AL KUT JOURNAL OF ECONOMIC AND ADMINISTRATIVE SCIENCES
Publisher: College of Economics and Management - Wasit University

مقارنة لبعض طرائق تقدير دالة الخطورة لتوزيع بواسون-شانكير باستخدام محاكاة

Comparison of Some Methods for Estimating the Hazard Function for the Poisson-Shanker Distribution Simulation Study

حنين رياض دغيم[1] أحمد مهدي صالح[2]

كلية الإدارة والاقتصاد / جامعة واسط / قسم الإحصاء

المستخلص

في هذا البحث أُستعمل توزيعين هما: توزيع بواسون، وتوزيع شانكير. ودمج التوزيعين للحصول على توزيع بواسون - شانكير بمعلمة واحدة. مما يعطي التوزيع الأفضلية في ملائمة بيانات الحياة. كما وجدت خصائص التوزيع، مثل: داله كثافه احتمالية، والدالة التجمعية، ودالة المخاطرة، وداله البقاء، وداله المعولية، وكذلك اشتقاق بعض الخواص مثل العزوم، التفلطح، الالتواء، التباين، التوقع، وكذلك تقدير معلمات النموذج باستعمال ثلاث طرائق مختلفة (طريقة الامكان الاعظم، طريقة SM، طريقة LC-M) ولمدى معرفة كفاءة افضل طريقة تم المحاكاة باستعمال برنامج (MATLAB) بأحجام عينات مختلفة واستخدام متوسط مربعات الخطأ MSE للمقارنة بين طرائق التقدير لمعرفة أفضل طريقة. حيث توصلنا الى تفوق طريقة SM على باقي الطرق.

Abstract

This research utilized two distributions: the Poisson distribution and the Shanker distribution. The two distributions were amalgamated to generate a Poisson-Shanker distribution characterized by a singular parameter. This provides the distribution with a benefit in modeling life data. The distribution characteristics identified include the probability density function, cumulative distribution function, hazard function, survival function, and reliability function, along with the derivation of properties such as moments, kurtosis, skewness, variance, expectation, and the estimation of model parameters using four distinct methods: Maximum

Likelihood, SM Method, L-M Method, and LC-M Method. Simulations were performed using the MATLAB program with varying sample sizes to assess the efficiency of the optimal strategy. and the Mean Squared Error (MSE) was applied to evaluate the estimation methods to identify the most effective one. We determined that the SM approach surpassed the other methods.

1-1 1- المقدمة: **(Introduction)**

يمثل علم الإحصاء اهميه خاصه بين العلوم المختلفة سواء كانت طبيعية او اجتماعية وذلك لأنه يتعامل مع الحاجات العلمية والإنسانية في مختلف مجالات الحياة.

لذا تحتم على الباحثين سلوك سبل وطرائق رياضيه تمكنهم من إيجاد توزيعات جديده ذات مميزات تتلاءم مع بيانات الظواهر التي تكون تحت الدراسة ومن هذه السبل هي تطور وبناء توزيعات موجودة كأجراء توسعه او اعمامها بإضافة معلمه او أكثر من معلمات التركيب او الشكل أو خلط توزيعين او اكثر لينتج توزيعات احتماليه جديده تكون اكثر دقه ومرونة وليونة في تمثيل البيانات لدراسة تلك الظواهر لذا تم اقتراح توزيع بواسون _شانكير ليكون اكثر مرونة في تمثيل البيانات.

وفي توزيع بواسون- شانكير يتم الخلط بين توزيعين هما بواسون وشانكير لكي يتم الحصول على التوزيع اما توزيع شانكير هو في الأصل توزيع مختلط من مركبين هما توزيع كاما والتوزيع الاسي.

ويعد توزيع بواسون – شانكير من التوزيعات المهمة التي تمتلك نطاقا واسعا من التطبيقات في المجالات الحياتية والهندسية والطبية في تحليل البيانات وان هذا التوزيع بديل لعدد من التوزيعات التي تحتوي على معلمة واحدة حيث تم مناقشته في سنه 2015 وكذلك يتم من خلال هذه التوزيع ايجاد قيمة المعلمة. ويمتلك التوزيع عدد من الخصائص منها العزوم والالتواء والتفلطح ومعدل الخطورة. [21]

وكذلك يعد هذا التوزيع من التوزيعات المستمرة ذات المعلمة الواحدة حيث استخدم اول سنه 2015 وقام على اساس انه الوسيط والتباين لهما نفس القيمة اي ان ($\mu=\partial$)

وسوف نستخدم عده طرق لتقدير معلمة هذا التوزيع وبدورنا نقوم بمقارنه هذه الطرائق لتقدير معالم هذه التوزيع ومعرفه اي من الطرائق تعطي أفضل تقدير غير متحيز وذألك باعتماد على متوسط مربعات الخطأ.

2- مشكلة وهدف البحث

تتلخص مشكلة البحث في كون العديد من التطبيقات في المجال الحيوي تحتاج إلى أن تمثل بمجموعة جديدة من التوزيعات الاحتمالية لتفسير ظاهرة هذه البيانات حيث تتعدد التوزيعات التي يمكن تمثيل البيانات البيولوجية أو بيانات الحياة بشكل عام فيها وفي دراستنا هذه قمنا بتمثيل مجموعة من بيانات الحياة باستخدام توزيع بواسون-شانكير ويتلخص هدف البحث في معرفة ما هي الطرائق الأفضل لتقدير معلمات هذا التوزيع لاستخدامها في استخراج دالة المعولية لتمثيل أفضل معوليه ممكنة

لهذا التوزيع

3- **توزيع بواسون – شانكير**: **(Poisson-Shanker Distribution)**

في عام 2016 تم دمج التوزيعين شانكير مع بواسون وتم دراسة مختلف خواصه الرياضية والاحصائية حيث كان الدمج بالصورة الآتية حيث ان توزيع شانكير هو توزيع مختلط من توزيع اسي بمعلمة قياس θ وتوزيع كاما بمعلمتين $(\theta\ ,2)$ ، ويكون بالشكل الآتي [1] [2]:

$$f(x) = \frac{\theta^2}{1+\theta^2}(x+\theta)e^{-\theta x} \qquad x, \theta > 0$$

وكذلك توزيع بواسون بمعلمة λ يكون بالصيغة الآتية

$$f\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

وبافتراض ان معلمة توزيع بواسون تتوزع حسب توزيع شانكير ينتج لدينا

$$f(\lambda) = \frac{\theta^2}{\theta^2+1}(\theta+\lambda)e^{-\theta\lambda} \qquad \ldots(2\text{-}3)$$

وعليه فان الدالة الاحتمالية غير المشروطة لتوزيع بواسون -شانكير ستكون

$$P(x) = \int_0^\infty f(x\backslash\lambda) f(\lambda) d\lambda$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \cdot \frac{\theta^2}{\theta^2+1}(\theta+\lambda)e^{-\theta\lambda}\ d\lambda$$

نستخرج العوامل التي لا تعتمد على λ خارج التكامل

$$= \frac{\theta^2}{K!(\theta^2+1)} \int_0^\infty e^{-\lambda}\lambda^k(\theta+\lambda)e^{-\lambda\theta} d\lambda$$

$$= \frac{\theta^2}{K!\,(\theta^2+1)} \int_0^\infty \lambda^k(\theta+\lambda)e^{-(1+\theta)\lambda}\ d\lambda$$

$$= \frac{\theta^2}{K!(\theta^2+1)} (\theta \int_0^\infty \lambda^k e^{-(1+\theta)\lambda}\, d\lambda + \int_0^\infty \lambda^{k+1} e^{-(1+\theta)\lambda} d\lambda) \quad \ldots(2\text{-}4)$$

وحسب قانون دالة كاما القياسية

$$\int_0^\infty \lambda^m e^{-\alpha\lambda}\, d\lambda = \frac{\Gamma(m+1)}{\alpha^{m+1}}$$

حيث يصبح الجزء الأول

$$\int_0^\infty \lambda^k e^{-(1+\theta)\lambda}\, d\lambda = \frac{K!}{(1+\theta)^{k+1}}$$

ويصبح الجزء الثاني [3] [1]

$$\int_0^\infty \lambda^{k+1} e^{-(1+\theta)\lambda} d\lambda = \frac{(K+1)!}{(1+\theta)^{k+2}}$$

نستبدل التكاملين في المعادلة (2-4)

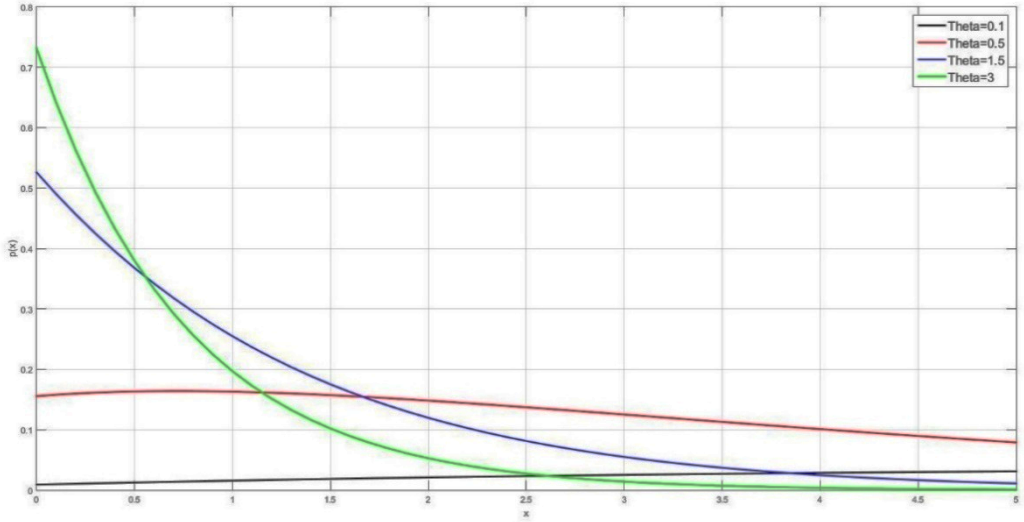
$$p(k) = \frac{\theta^2}{K!(\theta^2+1)}\left(\theta \frac{K!}{(1+\theta)^{k+1}} + \frac{(K+1)!}{(1+\theta)^{k+2}}\right) \quad \ldots(1)$$

نبسط المعادلة (1)

$$p(k) = \frac{\theta^2}{(\theta^2+1)(1+\theta)^{k+2}}(K+1+\theta)$$

وعليه تكون صيغة توزيع بواسون-شانكير كالآتي [2] [4]

$$p(x) = \frac{\theta^2(x+\theta+1)}{(\theta^2+1)(1+\theta)^{x+2}} \quad \ldots(2)$$

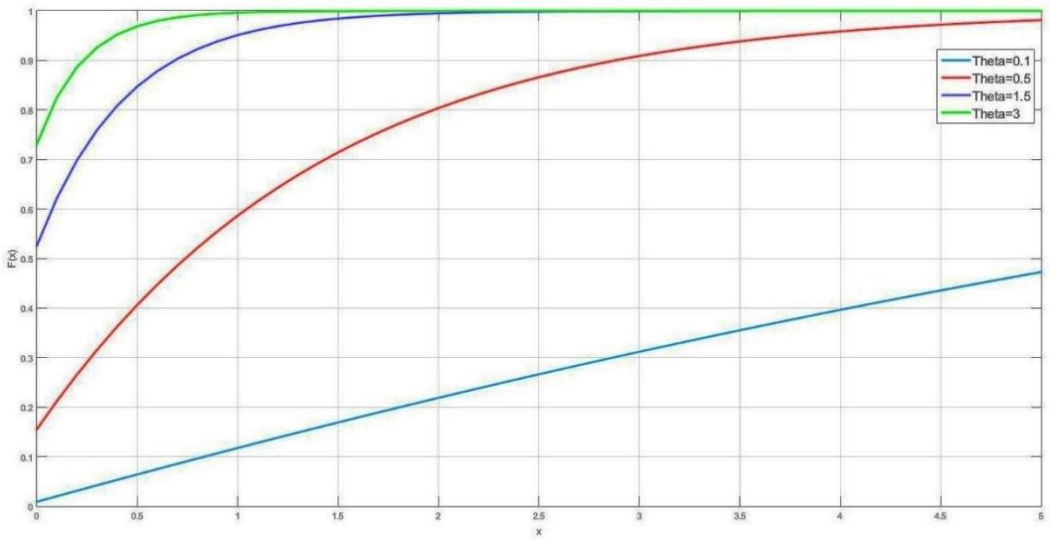


شكل (2-1) دالة الكثافة الاحتمالية pdf لتوزيع بواسون-شانكير

وتكون الدالة التوزيعية F(x) لتوزيع بالشكل الآتي [1]

$$\boldsymbol{F(x) = 1 - \frac{\theta^3+\theta^2+(2+x)\theta+1}{(\theta^2+1)(\theta+1)^{x+2}} e^{-\theta x}} \qquad \ldots(3)$$

$$n \leq x < n+1 \qquad Where\ n = 0,1,2,..,\theta$$



شكل (2-2) الدالة التجمعية (C.D.F) لتوزيع بواسون – شانكير

3- **دالة الخطورة (معدل الخطورة)** :(**Hazard rate**)

ويطلق عليه احتمال فشل الجهاز خلال الفترة الزمنية (t,t+Δt) علما ان الجهاز يعمل حتى الوقت t وهذا معناه ان المعدل للفشل احتمال شرطي [5] [6]

ونرمز لمعدل الفشل بالشكل الآتي h (t) وان لهذا الدالة اهميه في تحليل بيانات العمر وكذألك تعطي توقعا للوقت لحين حصول الحدث. ودائما تكون قيمتها موجبه وتتناسب طرديا مع داله كثافه الاحتمال وعكسيا مع داله البقاء. وان داله الخطورة يكون ارتباطها رياضيا بالدالة التجميعية ودالة كثافه الاحتمال.

ونكتب الصيغة الرياضية بالشكل الآتي [7]

$$\boldsymbol{h(t) = \frac{Pr(t<T<t+\Delta t \backslash T>t)}{\Delta t}} \qquad \ldots(4)$$

عندما $(\Delta t \to 0)$ تقترب من الصفر

$$\boldsymbol{h(t)} = \left[\frac{\boldsymbol{PrPr\ (t<T<t+\Delta t \backslash T>t)}}{\boldsymbol{\Delta t}}\right]$$

$$\boldsymbol{h(t)} = \left[\frac{\boldsymbol{PrPr\ (t<T<t+\Delta t)}}{\boldsymbol{\Delta t PrPr\ (T>t)}}\right]$$

$$\boldsymbol{h(t)} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{R(t)}}\left[\frac{\boldsymbol{PrPr\ (t<T<t+\Delta t)}}{\boldsymbol{\Delta t}}\right]$$

$$\boldsymbol{h(t)} = \frac{\boldsymbol{dF(t)}}{\boldsymbol{dt}} . \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{R(t)}}$$

$$\boldsymbol{h(t)} = \frac{\boldsymbol{f(t)}}{\boldsymbol{R(t)}}$$

$$\boldsymbol{R(t) = 1 - cdf}$$

$$\boldsymbol{h(t)} = \frac{\frac{\boldsymbol{\theta^2}}{\boldsymbol{\theta^2+1}} . \frac{\boldsymbol{x+\theta^2+\theta+1}}{\boldsymbol{(\theta+1)^{x+2}}}}{\boldsymbol{1-\left(1-\frac{\theta^3+\theta^2+(2+x)\theta+1}{(\theta^2+1)(\theta+1)^{x+2}}\right)}}$$

$$\boldsymbol{h(t)} = \frac{\boldsymbol{\theta^2(\theta^2+\theta+x+1)}}{\boldsymbol{(\theta+1)\left(1+\theta\left(\theta^2+\theta+x+1\right)\right)}} \qquad \ldots(5)$$

$$\boldsymbol{x = 0, 1, 2, 3, \rho > 0}$$

وان معدل الفشل يتناسب عكسيا مع داله المعولية وطرديا مع دالة الكثافة الاحتمالية.

4- **طريقه الامكان الاعظم: (Maximum Likelihood Method)**

قدمت طريقة الامكان الاعظم لأول مره من قبل الباحث (Fisher) سنه 1922 وتعد هذه الطريقة من الطرق الكلاسيكية لتقدير المعلمات ولها خصائص جيدة مثل خاصيه الثبات والكفاية والكفاءة وأحيانا خاصيه الالتصاق وتكون أكثر دقه في التقدير من الطرائق الاخرى في حاله كون حجم المادة كبير وكذألك تمتلك خاصيه عدم التحيز. وان هذه الطريقة تهدف الى جعل الدالة في نهايتا العظمى، إذا كانت لدينا عينه عشوائية تتوزع وفقا لتوزيع معدل الفشل الخطي العام بمعلمه قياس ومعلمه شكل فان مقدار الإمكان الأعظم الذي يجعل الدالة في نهايتها العظمى يمكن الحصول عليه باشتقاق لوغاتم داله الإمكان الأعظم ومساواتها الى الصفر.

وتكون داله الامكان الاعظم بالشكل الآتي [1]

$$\boldsymbol{f\ (x,\ \theta)} = \frac{\boldsymbol{\theta^2}}{\boldsymbol{\theta^2+1}} . \frac{\boldsymbol{x+\theta^2+\theta+1}}{\boldsymbol{(\theta+1)^{x+2}}}$$

$xi=0,1,2\ldots., \theta > 0$

ويمكن الحصول على دالة الإمكان ***(L)*** من ايجاد:

$$L=\prod_{i=1}^{n} f(xi)$$

وبتعويض معادلة في معادلة نحصل على المعادلة الآتية [2]

$$L=\prod_{i=1}^{n} \frac{\theta^{2n}}{(\theta^2+1)^{x+2}} . \frac{\prod_{i=1}^{n}(xi+\theta^2+\theta+1)}{(\theta+1)^{\sum_{i=1}^{n} xi+2n}} \quad \ldots(6)$$

وبأخذ اللوغاريتم لدالة الامكان الاعظم نحصل على الآتي

$$Log\ L\ (\rho, xi) = 2n\ Log\rho - n\ Log(\theta^2+1) + \sum_{i=1}^{n} log(xi+\theta^2+\theta+1) - (\sum_{i=1}^{n} xi + 2\theta) log(\theta+1)$$

وللحصول على مقدرات الامكان الاعظم لمعالم التوزيع يتم اخذ المشتقة الجزئية الاولى بالنسبة الى θ لدالة السابقه وتكون على النحو الآتي [8]

$$\frac{\partial logl(\theta,xi)}{\partial \theta} = \frac{2n}{\theta(\theta^2+1)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{2\theta+1}{xi+\theta^2+\theta+1} - \frac{n(\underline{x}+2)}{\theta+1}$$

ونجعل المشتقة الصفرية مساويه الى الصفر ويكون كالآتي [9]

$$\frac{\partial logl(\theta,xi)}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{dLogl(\theta,xi)}{d\theta} = \frac{2n}{\theta(\theta^2+1)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{2\theta+1}{xi+\theta^2+\theta+1} - \frac{n(\underline{x}+2)}{\theta+1} = 0 \quad \ldots(7)$$

وان المشتقات الجزئية السابقة هي دوال غير قابلة للحل بالحذف او التعويض ومن ثم سيتم اللجوء الى الطرائق العددية التكرارية بالتعويض المتتالي للوصول الى مقدر الامكان الاعظم

5- طريقة LC-Moment

وهي من الطرق التي تعتمد على إيجاد حل لمعادلات تمثل نتاج مساواه لعزوم L_k للمجتمع مع نظيراتها لقياسات العينة l_k ولقد تم تطويرها من قبل Hosking الذي اعتمد على إحصاءات مرتبة للعينة تتميز طريقة L-Moments بكونها تتمتع بتباين أقل من طريقة العزوم العادية وكذلك أكثر حصانة للقيم الشاذة والمتطرفة وتكون مناسبة جدا للعينات الصغيرة [10].

فاذا كانت x_i عينة عشوائية بحيث ان $X_1 \le X_2 \le \cdots \le X_n$ فتكون عزوم L للمجتمع والعينة بالصيغ الآتية

$$L_k = K^{-1} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{k-1}{j} E(X_{k-j.k}) \quad \ldots(8)$$

$K=1,2,3, \ldots$

$$Lk = \frac{1}{k\binom{n}{k}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{k-1}{j} \binom{i-1}{k-j-1} \binom{n-i}{j} X_{in} \quad \ldots(9)$$

$K=1,2,3, \ldots$

وعندما نعوض K=1 نحصل على المعادلة

وعندما نعوض K=2 نحصل على المعادلة

$$L_1 = \frac{\theta^2+2}{\theta(\theta^2+1)} \quad \ldots(10)$$

$$L_2 = \frac{\theta^3-2\theta^2+2\theta+6}{2\theta^2(\theta^2+1)} \quad \ldots(11)$$

حيث ان عزوم L للعينة تكون حسب المعادلات الآتية

$$L_1 = \bar{X}$$

$$L_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} (2j - n - 1) X_{j.n} \quad \ldots(12)$$

وبمساواة العزوم نحصل على المعادلتين الآتيتين

$$\bar{X} = \frac{\theta^2+2}{\theta(\theta^2+1)} \quad \ldots(13)$$

$$\frac{1}{n(n-1)} \sum_{j=1}^{n} (2j - n - 1) X_j = \frac{\theta^3-2\theta^2+2\theta+6}{2\theta^2(\theta^2+1)} \quad \ldots(14)$$

يمكن إيجاد مقدر L-Moment لتوزيع بواسون-شانكير $\hat{\theta}_{L-M}$ عن طريق استخدام الأساليب العددية لحل المعادلتين أعلاه [11].

6- طريقة LC-Moment

قام Yilmaz واخرون باقتراح هذه الطريقة عام 2021 وتمثل توليفة خطية لمقدرات العزوم للمعلمة المراد تقديرها حيث تكون هذه الطريقة مستندة بالأساس على النظرية الآتية [7]:

فليكن المتجه $T' = (T_1, T_{,2}, \dots T_r)$ يمثل تقديرات غير متحيزة للمعلمة θ وليكن Σ يمثل مصفوفة التباين والتباين المشترك للمتجه T اذن فالمقدر αT يمثل تقدير غير متحيز للمعلمة θ بحيث ان $\alpha = \frac{\Sigma^{-1}M}{M'\Sigma^{-1}M}$ وتمثل M متجه (1r x) بقيم مساوية للواحد الصحيح [12].

وهنا لنفترض ان $T' = (\hat{\theta}_{MM} \quad \hat{\theta}_{L-M})$ اذن مقدر LC-Moment لتوزيع بواسون-شانكير يكون حسب المعادلة الآتية

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{LC-M}} = \boldsymbol{\alpha_1}\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{MM}} + \boldsymbol{\alpha_2}\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{L-M}} \qquad \dots(15)$$

بحيث ان:

$$\underline{\boldsymbol{\alpha}} = [\boldsymbol{\alpha_1} \ \boldsymbol{\alpha_2}] = \sum^{-1}\boldsymbol{M}/\boldsymbol{M}\sum^{-1}\boldsymbol{M} \qquad \dots(16)$$

نعوض قيمه Mفي معادلة نحصل على معادلة

$$= \sum^{-1}\boldsymbol{I} \ / \ \boldsymbol{I} / \sum^{-1}\boldsymbol{I} \qquad \dots(17)$$

Iتمثل مصفوفة الوحدة

علما ان قيمهΣ تساوي

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Var}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{MM}}) & \boldsymbol{Cov}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{MM}}, \boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{L-M}}) \\ \boldsymbol{Cov}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{L-M}}, \widehat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{MM}}) & \boldsymbol{Var}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{L-M}}) \end{bmatrix} \qquad \dots(18)$$

7- الطريقة المقلصة: Shrinkage Method SM

وتعتمد هذه الطريقة على إيجاد تقدير لمعلمة توزيع بواسون-شانكير تكون خليط من معلمتين باستخدام علمه خلط λ حيث ان $0 < \lambda < 1$ ويكون المقدر المقلص بالصيغة الآتية [13]:

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{SH}} = \boldsymbol{\lambda}\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{j}} + (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{\lambda})\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{0}} \qquad \dots(19)$$

وتمثل $\hat{\theta}_0$ تقديرات أولية للمعلمة كان تقديرات الإمكان الأعظم اما بالنسبة لمعلمة الخلط λ ذهب بعض الباحثين الى تحديد قيمتها من خلال اختيار قيم لها بين الصفر والواحد الصحيح، بينما ذهب آخرون الى إيجاد تقدير لها يجعل من مجموع مربعات الخطاء للمعلمة المقدرة أقل ما يمكن تصغير مجموع مربعات الخطأ للتقدير أقل ما يمكن أي ان [11].

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{SH}} = \boldsymbol{\lambda}\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{1}} + (\boldsymbol{1}-\boldsymbol{\lambda})\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{2}}$$

نطرح θ من الطرفين في المعادلة

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{SH}} - \theta = \boldsymbol{\lambda}\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{1}} + (\boldsymbol{1}-\boldsymbol{\lambda})\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{2}} - \theta$$

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{SH}} - \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\lambda\theta}_{\boldsymbol{1}} + \boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{2}} - \boldsymbol{\lambda\theta}_{\boldsymbol{2}} - \boldsymbol{\theta}$$

نضيف ونطرح المقدار $\lambda\theta$ من نحصل على المعادلة [6]

$$\hat{\theta}_{\mathbf{SH}} - \theta = \boldsymbol{\lambda}\hat{\theta}_{\mathbf{1}} + \theta_{\mathbf{2}} + \boldsymbol{\lambda}\hat{\theta}_{\mathbf{2}} - \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\lambda\theta} - \boldsymbol{\lambda\theta} \qquad \ldots(20)$$

$$\hat{\theta}_{\mathbf{SH}} - \theta = \left(\boldsymbol{\lambda}\hat{\theta}_{\mathbf{1}} - \boldsymbol{\lambda\theta}\right) - \left(\boldsymbol{\lambda}\hat{\theta}_{\mathbf{2}} - \boldsymbol{\lambda\theta}\right) + (\hat{\theta}_{\mathbf{2}} - \theta)$$

نسحب λ عامل مشترك من المعادلة تصبح المعادلة كلاتي

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{SH}} - \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\lambda}\left[\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{1}} - \boldsymbol{\theta}\right) - \left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{2}} - \boldsymbol{\theta}\right)\right] + \left[\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{2}} - \boldsymbol{\theta}\right]$$

نربع طرفي المعادلة نحصل على المعادلة

$$\left[\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{SH}} - \boldsymbol{\theta}\right]^{\boldsymbol{2}} = \{\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{2}}\left[\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{1}} - \boldsymbol{\theta}\right) - \left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{2}} - \boldsymbol{\theta}\right)\right]^{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{2\lambda}\left[\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{1}} - \boldsymbol{\theta}\right) - \left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{2}} - \boldsymbol{\theta}\right)\right]$$

$$\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{2}} - \boldsymbol{\theta}\right)\} \qquad \ldots(21)$$

$$\left[\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{SH}} - \boldsymbol{\theta}\right]^{\boldsymbol{2}} = \{\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{2}}\left[\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{1}} - \boldsymbol{\theta}\right]^{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{2}}\left[\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{2}} - \boldsymbol{\theta}\right]^{\boldsymbol{2}} - \boldsymbol{2\lambda}^{\boldsymbol{2}}\left[\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{1}} - \boldsymbol{\theta}\right]\left[\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{2}} - \boldsymbol{\theta}\right] + \left[\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{2}} - \boldsymbol{\theta}\right]^{\boldsymbol{2}} +$$
$$\boldsymbol{2\lambda}\left[\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{1}} - \boldsymbol{\theta}\right]\left[\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{2}} - \boldsymbol{\theta}\right] - \boldsymbol{2\lambda}\left[\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{2}} - \boldsymbol{\theta}\right]^{\boldsymbol{2}}\}$$

وبإدخال التوقع لطرفين المعادلة نحصل على الآتي

$$\mathbf{Mse}\ (\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{SH}}) = \{\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{Mse}\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{1}}\right) + \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{Mse}\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{2}}\right) - \boldsymbol{2\lambda}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{Cov}\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{1}}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{2}}\right) + \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{Mse}\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{2}}\right)$$
$$-\boldsymbol{2\lambda}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{Cov}\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{1}}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{2}}\right) + \boldsymbol{Mse}$$

والان سوف نقوم بعمل التفاضل الجزئي للمعادلة بالنسبة لثابت λ نحصل على المعادلة الآتية ونساويها الى الصفر

$$\frac{\partial Mse(\hat{\theta}_{SH})}{\partial y}=2\lambda\, Mse\,(\hat{\theta}_1)+2\lambda\, Mse(\hat{\theta}_2)-4\lambda\, Cov(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)+2\, Cov\,(\hat{\theta}_1-\hat{\theta}_2)$$

$$-2\, Mse(\hat{\theta}_2)=0$$

نقسم المعادلة على 2 ونسحب λ عامل مشترك من المعادلة نحصل على المعادلة الآتية:

$$=\lambda\,[\text{Mse}\,(\hat{\theta}_1)+Mse(\hat{\theta}_2)-2Cov\,(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)+Cov\,(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)-Mse(\hat{\theta}_2)$$

وعليه نحصل على قيمه الثابت λ التي يمكن ان تحقق أصغر متوسط مربعات للخطأ من المعادلة كالآتي:

$$\lambda=\frac{Mse(\hat{\theta}_2)-Cov\,(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)}{Mse\,(\hat{\theta}_1)+Mse\,(\hat{\theta}_2)-2Cov(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)} \qquad \ldots(22)$$

وعليه فان المقدر الجديد المقلص بالنسبة للمعلمة يكون كالاتي [14]:

$$\hat{\theta}_{SH}=\hat{\lambda}\hat{\theta}_{Mle}(1-\hat{\lambda})\hat{\theta}_0 \qquad \ldots(23)$$

8- متوسط **مربعات الخطأ :(MSE)**

نستخدم *MSE* متوسط مربعات الخطاء للمقارنة بين طرائق التقدير للحصول على أفضل طريقة تقدير ممكنه لدلة الخطورة لتوزيع بواسون-شانكير وذألك للوصول الى النتائج المطلوبة وان استخدام اسلوب المقارنة لابد من وجود نتائج لكي يتم المقارنة بينهم وتكون المقارنة بين القيمة الحقيقية والقيمة التقديرية وحسب الصيغة الآتية [14]:

$$MSE=\sum_{i=1}^{n}\frac{(\hat{\theta}-\theta)^2}{n-1} \qquad \ldots(24)$$

كذلك بعد اختيار أفضل طريقة تقدير تتم مقارنة تقدير دالة الخطورة لتوزيع بواسون-شانكير مع بعض تقديرات لدوال خطورة لبعض توزيعات الحياة الأخرى مثل التوزيع الاسي وتوزيع شانكير وغيرهم.

1 – θ تمثل القيم الافتراضية لمعلمات التوزيع المقترح

2 – $\hat{\theta}$ تمثل القيم المقدرة لتوزيع المقترح

3- nعدد تكرارات التجربة.

8- المحاكاة

ويتضمن الجانب الذي يتم من خلاله اجراء تجربة محاكاه باستخدام طريقة التحويل المعكوس لتوليد متغيرات بنفس قياسات العينة الحقيقية حيث كانت العينة الحقيقة مكونة من 50 حجم العينة. وهنا تم اجراء المحاكاة بمختلف أحجام العينات (5-50) واحتسابها على التوالي لقيم مختارة لمعلمة $\boldsymbol{\Theta}$ وهي على التوالي (1.5 ,0.1, 0.5) ثم احتساب قيمة ($\hat{\theta}$) وكذلك متوسط مربعات الخطاء لنموذج التوزيع كلاتي:

جدول رقم (1)

قيم$\hat{\theta}$ لطرائق التقدير عندما $\boldsymbol{\Theta = 0.1}$

n	*MLE*	*L-M*	*LC-M*	*SM*
5	*1.47*	*1.74*	*1.47*	*1.71*
10	*1.27*	*1.47*	*1.23*	*1.37*
15	*1.09*	*1.24*	*0.99*	*1.16*
20	*0.93*	*1.05*	*0.80*	*0.89*
25	*0.80*	*1.00*	*0.63*	*0.68*
30	*0.69*	*0.88*	*0.51*	*0.41*
35	*0.61*	*0.77*	*0.42*	*0.28*
40	*0.55*	*0.70*	*0.35*	*0.19*
45	*0.51*	*0.65*	*0.30*	*0.14*
50	*0.49*	*0.62*	*0.28*	*0.13*

جدول رقم (2)

قيمMSEلطرائق التقدير عندما Θ = 0.5

n	*MLE*	*L-M*	*LC-M*	*SM*
5	*0.4811*	*0.9191*	*0.5662*	*0.8287*
10	*0.2591*	*0.6257*	*0.2674*	*0.4104*
15	*0.1533*	*0.3015*	*0.1333*	*0.2174*
20	*0.0979*	*0.1723*	*0.0784*	*0.1006*
25	*0.0683*	*0.1493*	*0.0492*	*0.0564*
30	*0.0505*	*0.1064*	*0.0355*	*0.0271*
35	*0.0406*	*0.0784*	*0.0278*	*0.0191*
40	*0.0345*	*0.0646*	*0.0230*	*0.0151*
45	*0.0310*	*0.0564*	*0.0201*	*0.0131*
50	*0.0294*	*0.0519*	*0.0191*	*0.0127*

نلاحظ في جدول رقم (1) عندما تكون قيمة Θ =0.1 عندما تكون أحجام العينات من 5-15 نلاحظ تفوق طريقة LC-M الأفضلية لبقية طرق التقدير. وبزيادة أحجام العينات 20-35 ظهرت افضلية وتفوق طريقة SM ثم تفوق طريقة LC-M ثم الأفضلية لبقية طرق التقدير. وبزيادة أحجام العينات 40-50 بقي الحال كما هو علية حيث ظهرت افضلية بطريقة SM ثم تفوق طريقة LC-M ثم الأفضلية لبقية طرق التقدير.

جدول رقم (3)

قيم MSE لطرائق التقدير عندما $\Theta = 0.5$

n	*MLE*	*L-M*	*LC-M*	*SM*
5	*1.47*	*2.47*	*2.1*	*2.74*
10	*1.31*	*2.17*	*1.79*	*2.2*
15	*1.17*	*1.9*	*1.54*	*1.74*
20	*1.05*	*1.67*	*1.33*	*1.36*
25	*0.96*	*1.48*	*1.17*	*1.06*
30	*0.88*	*1.33*	*1.05*	*0.84*
35	*0.81*	*1.21*	*0.96*	*0.7*
40	*0.74*	*1.12*	*0.9*	*0.61*
45	*0.73*	*1.06*	*0.86*	*0.57*
50	*0.72*	*1.04*	*0.84*	*0.55*

جدول رقم 4

قيم MSE لطرائق التقدير عندما $\theta = 0.5$

n	*MLE*	*L-M*	*LC-M*	*SM*
5	*0.4104*	*0.9070*	*0.8074*	*0.9931*
10	*0.3405*	*0.7989*	*0.6058*	*0.7715*
15	*0.2902*	*0.6467*	*0.4461*	*0.5291*

20	*0.2535*	*0.5220*	*0.3485*	*0.3608*
25	*0.2294*	*0.4153*	*0.2902*	*0.2564*
30	*0.2100*	*0.3485*	*0.2535*	*0.2010*
35	*0.1945*	*0.3036*	*0.2294*	*0.1726*
40	*0.1802*	*0.2742*	*0.2147*	*0.1566*
45	*0.1782*	*0.2564*	*0.2054*	*0.1500*
50	*0.1764*	*0.2507*	*0.2010*	*0.1469*

نلاحظ في جدول رقم (3) عندما تكون قيمة Θ =0.5 عندما تكون أحجام العينات من 5-15 نلاحظ تفوق طريقة MLEثم تليها طريقة LCMثم تليها طريقة SMثم الأفضلية لبقية طرق التقدير.وبزيادة أحجام العينات 20-35 ظهرت افضلية وتفوق طريقة SM ثم تفوق طريقة MLE الأفضلية لبقية طرق التقدير.وبزيادة أحجام العينات 40-50 بقي الحال كما هو علية حيث ظهرت أفضلية بطريقة SM ثم تفوق طريقة MLE ثم الأفضلية لبقية طرق التقدير

جدول رقم (5)

قيم $\widehat{\theta}$ لطرائق التقدير عندما $\boldsymbol{\Theta}$ =1.5

n	*MLE*	*L-M*	*LC-M*	*SM*
5	*2.96*	*3.48*	*3.24*	*4.03*
10	*2.77*	*3.09*	*2.93*	*3.4*
15	*2.6*	*2.76*	*2.76*	*2.88*
20	*2.45*	*2.48*	*2.52*	*2.46*
25	*2.32*	*2.19*	*2.32*	*2.16*
30	*2.21*	*2.05*	*2.16*	*1.94*

35	*2.13*	*1.95*	*2.05*	*1.79*
40	*2.07*	*1.86*	*1.98*	*1.7*
45	*2.03*	*1.8*	*1.94*	*1.66*
50	*2.01*	*1.78*	*1.92*	*1.65*

جدول رقم (6)

قيم MSEلطرائق التقدير عندما Θ =1.5

n	*MLE*	*L-M*	*LC-M*	*SM*
5	*0.5911*	*0.9001*	*0.8222*	*0.9655*
10	*0.4682*	*0.8182*	*0.6456*	*0.8188*
15	*0.3827*	*0.6653*	*0.5223*	*0.6061*
20	*0.3216*	*0.5035*	*0.3917*	*0.3652*
25	*0.2774*	*0.3568*	*0.3108*	*0.2594*
30	*0.2453*	*0.3038*	*0.2594*	*0.2033*
35	*0.2244*	*0.2713*	*0.2295*	*0.1727*
40	*0.2101*	*0.2453*	*0.2124*	*0.1567*
45	*0.2011*	*0.2295*	*0.2033*	*0.1501*
50	*0.1967*	*0.2244*	*0.1989*	*0.1485*

نلاحظ في جدول رقم (5): عندما تكون قيمة θ=1.5 عندما تكون أحجام العينات من 5-15 نلاحظ تفوق طريقة MLEثم تليها طريقتان متساويتان في المقدار هما LC-Mو L-Mثم الأفضلية لبقية طرق التقدير. وبزيادة أحجام العينات 20-35 ظهرت

افضلية وتفوق طريقة SM ثم تفوق طريقة L-M ثم الأفضلية لبقية طرق التقدير. وبزيادة أحجام العينات 50-40 حيث ظهرت أفضلية بطريقة SM تليها طريقتان متساويتان بالمقدار هما L-M وLC-M ثم الأفضلية لبقية طرق التقدير.

9- الاستنتاجات

اظهر الجانب التجريبي وبالاعتماد على المقياس الاحصائي متوسط مربعات الخطأ (MSE) ان الطريقتينMLE، LC-M قد حققت مرتبتين متساويتين عند أحجام العينات (5,15). إن طريقة SM قد حققت الأفضلية عند أحجام العينات .(35-50) لذلك يوصي الباحثون باعتماد طريقة SM في حجوم العينات الكبيرة.

References

[1] R. Shanker, "The discrete poisson-shanker distribution," *Jacobs Journal of Biostatistics,* vol. 1, p. 1–7, 2016.

[2] R. Shanker, "Shanker distribution and its applications," *International journal of statistics and Applications,* vol. 5, p. 338–348, 2015.

[3] R. Shanker, H. Fesshaye, R. Shanker, T. A. Leonida and S. Sium, "On discrete Poisson-Shanker distribution and its applications," *Biometrics & biostatistics International journal,* vol. 5, p. 00121, 2017.

[4] R. Shanker, "A zero-truncated Poisson-Shanker distribution and its applications," *Int J Stat Appl 2017b,* vol. 7, p. 159–69, 2017.

[5] L. Alzoubi, M. Gharaibeh and R. Alzghool, "Transmuted Shanker distribution: properties and applications," *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics,* vol. 48, p. 195–212, 2022.

[6] J. F. Bithell, "Estimation of relative risk functions," *Statistics in Medicine,* vol. 10, p. 1745–1751, 1991.

[7] R. L. Prentice, F. Zoe Moodie and J. Wu, "Hazard-based nonparametric survivor function estimation," *Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology,*

vol. 66, p. 305–319, 2004.

[8] R. T. Rockafellar and S. Uryasev, "The fundamental risk quadrangle in risk management, optimization and statistical estimation," *Surveys in Operations Research and Management Science,* vol. 18, p. 33–53, 2013.

[9] R. E. Just and R. D. Pope, "Production function estimation and related risk considerations," *American Journal of Agricultural Economics,* vol. 61, p. 276–284, 1979.

[10] N. M. Kiefer, "Economic duration data and hazard functions," *Journal of economic literature,* vol. 26, p. 646–679, 1988.

[11] R. C. Van Wijk and U. S. H. Simonsson, "Finding the right hazard function for time-to-event modeling: A tutorial and Shiny application," *CPT: Pharmacometrics & Systems Pharmacology,* vol. 11, p. 991–1001, 2022.

[12] M. Broadie, Y. Du and C. C. Moallemi, "Risk estimation via regression," *Operations Research,* vol. 63, p. 1077–1097, 2015.

[13] R. Shanker and K. K. Shukla, "Power Shanker distribution and its application," *Türkiye Klinikleri Biyoistatistik,* vol. 9, p. 175–187, 2017.

[14] J. A. Anderson and A. Senthilselvan, "Smooth estimates for the hazard function," *Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology,* vol. 42, p. 322–327, 1980.