AL KUT JOURNAL OF ECONOMIC AND ADMINISTRATIVE SCIENCES
Publisher: College of Economics and Management - Wasit University

تقدير معلمات توزيع دالة القوى لبيانات لعينة مراقبة مزدوجة من النوع الثاني مع تطبيق عملي على بيانات محولات الكهرباء

نور الصفى كاظم عبد[1] **ا.م. بيداء اسماعيل عبد الوهاب[2]**

جامعة بغداد/ كلية الادارة والاقتصاد/ قسم الاحصاء

الملخص

في هذا البحث تم الحصول على تقديرات انموذج ومعلمات توزيع دالة القوى ذي معلمتين لبيانات مزدوجة من النوع الثاني؛ وذلك باستعمال طريقة بيز عند تقريب لنيدلي في حالة دالة الخسارة الخطأ التربيعية (Self) من خلال التطبيق على بيانات حقيقة لمحولات الكهربائية لفرع مدينة الصدر ، ولقد اثبتت طريقة بيز عند تقريب لنيدلي في حالة دالة الخسارة الخطأ التربيعية (Self) كفاءتها أكثر من طريقة الامكان الاعظم من خلال المقارنة بينها باستعمال متوسط مربعات الخطأ وباسلوب المحاكاة ولستة احجام للعينات (10,15,20,50,100,150)

Abstract

In this research, estimates of the model and parameters of the two-parameter power distribution function for second-order double data were obtained using the Bayesian method with a Knedler approximation in the case of the squared loss function (Self). This was applied to real data of electrical transformers from the Al-Sadr district. The Bayesian method with the Knedler approximation in the case of the squared loss function (Self) proved to be more efficient than the maximum likelihood method. This was demonstrated through a comparison using the mean squared error and simulation for six sample sizes (10, 15, 20, 50, 100, and 150)

مفاتيح الكلمات : توزيع دالة القوى , بيانات مراقبة مزدوجة من النوع الثاني ,طريقة بيز , دالة الخسارة الخطأ التربيعية (self) ، تقريب لينلي ،طريقة الامكان الاعظم .

1- المقدمة

يُعتبر استعمال توزيع دالة القوى (PFD) من بين أكثر التوزيعات تنوعًا بفضل مرونته الاستثنائية. تُعد نمذجة البيانات ممارسة شائعة تستعمل لتحليل أنواع مختلفة من البيانات، خاصة عند دراسة الموثوقية والعمر المتوقع. في عام 1996 قام الباحثين (Miniconi, Barry) بتحليل توزيع دالة القوى PFD من خلال مقارنة البيانات المتعلقة بالوقت وتوزيع الدخل. لتقييم الاستقرار، يتم الاعتماد على نماذج توزيع متنوعة مثل التوزيع الأسي، والتوزيع اللوغاريتمي الطبيعي، وتوزيع وايبل. تواجه اختبارات الحياة تحديات، حيث قد لا يتمكن الباحث من الحصول على معلومات كاملة من وحدات التجربة، وذلك بسبب احتمال توقف الوحدات بشكل عشوائي[4]. واستعمال البيانات المزدوجة من النوع الثاني يعزز قوة التحليلات ويزيد من دقتها مما يساعد في اتخاذ قرارات مستندة الى بيانات موثوقة، ويعد توزيع دالة القوى وهو من التوزيعات الأساسية التي تُؤخذ في الاعتبار عند تقييم موثوقية المكونات الإلكترونية، وذلك بفضل بساطته وسهولة استعماله[5]. يُعد هذا التوزيع من الأدوات الرئيسية في تحليل بيانات أوقات الفشل للأجهزة والمعدات[1]. يتميز توزيع دالة القوى بمرونته، حيث يمكن اشتقاقه من توزيع باريتو باستعمال التحويل العكسي. ومن الناحية النظرية، يُعدُّ هذا التوزيع حالة خاصة من توزيع بيتا[6]. وان دالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f) لتوزيع دالة القوى تكون وفق الصيغة الآتية:

$$f(x,,a,b) = \frac{a}{b}\left(\frac{b}{X}\right)^{1-a} \quad \text{where } 0<x<b \;; a,b>0 \ldots..(1)$$

a : تمثل معلمة الشكل (Shape parameter).

b : تمثل معلمة القياس (scale parameter).

2 - البيانات المزدوجة من النوع الثاني [7]

Double Type -11Consored data

تُشير البيانات المستعملة في عينة مرتبة بحجم n الى انه يوجد عدد محدد من المشاهدات المفقودة في كلا الطرفين. بينما في النوع الأول من الإحصاء، يكون عدد المشاهدات المستشهد بها عشوائيًا، ويظل زمن الدراسة ثابتًا.

يظهر هذا النوع من البيانات في العديد من التطبيقات، خاصة في تحليل الموثوقية والدراسات الطبية الحيوية. وغالبًا ما يتم تسجيل عدد من القيم القصوى في العينة، سواء كانت أقل أو أعلى من مستوى معين، نتيجة لإهمال المراقبين غير ذوي الخبرة أو عوامل أخرى. لذا، قد يكون من المنطقي استبعاد هذه المشاهدات من مجموعة البيانات الأصلية.

تُعرف العينة المتبقية، التي تم فيها استبعاد القيم الدنيا والعليا، بالعينة ذات الاستقصاء المزدوج من النوع الثاني. وتعتمد معظم الدراسات في الأدبيات على بيانات من النوع الثاني ذات الإحصاء المضاعف من النموذج الأسي ثنائي المعامل.

في هذا البحث، يتم اشتقاق متغيرات mle لمعلمات توزيع دالة القوى عندما تكون البيانات من كلا الطرفين. عندما يكون لدينا حجم n من الوحدات الخاضعة للاختبار والمطلوب رقابة m من الوحدات حيث ان$m=s-r+1$, $r<s<n$, اي ان البيانات المراقبة هي $(Xr<\ldots\ldots\ldots\ldots<Xs)$، في هذه الحالة لا يمكن تحديد المتغير العشوائي في الوقت نفسه وبالتالي يتوقف او ينتهي الاختبار حتى يمكن الحصول على m من الوحدات الخاضعة للرقابة وعند وصولها الى s.

وان دالة الامكان الاعظم للبيانات المزدوجة من النوع الثاني هي :

$$L(a,b)=\frac{n!}{(r-1)!(n-s)!}(F(X_r))^{r-1}[1- F(X_r)]^{n-s}\prod_{i=r}^{s} f(X_i)\ldots\ldots\ldots(2)$$

3- تقدير المعلمات Estimate of parameters

لتقدير معلمات هذه دالة القوى في حالة بيانات المراقبة المزدوجة من النوع الثاني يوجد العديد من طرائق لتقدير معلمات توزيع دالة القوى ومنها:

3. 1- طريقة الامكان الاعظم [2] Maximum Likelihood Method

تعد هذه الطريقة من الأساليب التقليدية التي تحظى بأهمية كبيرة في عملية التقدير، وهي الأكثر استعمالا نظرًا لخصائصها الجيدة مثل الثبات، والالتصاق، والكفاءة. كما أنها تتميز بأقل تباين وعدم تحيز. تكون هذه الطريقة دقيقة بشكل خاص عندما يكون حجم العينة كبيرًا جدًا، لنفترض أنه تم اختبار n من العناصر المستقلة. وقد صاغ هذه الطريقة العالم(G.F.Gauss) ، بينما كان الباحث (S.A.Fisher) هو أول من قام بتطبيقها في عام 1922. سيتم استعمال هذه الطريقة على توزيع دالة القوى من خلال دالة الاحتمال الأقصى لبيانات المزدوجة من النوع الثاني وفقًا للصيغة التالية:

$$L(a,b)=\frac{n!}{(r-1)!(n-s)!}(F(X_r))^{r-1}[1- F(X_r)]^{n-s}\prod_{i=r}^{s} f(X_i)\ldots\ldots.(2)$$

بما ان دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع دالة القوى هي:

$$f(x)=\frac{a}{b}\left(\frac{b}{X}\right)^{1-a} \quad \text{where } 0<x<b \ ;a,b>0\ldots\ldots.(1)$$

ودالة التوزيع التراكمي لتوزيع دالة القوى تكون وفق الصيغة الآتية:

$$F(X)=\left(\frac{X}{b}\right)^{a}\ldots\ldots(3)$$

وبتويض دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع دالة القوى ودالة التراكمية في دالة الامكان الاعظم نحصل على المعادلة الآتية :

$$L(a,b)=\frac{n!}{(r-1)!(n-s)!}\left(\left(\frac{X_r}{b}\right)^{a}\right)^{r-1}[1- \left(\frac{X_s}{b}\right)^{a}]^{n-s}\ \left(\frac{a}{b}\right)^{s-r+1}(b^{s-r+1})^{1-a}\prod_{k=1}^{n} X_i^{a-1}$$

ونفرض $w=\frac{n!}{(r-1)!(n-s)!}$ نحصل على الاتي :

$$L(a,b)=w\left[\left(\left(\frac{X_r}{b}\right)^{a(r-1)}\right)[1 - \left(\frac{X_s}{b}\right)^{a}]^{n-s}\ \left(\frac{a}{b}\right)^{s-r+1}(b^{(s-r+1)(1-a)})\prod_{k=1}^{n} X_i^{a-1}\right]$$

وبالتبسيط الدالة الامكان الاعظم ومن ثمَّ،: $\left[\left(\frac{X_r{}^{a(r-1)}}{b^{a(r-1)}}\right)[1 - \left(\frac{X_s}{b}\right)^{a}]^{n-s}\ \left(\frac{a^{s-r+1}}{b^{s-r+1}}\right)(b^{(s-r+1)(1-a)})\prod_{k=1}^{n} X_i^{a-1}\right]$

$=w$

$$=w\left[\left(\frac{X_r{}^{a(r-1)}}{b^{a(r-1)}}\right)[1-\left(\frac{X_s}{b}\right)^a]^{n-s}\ \left(\frac{a^{s-r+1}}{b^{s-r+1}}\right)\left(b^{(s-r+1-as+ar-a}\right)\prod_{k=1}^{n}X_i^{a-1}\right]$$

$$=w\left[\left(\frac{X_r{}^{a(r-1)}}{b^{a(r-1)}}\right)[1-\left(\frac{X_s}{b}\right)^a]^{n-s}\ \left(\frac{a^{s-r+1}}{b^{s-r+1}}\right)\left(b^{(s-r+1)}\ b^{-as+ar-a}\right)\prod_{k=1}^{n}X_i^{a-1}\right]$$

$$=w\left[\left(\frac{X_r{}^{a(r-1)}}{b^{a(r-1)}}\right)[1-\left(\frac{X_s}{b}\right)^a]^{n-s}\ a^{s-r+1}\left(\ b^{-as+a(r-1)}\right)\prod_{k=1}^{n}X_i^{a-1}\right]$$

$$=w\left[\left(\frac{X_r{}^{a(r-1)}}{b^{a(r-1)}}\right)[1-\left(\frac{X_s}{b}\right)^a]^{n-s}\ a^{s-r+1}\left(\ b^{-as}b^{a(r-1)}\right)\prod_{k=1}^{n}X_i^{a-1}\right]$$

$$=w\left[\left(X_r{}^{a(r-1)}\right)[1-\left(\frac{X_s}{b}\right)^a]^{n-s}\ a^{s-r+1}\left(\ b^{-as}\right)\prod_{k=1}^{n}X_i^{a-1}\right]$$

$$=w\left[\left(X_r{}^{a(r-1)}\right)[1-\left(\frac{X_s}{b}\right)^a]^{n-s}\ a^{s-r+1}\left(\ b^{-as}\right)\prod_{k=1}^{n}X_i^{a-1}\right]\ \ldots(4)$$

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي المعادلة (4) نحصل على :

$$Log(L(a,b))=\ log(w)+\log\left(X_r{}^{a(r-1)}\right)+\log[1-\left(\frac{X_s}{b}\right)^a]^{n-s}+\log(a)^{s-r+1}\log(\ b^{-as})+\log\prod_{k=1}^{n}X_i^{a-1})\ldots(5)$$

لايجاد تقدير المعلمات توزيع دالة القوى بطريقة m.l.eنشتق المعادلة (5) بالنسبة لكل معلمة من معلمات التوزيع ومن ثم مساواتها للصفر وبعدها تحل اما بالطريقة العددية او التحليلية

$$\frac{\partial Log(L(a,b))}{\partial a}=(r-1)\log\left(X_r\right)+\frac{(n-s)\log(\frac{X_s}{b})\ (\frac{X_s}{b})^a}{[1-(\frac{X_s}{b})^a]}+\frac{(\ s-r+1)}{a}-(s)\log(\ b)+\sum_{i=0}^{n}\log(X_i)\ldots\ldots..(6)$$

ونفرض S1=s-r+1 نحصل على الاتي:

$$\frac{\boldsymbol{\partial Log(L(a,b))}}{\boldsymbol{\partial a}}=(\boldsymbol{r-1})\boldsymbol{log}\ (\boldsymbol{X_r})+\frac{(\boldsymbol{n-s})\boldsymbol{log}(\frac{\boldsymbol{X_s}}{\boldsymbol{b}})\ (\frac{\boldsymbol{X_s}}{\boldsymbol{b}})^{\boldsymbol{a}}}{[\boldsymbol{1}-(\frac{\boldsymbol{X_s}}{\boldsymbol{b}})^{\boldsymbol{a}}]}+\frac{\boldsymbol{S1}}{\boldsymbol{a}}-(\boldsymbol{s})\boldsymbol{log}(\ \boldsymbol{b})+\sum_{\boldsymbol{i=0}}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{log}(\boldsymbol{X_i})$$

$$\frac{s1}{a}+\frac{(n-s)log(\frac{X_s}{b})\ (\frac{X_s}{b})^a}{[1-(\frac{X_s}{b})^a]}=(s)log(\ b)-(r-1)log\ (X_r)-\sum_{i=0}^{n}logX_i\ldots\ldots\ldots..(7)$$

حل المعادلة (7) بإحدى الطرائق التكرارية مثل طريقة نيوتن رافسن او اي طريقة تكرارية مناسبة نستخرج قيمة $\hat{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{mle}}$

اما المقدر b بطريقة الامكان الاعظم نحصل عليه كالاتي :

$\because\ 0<x<b$

$$\hat{b}_{mle} = x_s \quad \text{.....(8)}$$

2.3- طريقة بيز [2] [3] Bayesian Method

أسلوب بيز (Concept of Bayes) هو طريقة إحصائية تُنسب إلى العالم توماس بيز (Thomas Bayes). تستعمل هذه الطريقة لتقدير المعلمات غير المعروفة في التوزيع الاحتمالي، حيث يتم الاعتماد على معلومات أولية تُعبر عنها في شكل توزيع احتمالي يُعرف بدالة الكثافة الاحتمالية الأولية (Prior probability function). غالبًا ما يكون هذا التوزيع غير ملائم، مما يعني أن تكامله لا يساوي صفرًا. تعتمد هذه الطريقة أيضًا على المعلومات الحالية، والتي تُعرف بدالة الاحتمالات (Likelihood function) الخاصة بالمشاهدات. يتم دمج دالة التوزيع الأولية مع المعلومات الحالية، المتمثلة بدالة الاحتمالات العظمى، للحصول على التوزيع اللاحق (Posterior probability function).

تتضمن خطوات أسلوب بيز استعمال الأدوات المذكورة، مثل التوزيع الأولي ودالة الاحتمالات الامكان الاعظم والتوزيع اللاحق ودالة الخسارة. تستعمل جميع هذه الأدوات لتقدير معلمات توزيع دالة القوى. للحصول على قيمة المقدر، يتم الاعتماد على التوزيع اللاحق، الذي يُعتبر أحد الركائز الأساسية لهذه الطريقة. وايضا يتم اللجوء الى الدوال الخسارة منها التربيعية.

سوف يتم اختيار توزيع كاما كتوزيع سابق وذلك لمرونته المترافقه وسهولة التقدير لذلك فإن دالة الكثافة الاحتمالية السابقة (الأولية) Prior probability function هي :

$$g_1(a) = \frac{d^c}{\Gamma c} a^{c-1} e^{-dc} \text{.....(9)}$$

$$g_2(b) = \frac{p^f}{\Gamma f} b^{f-1} e^{-pb} \text{.....(10)}$$

- التوزيع السابق المشترك *(The joint prior distribution)* يتم الحصول عليه وذلك من خلال عملية الضرب بين التوزيعات السابقة اعلاه للمعلمات a,b المتمثلة بالصيغة (9) مع (10)

$$G(a,b) = g_1(a) * g_2(b)$$

$$= \frac{d^c}{\Gamma c} a^{c-1} e^{-dc} * \frac{p^f}{\Gamma f} b^{f-1} e^{-pb}$$

لتكن $\frac{1}{k} = \frac{d^c}{\Gamma c} * \frac{p^f}{\Gamma f}$ نحصل على الاتي :

$$G(a,b) = \frac{1}{k} a^{c-1} b^{f-1} e^{-(da+pb)} \quad \text{.....(11)}$$

وان دالة الكثافة الاحتمالية اللاحقة posterior p.d.f

$$\prod(a,b) = G(a,b) * L(a,b)$$

$$=\frac{1}{k}\boldsymbol{a^{c-1}b^{f-1}e^{-(da+pb)}}*\boldsymbol{w}\,(\boldsymbol{X_r}^{a(r-1)})[1-(\frac{X_s}{b})^{a}]^{n-s}\;\;\boldsymbol{a^{s-r+1}}(\boldsymbol{b^{-as}})\prod_{k=1}^{n}\boldsymbol{X_i^{a-1}}\ldots(12)$$

حيث ان

$$X^{a(r-1)}=\log X^{a(r-1)}=\mathrm{a(r\text{-}1)log\ x}=e^{\,\mathrm{a(r-1)log\,x}}$$

$$\prod X^{a-1}=(a-1)\sum\log X_I=e^{(a-1)\sum\log X_i}$$

وعند التعويض اعلاه في دالة التوزيع اللاحق المشترك (2-21) نحصل على الاتي:

$$=\frac{1}{k}a^{(c+s-r+1)-1}b^{(f-as)-1}e^{-(da+pb)}e^{\,\mathrm{a(r-1)log\,xi}}[1-(\frac{X_s}{b})^{a}]^{n-s}\;e^{(a-1)\sum\log X_I}$$

$$=\frac{1}{k}a^{(c+s-r+1)-1}b^{(f-as)-1}e^{-(da+pb)}e^{\,\mathrm{a(r-1)log\,xi}}[1-(\frac{X_s}{b})^{a}]^{n-s}\;e^{a\sum\log X_I}\,e^{-\sum\log X_I}$$

نفرض $y=\sum\log X_I$ نحصل على الاتي :

$$=\frac{1}{k}a^{(c+s-r+1)-1}b^{(f-as)-1}e^{-(da+pb)}e^{\,\mathrm{a(r-1)log\,x}i}\;\;[1-(\frac{X_s}{b})^{a}]^{n-s}\;e^{ay}\;e^{-y}$$

$$=\frac{1}{k}a^{(c+s-r+1)-1}b^{(f-as)-1}e^{-pb}e^{-da}e^{\,\mathrm{a(r-1)log\,x}i}\;\;[1-(\frac{X_s}{b})^{a}]^{n-s}\;e^{ay}\;e^{-y}$$

فأن دالة التوزيع اللاحق المشترك لتوزيع دالة القوى يكون ومن ثمَّ، :

$$\boldsymbol{\Pi(a,b)=\frac{1}{k}a^{(c+s-r+1)-1}b^{(f-as)-1}e^{-pb}e^{-a(d-(r-1)logXi-y)}\;\;[1-(\frac{X_s}{b})^{a}]^{n-s}\;\;e^{-y}..(13)}$$

حيث ان k هو ثابت

$$k^{-1}=\int_0^{\infty}\!\!\int a^{(c+s-r+1)-1}b^{(f-as)-1}e^{-pb}e^{-a(d-(r-1)logXi-y)}[1-(\frac{X_s}{b})^{a}]^{n-s}\;e^{-y}\,dadb$$

أسلوب بيز يتطلب ايضا وجود دوال الخسارة يمكن الحصول على مقدر بيز من خلال تصغير دالة توزيع الاحق

ـ دالة الخسارة الخطأ التربيعي [1] *Squared error loss function (self)*

هي أبسط وأشهر أنواع دالة الخسارة وهي دالة خسارة متماثلة تعطي وزنا متساويا للأخطاء السالبة والأخطاء الموجبة ومن خصائصها أن المقدر البايزي لأي معلمة تحت دالة الخسارة التربيعية هو التوقع اللاحق لهذه المعلمة.

$$\mathrm{Self}=(\mathrm{H}-\widehat{\mathrm{H}})^{2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(14)$$

وباستعمال دالة الخسارة (الخطأ التربيعي) نحصل على مقدر بيز لدالة توزيع القوى كما ياتي :

$$\hat{\theta}self = \left[\frac{\int_0^\infty \int_0^\infty \theta \prod(a,b)\, dadb}{\int_0^\infty \int_0^\infty \prod(a,b)\, dadb} \right]$$

$$\widehat{\Theta}self = [\frac{\int_0^\infty \int_0^\infty \theta \frac{1}{k} a^{(c+s-r+1)-1} b^{(f-as)-1} e^{-pb} e^{-a(d-(r-1)logXi-y)} [1-(\frac{X_s}{b})^a]^{n-s} e^{ay} e^{-y} dadb}{\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{k} a^{(c+s-r+1)-1} b^{(f-as)-1} e^{-pb} e^{-a(d-(r-1)logXi-y)} [1-(\frac{X_s}{b})^a]^{n-s} e^{ay} e^{-y} dadb}]$$

نستخدم هنا طريقة تقريب ليندلي لحل التكاملات المعقدة المذكورة أعلاه بهدف الحصول على تقديرات بيز لدالة توزيع القوى في سياق دالة الخسارة الخطأ التربيعية.

3.3- تقريب ليندلي [8][9] *Lindley Approximation*

بما أنه لا يمكن اشتقاق مقدر بيز مغلق الشكل من التوزيع اللاحق الوارد في المعادلات اعلاه فإننا نستخدم تقريب ليندلي للحصول على تقديرات بيز تقريبية لمعلمات توزيع دالة القوى . تم استعمال هذا التقريب بشكل متكرر لتقدير معاملات نماذج وقت الفشل بشكل تقريبي، ومع ذلك، فإن استعمال هذا التقريب لتقدير النماذج الهجينة ليس شائعًا في الأدبيات. تعد تقنيات ليندلي التي توفر قيمة عددية واحد للنسبة التقريبية للتكاملات لتقدير بيز للمعلمات a,b ،فإن نسبة تكامل النموذج هي :

$$\mathrm{I(x)} = \frac{\int \Delta(a,b)\, e^{G(a,b)+\mathrm{L(a,b)}} d(a,b)}{\int e^{G(a,b)+\mathrm{L(a,b)}} d(a,b)}$$

يمكننا تقريب نسبة التكامل ومن ثمَّ،

$$\mathrm{I(X)} \approx \Delta(a,b) + \frac{1}{2}[(\Delta_{bb} + 2\Delta_b\gamma_b)\Psi_{bb} + (\Delta_{ab} + 2\Delta_a\gamma_b)\Psi_{ab} + (\Delta_{ba} + 2\Delta_b\gamma_a)\Psi_{ba} + (\Delta_{aa} + 2\Delta_a\gamma_a)\Psi_{aa} + \frac{1}{2}[(\Delta_b\Psi_{bb} + \Delta_a\Psi_{ba})\theta_1 + (\Delta_b\Psi_{ab} + \Delta_a\Psi_{aa})\theta_2]$$

حيث ان :

- $\Theta_1 = L_{bbb}\Psi_{bb} + L_{bab}\Psi_{ba} + L_{abb}\Psi_{ab} + L_{aab}\Psi_{aa}$

- $\Theta_2 = L_{abb}\Psi_{bb} + L_{baa}\Psi_{ba} + L_{aba}\Psi_{ab} + L_{aaa}\Psi_{aa}$

$$\Psi_{ij} = -\frac{1}{L_{ij}}$$

$$L_{bb} = \frac{\boldsymbol{\partial^2 \mathrm{Log(L(a,b))}}}{\boldsymbol{\partial b^2}}, L_{bbb} = \frac{\boldsymbol{\partial^3 \mathrm{Log(L(a,b))}}}{\boldsymbol{\partial b^3}}, L_b = \frac{\boldsymbol{\partial \mathrm{Log(L(a,b))}}}{\boldsymbol{\partial b}}, L_{aba} = \frac{d^{\,3}\log(L(a,b))}{\partial a\, \partial b\, \partial a},$$

$$L_a = \frac{\boldsymbol{\partial \mathrm{Log(L(a,b))}}}{\boldsymbol{\partial a}}, L_{aaa} = \frac{\boldsymbol{\partial^3 \mathrm{Log(L(a,b))}}}{\boldsymbol{\partial a^3}}, L_{aa} = \frac{\boldsymbol{\partial^2 \mathrm{Log(L(a,b))}}}{\boldsymbol{\partial a^2}}, \mathrm{L_{bab}} = \frac{\mathrm{d}^{\,3}\log(\mathrm{L(a,b)})}{\partial \mathrm{b}\, \partial \mathrm{a}\, \partial \mathrm{b}}$$

$$L_{abb} = \frac{d^{\,3}\log(L(a,b))}{\partial a\,\partial b\,\partial b}, L_{baa} = \frac{d^{\,3}\log(L(a,b))}{\partial b\,\partial a\,\partial a} \quad ,$$

$$\Delta_b = \frac{\partial \Delta(a,b)}{\partial b}, \qquad \Delta_a = \frac{\partial \Delta(a,b)}{\partial a}, \Delta_{aa} = \frac{\partial \Delta(a,b)}{\partial a^2} \quad , \qquad \Delta_{bb} = \frac{\partial \Delta(a,b)}{\partial b^2}$$

$$\Delta_{aa} = \frac{\partial \Delta(a,b)}{\partial a^2} \ , \ \Delta_{bb} = \frac{\partial \Delta(a,b)}{\partial b^2} \Delta_{ab} = \frac{\partial \Delta(a,b)}{\partial a\,\partial b} \ , \Delta_{ba} = \frac{\partial \Delta(a,b)}{\partial b\,\partial a},$$

$$\Delta_{ab} = \frac{\partial \Delta(a,b)}{\partial a\,\partial b} \ , \Delta_{ba} = \frac{\partial \Delta(a,b)}{\partial b\,\partial a}, \gamma_b = \frac{dG(a,b)}{db}, \gamma_a = \frac{\partial G(a,b)}{\partial a}$$

للحصول على المقدر بيز b لتوزيع دالة القوى في ظل دالة الخسارة الخطأ التربيعية ومن ثمَّ، :

$\Delta(a,b)=b \ , \Delta_b=1 \ , \Delta_{aa}=\Delta_{bb}=\Delta_{ba}=\Delta_{ab}=0$

$$\hat{b}\text{SELF} = b + \frac{1}{2}[(0 + 2(1)\Gamma_b)\Psi_{bb} + (0 + 2(0)\gamma_b)\Psi_{ab} + (0 + 2(1)\gamma_a)\Psi_{ba} + (0 + 2(0)\gamma_a)\Psi_{aa} + \frac{1}{2}[((1)\Psi_{bb} + (0)\Psi_{ba})\theta_1 + ((1)\Psi_{ab} + (0)\Psi_{aa})\theta_2]$$

$$\hat{b}\text{self} = b + \frac{1}{2}[(2\gamma_b)\Psi_{bb} + (2\gamma_a)\Psi_{ba}] + + \frac{1}{2}[\ \Psi_{bb}\theta_1 + \ \Psi_{ab}\ \theta_2]$$

$$\hat{b}\text{self} = b + [\gamma_b\Psi_{bb} + \gamma_a\Psi_{ba}] + + \frac{1}{2}[\ \Psi_{bb}\theta_1 + \ \Psi_{ab}\ \theta_2]$$

للحصول على المقدر بيز a لتوزيع دالة القوى في ظل دالة الخسارة الخطأ التربيعية ومن ثمَّ، :

$\Delta(a,b)=a \ , \Delta_a=1 \ , \Delta_{aa}=\Delta_{bb}=\Delta_{ba}=\Delta_{ab}=0$

$$\hat{a}\text{self} = a + \frac{1}{2}[(0 + 2(0)\gamma_b)\Psi_{bb} + (0 + 2(1)\gamma_b)\Psi_{ab} + (0 + 2(0)\gamma_a)\Psi_{ba} + (0 + 2(1)\gamma_a)\Psi_{aa} + \frac{1}{2}[((0)\Psi_{bb} + (1)\Psi_{ba})\theta_1 + ((0)\Psi_{ab} + (1)\Psi_{aa})\theta_2]$$

$$\hat{a}\text{self} = a + \frac{1}{2}[2\gamma_b\Psi_{ab} + 2\gamma_a\ \Psi_{aa}] + \frac{1}{2}[\Psi_{ba}\theta_1 + \Psi_{aa}\theta_2]$$

$$\hat{a}\text{self} = a + [\gamma_b\Psi_{ab} + \gamma_a\ \Psi_{aa}] + \frac{1}{2}[\Psi_{ba}\theta_1 + \Psi_{aa}\theta_2]$$

4- المحاكاة

في هذا المرحلة سيتم المقارنة الطرائق المستعملة في هذه البحث وحسب المراحل الآتية :

1- تحديد حجم العينة n حيث تم اختيار ستة احجام للعينات وهي (n=10,15,20,50,100,150) , ولغراض اجراء مراقبة مزدوجة من النوع الثاني على العينات تم تحديد قيم r وهي (r=4,10,20) وحسب حجم كل عينة وكذلك تحديد قيم s وهي (s= 8,10,13,17,40,60,80,140) يكونان ثابتين في التجربة الواحدة لكنهما يتغيران من تجربة الى اخرى , جدول رقم (1) يوضح ماجاء في اعلاه .

جدول (1) يبين احجام العينات وقيم (r,s)

n	10	15	20	50	100	150
r	4			10,20		
s	8,10,13,17			40,60,80,140		

2- اختيار قيم افتراضية لمعلمتي الشكل (a) ومعلمة القياس (b) معلمات توزيع دالة القوى , وفرض قيمة الثابت (q=2) ثابت دوال الخسارة المستعملة في طريقة البيزية وكما في الجدول (2-3) الاتي :

جدول (2) يبين القيم الافتراضية للمعلمات للتجارب المقترحة

التجارب	1
a	1
b	2.5

يتم تكرار تجارب المحاكاة (R=1000) مرة لأنها كانت الافضل ولكل تجربة تمت البرمجة في الماتلاب .

3- نقوم بتوليد بيانات تتبع توزيع دالة القوى وذلك من خلال معكوس دالة التراكمية وكالاتي:

$$X= b\, u^{\frac{1}{a}}$$

ان صيغة توليد البيانات اعلاه تتبع توزيع دالة القوى ذي المعلمات (a,b) وعلي هذا الاساس يتم تطبيق بيانات المراقبة المزدوجة من النوع الثاني وفقا لقيم (r,s) وحسب احجام العينات .

4- استعمال المقياس الاحصائي متوسط مربعات الخطأ (MSE) للانموذج ولمعلمات توزيع دالة القوى ومن ثمَّ، :

i- متوسط مربعات الخطأ لمعلمات التوزيع دالة القوى وفق الصيغة الآتية:

$$MSE(\hat{\theta}) = \frac{\sum_{i=1}^{r}(\hat{\theta}-\theta)^2}{R}$$

ii- متوسط مربعات الخطأ للأنموذج التوزيع دالة القوى وفق الصيغة استعمال :

$$MSE(\hat{y}) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}-y)^2/n}{R}$$

تبين الجداول ادناه تقديرات المعلمات كالآتي :

جدول رقم (3) متوسط مربعات الخطأ (MSE) لمعلمات توزيع دالة القوى ولكل الطرائق عندما (a=1 , b=2.5)

n	R	s	Mle		Bias		The best	
			mse(a^mle)	mse(b^mle)	Lindley			
					mse(a^self)	b^self))mse	a^	b^
10	4	8	2.50E-05	0.000562	1.10E-05	3.39E-05	self	self
15	4	8	1.67E-05	0.000376	7.38E-06	2.56E-05	self	self
		10	1.67E-05	0.000377	4.63E-06	1.33E-05	self	self
		13	1.67E-05	0.000376	2.55E-06	7.25E-06	self	self
20	4	8	1.25E-05	0.000282	5.20E-06	2.85E-05	self	self
		10	1.25E-05	0.000282	3.38E-06	1.21E-05	self	self
		13	1.25E-05	0.000283	1.99E-06	5.45E-06	self	self
		17	1.25E-05	0.000282	1.10E-06	2.92E-06	self	self

جدول رقم (4) متوسط مربعات الخطأ (MSE) لمعلمات توزيع دالة القوى ولكل الطرائق عندما (a=1 , b=2.5)

n	r	s	Mle		Bias		The best	
			mse(a^mle)	mse(b^mle)	Lindley			
					mse(a^self)	b^self))mse	a^	b^
50	10	40	5.00E-06	0.000113	8.38E-08	1.79E-07	self	Self
100	10	40	2.50E-06	5.65E-05	4.00E-08	1.73E-07	self	Self
		60	2.50E-06	5.65E-05	1.80E-08	4.26E-08	self	Self
		80	2.50E-06	5.63E-05	9.80E-09	2.14E-08	self	Self

150	**10**	**40**	**1.67E-06**	**3.75E-05**	**2.35E-08**	**6.05E-07**	self	Self
		60	**1.67E-06**	**3.76E-05**	**1.13E-08**	**5.25E-08**	self	Self
		80	**1.67E-06**	**3.76E-05**	**6.55E-09**	**1.79E-08**	self	Self
		140	**1.67E-06**	**3.77E-05**	**2.03E-09**	**4.59E-09**	self	Self

جدول رقم (5) متوسط مربعات الخطأ (MSE) لمعلمات توزيع دالة القوى ولكل الطرائق عندما (a=1 , b=2.5)

n	R	s	Mle		Bias		The best	
			mse(aˆmle)	mse(bˆmle)	Lindley			
					mse(aˆself)	bˆself))mse	aˆ	bˆ
50	**20**	**40**	**5.00E-06**	**0.000113**	**1.05E-07**	**1.73E-07**	self	self
100	**20**	**40**	**2.50E-06**	**5.65E-05**	**4.81E-08**	**1.68E-07**	self	self
		60	**2.50E-06**	**5.65E-05**	**2.03E-08**	**4.16E-08**	self	self
		80	**2.50E-06**	**5.63E-05**	**1.06E-08**	**2.12E-08**	self	self
150	**20**	**40**	**1.67E-06**	**3.75E-05**	**2.67E-08**	**6.04E-07**	self	self
		60	**1.67E-06**	**3.76E-05**	**1.25E-08**	**5.18E-08**	self	self
		80	**1.67E-06**	**3.76E-05**	**7.06E-09**	**1.76E-08**	self	self
		140	**1.67E-06**	**3.77E-05**	**2.11E-09**	**4.58E-09**	self	self

جدول رقم (6) متوسط مربعات الخطأ (MSE) للأنموذج ولكل الطرائق عندما (a=1 , b=2.5)

50		**2**		4		0.0092	**mse(S**	E+0	**mse(ml**	self	**The Be**
100				4		0.0088	**0.01**	E+0	**8.82E+0**	Self	**self**
		2		6		0.0085	**0.01**	E+0	**3.02E+0**	Self	**self**
				8		0.0082	**0.01**	E+0	**2.90E+0**	Self	**self**
150		**2**		4		0.0081	**0.01**	E+0	**2.35E+0**	Self	**self**
							0.011		**3.23E+0**		**self**
							0.011		**9.68E+0**		**self**
							0.011		**1.07E+0**		**self**
							0.010		**1.43E+0**		**self**
					1		**0.009**		**1.11E+0**		**self**
							0.008		**3.39E+0**		**self**
				0			**0.008**		**5.24E+0**		**self**
							0.008		**2.71E+0**		**self**
							0.008		**3.19E+0**		**self**
					1		**0.008**		**2.25E+0**		**self**
							0.008		**2.17E+0**		**self**
							0.007		**6.46E+0**		**self**

Self	2.25E+0	0.0083	6		
Self	2.17E+0	0.0082	8		
Self	6.46E+0	0.0079	1		

تحليل النتائج: تم التوصل الى

- إن متوسط مربعات الخطأ لمعلمات والانموذج يتناقص بزيادة حجم العينة وللطرائق التقديرية كافة.
- إن طريقة بيز عند تقريب لنيدلي في حالة دالة الخسارة الخطأ التربيعية (Self) تعد هي الافضل بالنسبة لكافة الحجوم العينات؛ لأنها تمتلك أقل (mse) بالنسبة للمعلمات وللأنموذج.

5-بيانات التجربة [10]

تعدُّ محولات الطاقة من العناصر الأساسية في شبكة الطاقة، حيث تتميز بتنوعها في الأحجام والأشكال والوظائف. تستعمل محولات الطاقة بشكل واسع في أنظمة الطاقة نظرًا لأهميتها ودورها الحيوي في الدوائر الكهربائية. كان الكيميائي البريطاني مايكل فاراداي هو أول من اكتشف ظاهرة الحث المتبادل بين ملفين مستقلين موضوعين على قلب مغناطيسي، حيث بدأ في تجاربه بقياس القوة الدافعة الكهربائية الناتجة عن تغير التيار في أحد الملفين. ظهرت المحولات لأول مرة في عام 1882، وكانت تتكون من ملف أولي ولفائف ثانوية متعددة للحصول على قيم جهد مختلفة. وفي عام 1884، بدأت المحولات ذات النواة المغناطيسية في الظهور، مما أتاح استعمالها في تحويل الطاقة الكهربائية لزيادة الجهد ونقلها لمسافات طويلة. تتكون المحول الكهربائي من أجزاء عدة، منها: القلب الحديدي يكون دائرة مغناطيسية. والملفات تكون الدارة الكهربائية في المحولات. ويكون عمل المحول الكهربائي يكون على مبدأ الحث الكهرومغناطيسي الذي ينص على أن قيمة القوة الدافعة تتناسب طردياً مع معدل تغير التدفق المغناطيسي، ولذلك لا يمكن استعمال المحول في أنظمة التيار المستمر؛ لأنه ينتج مجال مغناطيسي ثابت المقدار تغيره يساوي صفراً. حيث صنفت المحولات الكهربائية من حيث استعمالها إلى نوعين رئيسين وهما: المحولات الكهربائية الرافعة والمحولات الكهربائية الخافضة. وتتعرض المحولات لأعطال عديدة ولتحديد اعطالها بكفاءة وتنقسم اعطال المحولات الكهربائية الى قسمين هما: الأعطال الكلية والأعطال الجزئية.

ولقد أُخذت عينة البحث عن طريق شعبة فحص والصيانة المحولات وبحجم (158) مشاهدة عن محولات الكهربائية لفرع مدينة الصدر في وزارة الكهرباء / الشركة العامة لتوزيع الكهرباء في بغداد وان البيانات تمثل وقت فشل المحولة.

إن المدة الزمنية التي حسبت لهذا البيانات تتمثل بشهر ايار لسنة 2024. واختبرت البيانات عن طريق تطبيق اختبار كولموكوروف – سميرنوف (Kolmogorov- Smirnov Test) ، فأن القيمة المحسوبة للاختبار $(D_n = 0.0616)$ اما القيمة الجدولية (0.108) عند مستوى معنوية $(\alpha = 0.05)$ بما ان القيمة المحسوبة D_n اصغر من الجدولية يعني قبول فرضية العدم (H_0) أي أن التوزيع دالة القوى يتبع التوزيع الطبيعي .

يبن الجدول (7) ادناه قيم معلمات التقدير للطرائق المستعملة بالرسالة

	$\widehat{mle}$	$\widehat{self}$
a	1.5000	0.9347
b	1.8333	2.4248

بما أن نتائج المحاكاة قد تبين طريقة بيز عند تقريب لندلي (Lindley) في حالة دالة الخسارة الخطأ التربيعي (Self) هي الأفضل؛ لأنها تمتلك أقل متوسط مربعات الخطأ لذلك تفوقت على طريقة الامكان الاعظم لذلك سوف يتم اعتماد على نتائج هذه الطريقة، وبذلك تكون قيم التقديرية للمعلمات توزيع دالة القوى $b=2.4248,a=0.9347$.

6- الاستنتاجات

بناءً على ماجاء في البحث فقد تم التوصل الى الاستنتاجات الآتية:

1- اثبتت طريقة بيز عند تقريب لنيدلي في حالة دالة الخسارة الخطأ التربيعية (Self) كفاءتها في تقدير معلمات توزيع دالة القوى مع طرائق التقدير الاخرى عند حساب متوسط مربعات الخطأ (MSE) للمعلمات وللأنموذج.
2- ان قيم متوسط مربعات الخطأ (MSE) للمعلمات توزيع دالة الثوى وللأنموذج تتناقص بزيادة حجم العينة.
3- استعمال دوال خسارة اخرى وتطويرها والمقارنة مع دالة الخسارة الخطأ التربيعي لتوزيع دالة القوى (Power Function) ذي معلمتين لبيانات المراقبة المزدوجة من النوع الثاني.
4- عدم استعمال طريقة الامكان الاعظم كونها سجات كسوء طريقة للتقدي؛ لأنها اعطت (mse) اعلى بكثير من طريقة بيز عند تقريب لنيدلي في حالة دالة الخسارة الخطأ التربيعية (Self).
5- يمكن لشعبة فحص وصيانة المحولات/ الشركة العامة لتوزيع كهرباء بغداد / وزارة الكهرباء اعتماد مخططات المراقبة المزدوجة من النوع الثاني لتطوير ورفع الكفاءة المحولات الكهربائية.
6- زيادة حجم البيانات، يمكن أن توفر طريقة بايز أدوات فعالة لتقدير النماذج ومعالجة عدم اليقين في التوقعات.
7- إتقان أدوات برمجية متخصصة مثل R أو Python لإجراء التحليل، بشكل أكثر دقة.

المصادر

1 - ناصر ، ليلى مطر ،(2015)."التقدير البيزي لدالة المعولية لتوزيع دالة القوى تحت دوال الخسارة مختلفة "،مجلة كلية بغداد للعلوم الاقتصادية الجامعة ،العدد٤٦ ، ص ١٩٥-٢١٠

2- العبادي ، كرم ناصر حسين ، (٢٠٢١)م "التقدير البيزي لدالة البقاء لتوزيع ليندلي ذو ثلاث معلمات مع تطبيق عملي "رسالة ماجستير، كلية الادارة والاقتصاد-جامعة كربلاء

3-عبد علي ، احمد تركي ، (٢٠١٩) " استعمال اسلوب بيز والبرمجة الهدفية في تقدير معالم الانحدار " رسالة ماجستير، كلية الادارة والاقتصاد-جامعة كربلاء

4-Naveed-Shahzad, M., Asghar, Z., Shehzad, F., & Shahzadi, M. (2015). Parameter estimation of power function distribution with TL-moments. Revista Colombiana de Estadistica, 38(2), 321–334.

5-Meniconi, M., & Barry, D. M. (1996). THE POWER FUNCTION DISTRIBUTION: A USEFUL AND SIMPLE DISTRIBUTION TO ASSESS ELECTRICAL COMPONENT RELIABILITY. In Microelectron. Reliab (Vol. 36, Issue 9.(

6-Kumar, D., Kumar, M., & Joorel, J. P. S. (2022). Estimation with Modified Power Function Distribution Based on Order Statistics with Application to Evaporation Data. .Annals of Data Science, 9(4), 723–748

7-AbdAwon, H. M., & Karam, N. S. (2023). Doubly Type II Censoring of Two Stress-Strength System Reliability Estimation for Generalized Exponential-Poisson Distribution. *Iraqi Journal of Science*, *64*(4), 1869–1880.

8-Feroze, N., & Aslam, M. (2019). Approximate Bayesian analysis of doubly censored samples from mixture of two Weibull distributions. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, *48*(11), 2862–2878.

9-Pandey, R., & Kumari, N. (2018). Bayesian Analysis of Power Generalized Weibull Distribution. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, *4*(6).

10- https://www.voltiat.com/search-for-electrical-transformers