Zhao) وفي البداية كان استعمال طريقة LAD صعب لما تتضمنه هذه الطريقة من إشكالات في حساب دالة الكم Quantile Function لعديد من التوزيعات حيث كان استعمال طريقة المربعات الصغرى LOS اسهل بكثير بعد التحوير الذي قدمه Dodge عام 2008 ولكن في الآونة الأخيرة زاد اهتمام الباحثين بطريقة LAD لتطور برامج التحليل العددي وسهولة الحصول عليه حيث ان مقدر $\hat{\alpha}_{LAD}$ يكون بالشكل التالي (Hassan, et al., 2020):

$$\hat{\alpha}_{LAD} = min|e_i| \quad \ldots \quad (11)$$

وعليه فأن مقدر $\hat{\alpha}_{LAD}$ هو المتباينة الآتية(Banaś, 2012) :

$$\hat{\alpha}_{LAD} = min \left| \frac{x_i - (f(x,\vartheta))}{S} \right| \quad \ldots \quad (12)$$

حيث ان $f(x,\vartheta)$ دالة الكم انفة الذكر

وان S يحسب على نحو الاتي(Johannesson, et al., 2013) :

$$S = \frac{MAD|e|}{0.675} \quad \ldots \quad (13)$$

وان $MAD|e|$ هو الانحراف المطلق للإخطاء ويكون بالصيغة الآتية(Victoria-Feser, et al., 1997) (Yang, et al., 1998):

$$MAD(e) = median[e - medin(e)] \quad \ldots \quad (14)$$

6- طريقة B الأمثل OBR

اقترحت هذه الطريقة من لدن الباحث Hampel ؛ إذ طُور طريقة تقدير M مع دالة التأثير المحدودة IF (Bounded Influence Function)وقد توصل Hampel إلى اسلوبين لغرض تقديم طريقة التقدير OBR ، الاسلوب الأول هي نهج Min_imax الذي اقترحه Huber ، الأسلوب الثاني هي نهج متناهية الصغر وهو النهج الذي استند عليه Hampel واخرون على تقدير M مع IF دالة التأثير المحدودة والحد الأدنى من التباين (Çakmak, et al., 2021).

لإيجاد تقدير معلمة α لـpranav distribution حُصِل على مقدر M للمعلمة αمن خلال الصيغة الآتية (Shukla, 2018):

$$\sum_{i=0}^{n} \rho(X_i, \alpha) \quad \ldots \quad (15)$$

وباشتقاق المقدار أعلاه

$$\sum_{i=0}^{n} \psi(x) = 0$$

حيث ان

$$\psi(x) = f_{(x)}^{'}$$

لإيجاد أفضل تقدير لـ α يتم استعمال دوال هدف معينة ومنها دالة Huber (Umeh, et al., 2019)

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & , |x| \le b \\ b|x| - \frac{1}{2}\, b^2 & , |x| > b \end{cases}$$

وبما ان

$$\psi(x) = \begin{cases} x & , \quad |x| \le b \\ sgn(x)b & , \quad |x| > b \end{cases}$$

وبالاعتماد على IF لمقدر M بواسطة الصيغة الآتية:

$$IF = \frac{\psi(X,\alpha)}{-\int \partial\psi(X,\alpha)/\partial\alpha) dF_\alpha(X)} \qquad \ldots \quad (16)$$

تكون صيغة معامل التأثير كما يأتي:

$$\mathrm{IF} = \mathrm{S(X,\alpha)\ J}(\alpha)^{-1}$$

حيث ان $\mathrm{J}(\alpha)^{-1}$ يمثل معلومات فيشر لـPranav distribution

وبالنسبة إلى $\mathrm{S(X,\alpha)}$يمكن الحصول عليه حسب المعلومات الآتية(Shukla, 2023) :

$$\mathrm{S(X,\alpha)} = (\partial log f_\alpha(x)/\partial\alpha)$$

$$\log(f(x,\alpha)) = 4\log\alpha - \log(\alpha^4+6) + \log(\alpha + x^3) - \alpha x$$

$$\frac{\partial \log(f(x,\alpha))}{\partial\alpha} = \frac{4}{\alpha} - \frac{4\alpha^3}{\alpha^4+6} + \frac{\log x^3}{\alpha + x^3} - \log x \qquad \ldots \quad (17)$$

وقام Hampel بتطوير نسخة جديدة من مقدر OBR بالصيغة الآتية:

$$\sum_{i=0}^{n} \psi\left(A(\alpha)\big(s(x,\alpha) - a(\alpha)\big)\right) = \sum_{i=1}^{n} w(x_i,\alpha)\{s(x_i,\alpha) - a(\alpha)\} = 0$$

$$\ldots \quad (18)$$

حيث ان

$$w(x,\alpha) = \min\left\{1, \frac{b}{A(\alpha)\{s(x_i,\alpha) - a(\alpha)\}}\right\} \qquad \ldots \quad (19)$$

وقد اقترح Cakmak واخرون قيمة b مساوية إلى $b = \sqrt{2}$

ويتم الحصول على $A(\alpha), a(\alpha)$ من المعادلات الآتية(Rajagopalan, et al., 2023) :

$$A(\alpha) = \sqrt{E(x^2)}$$

$$a(\alpha) = E(x)$$

تمت المقارنة بين مختلف الطرائق الحصينة باستعمال متوسط مربعات الخطاء

$$MSE = \frac{1}{Kn}\sum_{i=1}^{n}(\hat{R_i} - R_i)^2 \qquad \ldots \quad (20)$$

R: تمثل القيمة الحقيقية لدالة المعولية , $\hat{R}$: تمثل القيمة المقدرة لدالة المعولية وK : عدد تكرارات التجربة (Umeh, et al., 2019)

7- نتائج المحاكاة

بعد القيام بإجراء عملية المحاكاة توصل إلى نتائج تمثل قيم مقدرة لمعلمة لـ Pranav Distribution ومتوسط مربعات الخطأ MSE للنماذج المفترضة وبعشرة حجوم مختلفة للعينة وكذلك تم اختيار عدة قيم لمعلمة التوزيع *(0.4 , 0,3 , 0.15, 0.05)* إذ ان التوزيع بمعامل تفلطح عالي تم اختيار قيم صغيرة لمعلمة التوزيع حيث تم تكرار التجربة 3000 مرة باستعمال برنامج MATLAB، كما موضح في الجداول:

الجدول(1) يمثل تقدير لمعلمة التوزيع عندما $\alpha = 0.05$

n	M-E	LAD	OBR
5	**1.43**	**1.57**	**1.67**
10	**1.19**	**1.27**	**1.33**
15	**0.95**	**1.02**	**1.12**
20	**0.76**	**0.81**	**0.85**
25	**0.59**	**0.54**	**0.64**
30	**0.47**	**0.41**	**0.37**
35	**0.38**	**0.31**	**0.24**
40	**0.31**	**0.24**	**0.15**

45	**0.26**	**0.20**	**0.10**
50	**0.24**	**0.19**	**0.09**

الجدول(2) يمثل قيمة MSE عندما $\alpha = 0.05$

N	M-E	LAD	OBR
5	**0.44871**	**0.65118**	**0.84962**
10	**0.23698**	**0.29318**	**0.34391**
15	**0.12516**	**0.15077**	**0.19672**
20	**0.0755**	**0.08624**	**0.09593**
25	**0.04804**	**0.04206**	**0.05487**
30	**0.03491**	**0.02976**	**0.02676**
35	**0.02748**	**0.02281**	**0.01893**
40	**0.02281**	**0.01893**	**0.0149**
45	**0.01997**	**0.01702**	**0.01305**
50	**0.01893**	**0.01658**	**0.0127**

الجدول(3) يمثل تقدير لمعلمة التوزيع عندما $\alpha = 0.15$

N	M-E	LAD	OBR
5	**1.77**	**2.13**	**2.41**
10	**1.46**	**1.81**	**1.87**

15	**1.21**	**1.51**	**1.41**
20	**1.00**	**1.24**	**1.03**
25	**0.84**	**1.00**	**0.73**
30	**0.72**	**0.79**	**0.51**
35	**0.63**	**0.62**	**0.37**
40	**0.57**	**0.49**	**0.28**
45	**0.53**	**0.43**	**0.24**
50	**0.51**	**0.40**	**0.22**

الجدول(4) يمثل قيمة MSE عندما $\alpha = 0.15$

N	M-E	LAD	OBR
5	**0.64579**	**0.92564**	**1.2247**
10	**0.47366**	**0.67215**	**0.71371**
15	**0.36888**	**0.49794**	**0.45056**
20	**0.29901**	**0.38012**	**0.30812**
25	**0.2548**	**0.29901**	**0.22826**
30	**0.22599**	**0.24237**	**0.18318**
35	**0.20654**	**0.20448**	**0.15925**
40	**0.19451**	**0.17955**	**0.14554**
45	**0.18688**	**0.1691**	**0.13984**

50	**0.18318**	**0.1641**	**0.13707**

الجدول(5) يمثل تقدير لمعلمة التوزيع عندما $\alpha = 0.4$

N	M-E	LAD	OBR
5	**2.15**	**2.77**	**3.11**
10	**1.79**	**2.25**	**2.24**
15	**1.48**	**1.83**	**1.65**
20	**1.22**	**1.50**	**1.22**
25	**1.30**	**1.22**	**0.98**
30	**1.12**	**1.02**	**0.78**
35	**1.00**	**0.86**	**0.64**
40	**0.92**	**0.76**	**0.56**
45	**0.87**	**0.72**	**0.52**
50	**0.85**	**0.70**	**0.51**

الجدول(6) يمثل قيمة MSE عندما $\alpha = 0.4$

N	M-E	LAD	OBR
5	**0.71254**	**1.3245**	**1.8609**
10	**0.49712**	**0.78748**	**0.77965**
15	**0.36461**	**0.51741**	**0.43218**

20	**0.28114**	**0.37198**	**0.28114**
25	**0.30455**	**0.28114**	**0.22115**
30	**0.25438**	**0.23018**	**0.18106**
35	**0.22562**	**0.19614**	**0.15741**
40	**0.20827**	**0.17748**	**0.14531**
45	**0.19811**	**0.17052**	**0.13961**
50	**0.19419**	**0.16714**	**0.13822**

الجدول(7) يمثل تقدير لمعلمة التوزيع عندما$\alpha = 0.3$

N	M-E	LAD	OBR
5	**2.01**	**2.67**	**2.80**
10	**1.70**	**2.15**	**2.17**
15	**1.53**	**1.71**	**1.65**
20	**1.29**	**1.35**	**1.23**
25	**1.09**	**1.07**	**0.93**
30	**0.93**	**0.86**	**0.71**
35	**0.82**	**0.71**	**0.56**
40	**0.75**	**0.62**	**0.47**
45	**0.71**	**0.57**	**0.43**
50	**0.69**	**0.55**	**0.42**

الجدول(8) يمثل قيمة MSE عندما $\alpha = 0.3$

n	M-E	LAD	OBR
5	0.67916	1.314	1.4964
10	0.49813	0.78122	0.797
15	0.42025	0.50314	0.47384
20	0.33058	0.35103	0.31133
25	0.27066	0.2653	0.23064
30	0.23064	0.21505	0.18509
35	0.20662	0.18509	0.15931
40	0.19265	0.16916	0.1456
45	0.18509	0.16091	0.13989
50	0.18143	0.15773	0.1385

8- البيانات الحقيقية

وتمثل الأوقات التي انتهت فيها الحياة لعينة مكونة من 30 لفئران التجارب بعد حقنها بمستويات معينة من السموم المستخدمة في صناعة المبيدات حيث تمثل الأرقام عدد الساعات الفاصلة بين عملية الحقن حتى نهاية حياة فار التجارب.

الجدول(9) البيانات الحقيقة

29	25	50	18	5	8
27	13	1	21	19	15
15	7	15	12	39	14
18	36	15	14	39	6
7	21	15	14	70	44

لمعرفة التوزيع المناسب للبيانات الحقيقة استعمل اختبار كموكروف سميرونوف واختبار اكاكي، وكما موضح بالجدول إذناه:

الجدول(10) اختبار البيانات الحقيقة

Model	$K-S$	$P-value$	AIC
Parnav	0.0933	0.7978	398.6740

من خلال نتائج التحليل لمعرفة التوزيع المناسب للبيانات وكما موضحه في الجدول (3-10) لوحظ ان قيمة P-value اكبر من مستوى معنوية 0.05 وهذا يعني قبول الفرضية الصفرية القائلة بان البيانات تتوزع توزيع برناف Pranav، وهنا استعمل متوسط مربعات الخطاء بالصيغة

$$MSE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\hat{F_i} - \tilde{F_i})^2 \qquad \ldots \quad (21)$$

إذ ان

$\hat{F_i}$ تمثل قيمة الدالة التوزيعية التراكمية التقديرية

$\tilde{F_i}$ تمثل قيمة الدالة التوزيعية التراكمية التجريبية

الجدول(11) يمثل قيمة MSE ولجميع طرائق التقدير المقترحة للبيانات الحقيقية

Method	M-E	LAD	OBR
MSE	0.28545	0.26001	0.21929

9- النتائج والتوصيات

من خلال نتائج المحاكاة والبيانات الحقيقية، تبين أن تفوق مقدر OBR بشكل عمومي على المقدرات مع ملاحظة تفوق مقدر M الحصين عند احجام العينات الصغيرة و عمله بطريقة أفضل من المقدرات الأخرى , وفي حجوم العينات المتوسطة والكبيرة يلاحظ تفوق مقدر OBR على باقي المقدرات.

يوصي الباحثون باعتماد طريقة تقدير M الحصينة في حالة العينات الصغيرة لتقدير معلمة توزيع برناف و كذلك طريقة OBR لتقدبلر معلمة التوزيع في حالة حجوم العينات الكبيرة.

References

Aydın Demet, Akgül Fatma Gül and Şenoğlu Birdal Robust estimation of the location and the scale parameters of shifted Gompertz distribution [Journal]. - [s.l.] : Univ Studi Salento, 2018.

Banaś Marek A review of robust estimation methods applied in surveying [Journal] // Geomatics and Environmental Engineering. - 2012. - Vol. 6. - pp. 13–22.

Bowie David C. and Bradfield David J. Robust estimation of beta coefficients: Evidence from a small stock market [Journal] // Journal of Business Finance & Accounting. - [s.l.] : Wiley Online Library, 1998. - Vol. 25. - pp. 439–454.

Çakmak Berivan and Doğru Fatma Zehra Optimal B-robust estimators for the parameters of the power Lindley distribution [Journal] // Journal of Applied Statistics. - [s.l.] : Taylor & Francis, 2021. - Vol. 48. - pp. 2369–2388.

Hager Harold W., Bain Lee J. and Antle Charles E. Reliability estimation for the generalized gamma distribution and robustness of the Weibull model [Journal] // Technometrics. - [s.l.] : Taylor & Francis, 1971. - Vol. 13. - pp. 547–557.

Hassan Anwar, Wani Sameer Ahmad and Shafi Sumeera Pak. J. Statist. 2020 Vol. 36 (1), 57-72 POISSON-PRANAV DISTRIBUTION AND ITS APPLICATIONS [Journal] // Pak. J. Statist. - 2020. - Vol. 36. - pp. 57–72.

Johannesson Pär [et al.] A robustness approach to reliability [Journal] // Quality and Reliability Engineering International. - [s.l.] : Wiley Online Library, 2013. - Vol. 29. - pp. 17–32.

Rajagopalan V., Ganaie R. A. and Nair S. R. A New Extension of Two Parameter Pranav Distribution with Applications in Industrial and Medical Sciences [Journal] // Journal of Statistics Applications & Probability. - 2023. - Vol. 12. - pp. 231–246.

Shanker R. and Shukla K. K. Ishita distribution and its applications [Journal] // Biometrics & Biostatistics International Journal. - 2017. - Vol. 5. - pp. 1–9.

Shukla K. K. Pranav distribution with properties and its applications [Journal] // Biom Biostat Int J. - 2018. - Vol. 7. - pp. 244–254.

Shukla Kamlesh Kumar TRUNCATED PRANAV DISTRIBUTION: PROPERTIES AND APPLICATIONS [Journal] // Reliability: Theory & Applications. - [s.l.] : Интернет-сообщество Gnedenko Forum, 2023. - Vol. 18. - pp. 179–192.

Umeh Edith and Ibenegbu Amuche A Two-Parameter Pranav Distribution with Properties and Its Application. [Journal] // Journal of Biostatistics and Epidemiology. - 2019.

Victoria-Feser Maria-Pia and Ronchetti Elvezio Robust estimation for grouped data [Journal] // Journal of the American Statistical Association. - [s.l.] : Taylor & Francis, 1997. - Vol. 92. - pp. 333–340.

Yang Kai and Yang Guangbin Robust reliability design using environmental stress testing [Journal] // Quality and reliability engineering international. - [s.l.] : Wiley Online Library, 1998. - Vol. 14. - pp. 409–416.