Tikrit Journal of Administrative and Economic Sciences, Vol. 19, No. Special Issue, Part (5): 145-159
Doi: www.doi.org/10.25130/tjaes.19.SP3.5.10

Tikrit Journal of Administrative and Economics Sciences
مجلة تكريت للعلوم الإدارية والاقتصادية
ISSN: 1813-1719 (Print)

The probability distribution (Marshall-Olkin - generalized Exponential Inverse Weibull) properties and application

Falah H. Abd* [A], Sahib S. Hammed [B], Khansaa A. yusur [C]

[A] College of Education and Pure Sciences
[B] Collage of Computer Science and Mathematics Tikrit University
[C] Collage of Computer Science and Mathematics Tikrit University

Keywords:
Generalized exponential distribution, Marshall-Olkin family, Whipple inverse, greatest possibility method.

Article history:
Received 18 Apr. 2023
Accepted 30 Apr. 2023
Available online 30 Aug. 2023

©2023 College of Administration and Economy, Tikrit University. THIS IS AN OPEN ACCESS ARTICLE UNDER THE CC BY LICENSE

http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/

*Corresponding author:
Falah H. Abd
College of Education and Pure Sciences

Abstract: In this paper we present a new distribution called Probability Distribution (Marshall Olkin Exponential Generalized-Inverse Weibull Distribution) derived from the merge of the Marshall Olken Family and generalized exponential distribution with the inclusion of Inverse Weibull distribution in the resulting formula from the combination of the two methods. Study the mathematical and statistical properties of this distribution such as; hazard function, Survival function, quantile function, Survival function normal moments, moment generation function, entropy and shapes and study the expansion of the function for ease the process of finding the properties. Use the greatest possible method in estimating the distribution parameters. A set of data is used to demonstrate the suitability and application of the new distribution. For the purpose of comparison, we use different models to test the quality and suitability of distribution.

Tikrit Journal of Administrative and Economic Sciences, Vol. 19, No. Special Issue, Part (5): 145-159
Doi: www.doi.org/10.25130/tjaes.19.SP3.5.10

التوزيع الاحتمالي مارشال اولكين الاسي المعمم- معكوس ويبل خصائص وتطبيق

فلاح حسن عبد
مديرية تربية كركوك
كركوك – العراق

صاحب صالح حميد
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
جامعة تكريت

خنساء أزهر يسر
مديرية تربية صلاح الدين
تكريت – العراق

المستخلص

في هذه البحث نقدم توزيع جديد باسم التوزيع الاحتمالي (مارشال اولكين الاسي المعمم-معكوس ويبل) الناتج من تركيب عائلة مارشال اولكين والتوزيع الاسي المعمم مع توزيع معكوس ويبل. ودراسة الخصائص الرياضية والإحصائية لهذا التوزيع مثل؛ دالة البقاء، الدالة الكمية، دالة الخطر، العزوم، الدالة المولدة للعزوم، الانتروبي وعرض الأشكال البيانيه ودراسة وتوسيع دالة الكثافة. استخدم طريقة الامكان الأعظم (MLE) في تقدير معالم التوزيع. استخدمت مجموعة من البيانات الحقيقية لإثبات مدى ملائمة ومرونة التوزيع الجديد. لغرض المقارنة نستخدم نماذج من التوزيعات المختلفة لاختبار جودة وملائمة التوزيع المدروس مع بقية التوزيعات وقد استخدم برنامج R الاحصائي لمعرفة جودة التوزيع.

الكلمات المفتاحية: توزيع الاسي المعمم، عائلة مارشال اولكين، معكوس ويبل، طريقة الامكان الاعظم.

1. المقدمة Introduction

في الآونة الأخيرة، كانت هناك دراسات على نطاق واسع من قبل الكثير من الباحثين بإيجاد طرق لتوليد توزيعات جديدة ذات خواص ومرونة عالية في نمذجة البيانات. باستخدام التوزيعات القياسية كأساس في توليد التوزيعات لتحليل ودراسة ونمذجة البيانات الحقيقية للظواهر في مختلف المجالات العلمية مثل الاقتصاد والطب الهندسة وغيرها من المجالات. تتم هذه العملية عن طريق إضافة معلمة واحدة أو أكثر إلى التوزيع الأساسي. ان هذه الإضافة قد تعطي مرونة أكبر للتوزيع لنمذجة وتحليل البيانات. عائلة مارشال اولكين التي قدمها الباحثان (Marshall and Olkin, 1997) من اهم الدراسات التي من خلالها يمكن الحصول على توزيعات احتمالية جديدة.عائلة مارشال اولكين تتضمن معلمة شكل. كما قدم الباحث (Gupta,1998) عائلة جديدة سميت بعائلة التوزيع الاسي المعمم والتي لها معلمة قياس ومعلمة شكل. لا تقتصر توليد التوزيعات الجديد على الطرق هذ العوائل فقط بل يوجد العديد من الأساليب المدروسة في هذ المجال. منذ اقتراح هذه الطرق إلى يومنا هذا يعمل الباحثين على دراسة تعميمات وتوسيعات بشكل مستمر لهذه الطرق مما يجعل التوزيع المقترح ذو مرونة عالية أكثر من التوزيعات التي سبق دراستها في تحليل بيانات الظواهر التي تحدث في هذا الوقت. سنقتصر على بعض التعميمات التي أجريت لهذه الطرق مثلا درس الباحث Yousof et al., (2018) تعميم لعائلة مارشال اولكين يسمى. The Marshall-Olkin exponentiated generalized G family of distributions

وقامت الباحثة بالاشتراك مع باحثين آخرين Anna Malinova et al.,(2019) بدراسة التوزيع الاسي كنموذج في عائلة التوزيع الاسى المعمم واطلق على التوزيع الجديد exponential exponential exponentaited.. درس الباحث Ahmedd et al., (2019). باستخدام التوزيع الاسي في عائلة مارشال والكين وتوب ليون للحصول على مرونة جيدة في نمذجة

البيانات. وقام الباحث Khaleel et al., (2020) بدراسة عائلة مارشال مع عائلة توب ليون واستخدام توزيع ويبل كنموذج خاص من خلال النظر بالطرق والتعميمات المستخدمة في توليد التوزيعات.

نقترح في هذا البحث توزيع جديد ناتج من تركيب عائلة مارشال اولكين الاسي المعمم مع توزيع معكوس ويبل ذي المعلمتين كنموذج خاص يعتبر واحدًا من أهم التوزيعات المستخدمة في الموثوقية وتوزيع فترات البقاء على قيد الحياة، والحصول على توزيع جديد يكون أكثر ملائمة ومرونة لنمذجة انواع عديدة من البيانات. سندرس الخصائص الإحصائية لهذا التوزيع مثل دالة الكمية والعزوم، الإنتروبيا، الدالة المولدة للعزوم مع دراسة بعض الاشكال للتوزيع المقترح. استخدام طريقة الامكان الأعظم لتقدير معلمات التوزيع. يتم تنظيم هذا البحث إلى أجزاء عدة. في الجزء الأول مقدمة عن التوزيع الجديد. في الجزء الثاني مناقشة طريقة توليد التوزيع مع ذكر بعض الدوال المرتبطة بالتوزيع مع الرسومات التوضيحية. ونشتق في الجزء الثالث أهم الخصائص الإحصائية للتوزيع الجديد.أما الجزء الرابع ندرس طريقة الامكان الأعظم لتقدير المعالم. أما في الجزء الخامس مناقشة وعرض أهم النتائج والمعايير الإحصائية وفي الجزء الأخير نختم البحث بالاستنتاجات والتوصيات. سنرمز إلى التوزيع الجديد (MOEEIW) لسهولة الكتابة.

2. التوزيع المقترح MOEEIW: في هذا الجزء، سندرس آلية الحصول على التوزيع الجديد (MOEEIW) ذو الخمس معالم الناتج من تركيب عائلة مارشال اولكين - الاسي المعمم (MOEE) التي قدمها كل من د. منذر والباحث فلاح عام 2020. مع توزيع معكوس ويبل. عائلة (MOEE) لها دالة توزيعية CDF ودالة كثافة PDF على التوالي تأخذ الشكل الآتي:

$$G(x;\lambda,\vartheta,c) = \frac{(1-e^{-\lambda F(x)})^{\vartheta}}{1-\bar{c}(1-(1-e^{-\lambda F(x)})^{\vartheta})}, \quad \dots (1)$$

$$g(x;\lambda,\vartheta,c) = \frac{\lambda\vartheta c\, f(x)\, e^{-\lambda F(x)}(1-e^{-\lambda F(x)})^{\vartheta-1}}{\left[1-\bar{c}\,(1-(1-e^{-\lambda F(x)})^{\vartheta}\right]^2} \quad \dots (2)$$

حيث إن ϑ, λ معلمتي الشكل والقياس على التوالي , $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ و $\bar{c} = 1 - c$.

ولتوزيع معكوس ويبل دالة توزيعية CDF ودالة كثافة PDF على التوالي تأخذ الشكل الآتي:

$$F(x;\beta,\alpha) = e^{-\alpha(x)^{-\beta}} \quad , \quad x > 0\,, \beta, \alpha > 0 \quad \dots (3)$$

$$f(x;\beta,\alpha) = \alpha\,\beta\, x^{-\beta-1} e^{-\alpha(x)^{-\beta}} \quad \dots (4)$$

وبتعويض المعادلة رقم (3) و(4) في المعادلات رقم (1) و(2) نحصل على الدالة التوزيعية CDF ودالة كثافة PDF على التوالي للتوزيع المقترح (MOEEIW) بالشكل:

$$G(x;\lambda,\vartheta,c,\beta,\alpha) = \frac{\left(1-e^{-\lambda\left(e^{-\alpha(x)^{-\beta}}\right)}\right)^{\vartheta}}{1-\bar{c}\left(1-\left(1-e^{-\lambda\left(e^{-\alpha(x)^{-\beta}}\right)}\right)^{\vartheta}\right)}, \quad \dots (5)$$

$$g(x;\lambda,\vartheta,c,\beta,\alpha) = \frac{\lambda\vartheta c\,\alpha\,\beta\, x^{-\beta-1} e^{-\alpha(x)^{-\beta}}\, e^{-\lambda\left(e^{-\alpha(x)^{-\beta}}\right)}\left(1-e^{-\lambda\left(e^{-\alpha(x)^{-\beta}}\right)}\right)^{\vartheta-1}}{\left[1-\bar{c}\,\left(1-\left(1-e^{-\lambda\left(e^{-\alpha(x)^{-\beta}}\right)}\right)^{\vartheta}\right]^2} \quad \dots (6)$$

وبتبسيط دالة الكثافة للتوزيع المقترح (MOEEIW) وتوسيعها نحصل بالصيغة الآتية:

$$g(x) = \psi\alpha\,\beta\, x^{-\beta-1} e^{-\alpha(x)^{-\beta}} e^{-\lambda\left(e^{-\alpha(x)^{-\beta}}\right)[1+k]} \quad \dots (7)$$

Tikrit Journal of Administrative and Economic Sciences, Vol. 19, No. Special Issue, Part (5): 145-159
Doi: www.doi.org/10.25130/tjaes.19.SP3.5.10

$\psi = \sum_{i,j,k=0}^{\infty} c\lambda\vartheta(\bar{c})(-1)^{j+k^i}(i+i)\binom{i}{j}\binom{\vartheta(1+j)-1}{k}\; c,\lambda,\vartheta > 0$ حيث ان

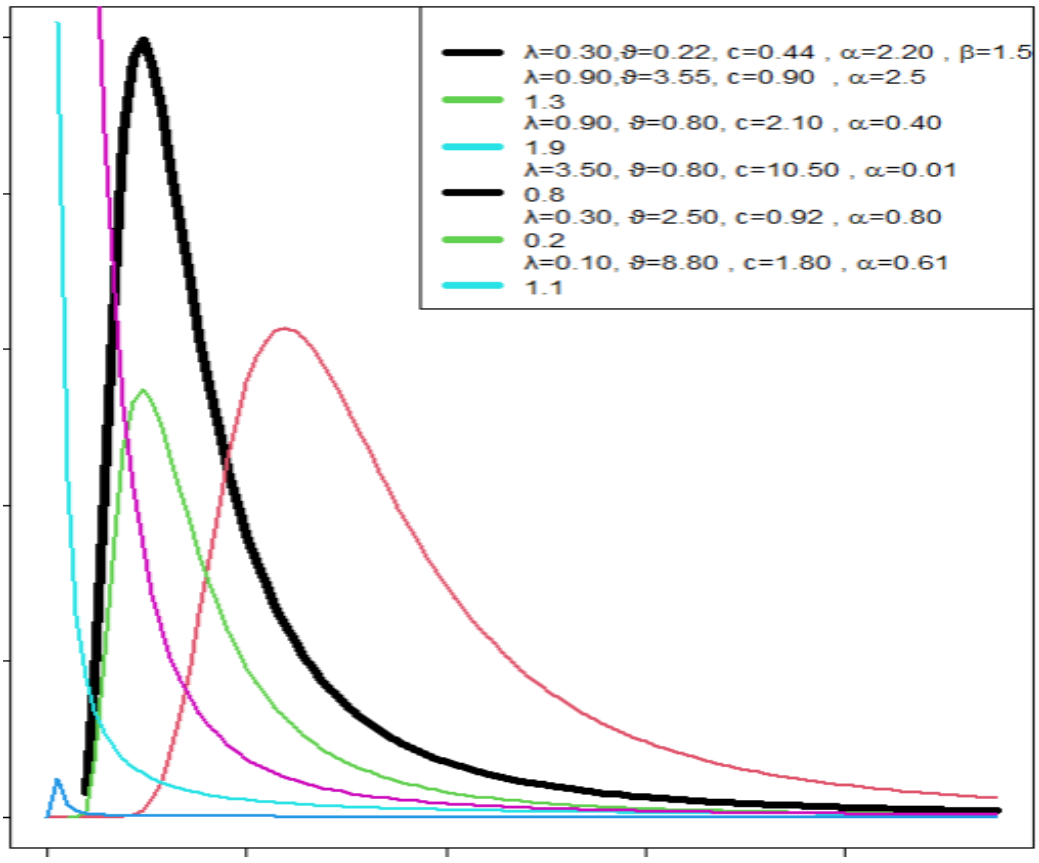
للتوزيع المقترح (MOEEIW) دالة بقاء Survival function (sf) ودالة الخطر hazard rate function (hrf) على التوالي تعطى بالصيغة. Chakraborty and Handique. (2017) .

$$R(x)= 1- G(x) = \frac{1-(1-e^{-\lambda(e^{-\alpha(x)^{-\beta}})})^{\beta}}{1-\frac{\bar{c}}{c}(1-e^{-\lambda(e^{-\alpha(x)^{-\beta}})})^{\beta}} \qquad \ldots(7)$$

$$h(x;\lambda,\vartheta,c,\beta,\alpha) = \frac{g(x;\lambda,\vartheta,c,\beta,\alpha)}{R(x;\lambda,\vartheta,c,\beta,\alpha)}$$

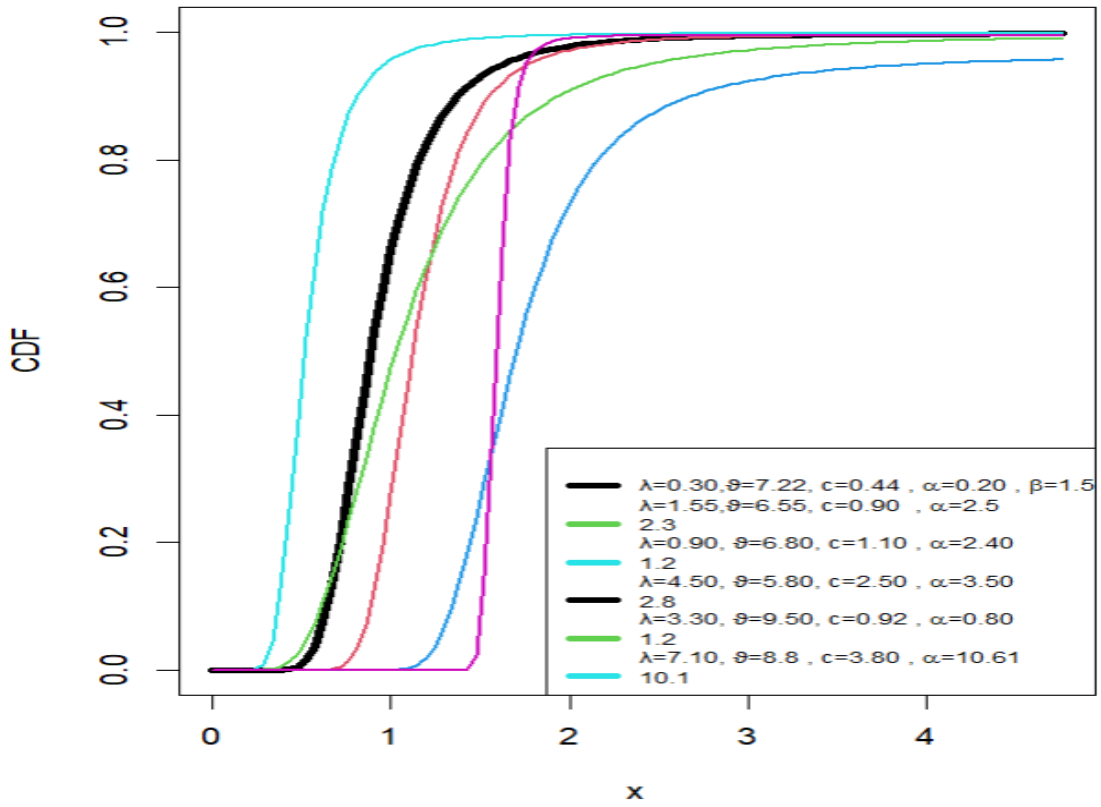
$$= \frac{\vartheta e^{-\lambda}\alpha\,\beta\,x^{-\beta-1}e^{-\alpha(x)^{-\beta}}\left(1-e^{-\lambda(e^{-\alpha(x)^{-\beta}})}\right)^{\vartheta-1}\left[1-\bar{c}(1-e^{-\lambda(e^{-\alpha(x)^{-\beta}})})^{\vartheta}\right]}{\left[1-\bar{c}(1-(e^{-\lambda(e^{-\alpha(x)^{-\beta}})})^{\vartheta})\right]^2\left[1-\frac{\bar{c}}{c}\left(e^{-\lambda(e^{-\alpha(x)^{-\beta}})}\right)^{\vartheta}\right]} \ldots(8)$$

$c,\lambda,\vartheta,\beta,\alpha > 0\,,\bar{c} = 1-c,\; x \geq 0$ حيث



الشكل (1): رسم دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الجديد MOEEIW

Tikrit Journal of Administrative and Economic Sciences, Vol. 19, No. Special Issue, Part (5): 145-159
Doi: www.doi.org/10.25130/tjaes.19.SP3.5.10



الشكل (2): رسم الدالة التراكمية للتوزيع الجديد MOEEIW

الأشكال أعلاه تمثل المنحنيات المتعددة للتوزيع المقترح (MOEEIW) بعد تغير قيم معالم التوزيع حيث نلاحظ أن للتوزيع منحنيات تأخذ شكل مقارب للتوزيع الطبيعي مما يجعل التوزيع الجديد جيد في ملائمة البيانات التي تتجه نحو التوزيع الطبيعي. كما انه يعالج البيانات التي لها التواء بسيط نحو اليمين.

3. خصائص التوزيع الجديد Fundamental Properties of distribution: مناقشة وايجاد بعض الخصائص الرياضية للتوزيع المقترح الجديد المتمثلة بتوسيع التوزيع، العزوم، الدالة المولدة للعزوم، دالة الكمية،، الريني انتروبي.

3.1. توسيع *expansion*: لسهولة التعامل مع دالة الكثافة للتوزيع الجديد المقترح (MOEEIW) لابد من اجراء بعض التبسط عليها. من خلال استخدام بعض المتسلسلات على دالة الكثافة نتوصل إلى الشكل الآتي: Alizadeh et 2015

وبتبسيط دالة الكثافة للتوزيع المقترح (MOEEIW) وتوسيعها نحصل بالصيغة الآتية:

$$g(x) = \psi\alpha\,\beta\,x^{-\beta-1}e^{-\alpha(x)^{-\beta}}e^{-\lambda\left(e^{-\alpha(x)^{-\beta}}\right)[1+k]} \qquad \ldots(9)$$

$$\psi = \sum_{i,j,k=0}^{\infty} c\lambda\vartheta(\bar{c})(-1)^{j+k^{i}}(i+i)\binom{i}{j}\binom{\vartheta(1+j)-1}{k}\; c,\lambda,\vartheta > 0 \text{ حيث إن}$$

$$g(x) = \Theta\alpha\beta\,x^{-\beta-1}\quad (m+1)\,e^{-\alpha(m+1)(x)^{-\beta}}, \qquad \lambda,\vartheta,c,\beta,\alpha, > 0 \quad , x > 0 \qquad \ldots(10)$$

$c,\lambda,\vartheta,\beta,\alpha > 0$ معالم التوزيع المقترح. $\Theta = \sum_{i,j,k,m=0}^{\infty}(\psi)\frac{[\lambda+\lambda k]^{m}}{m!(m+1)}$ حيث

Tikrit Journal of Administrative and Economic Sciences, Vol. 19, No. Special Issue, Part (5): 145-159
Doi: www.doi.org/10.25130/tjaes.19.SP3.5.10

3.2. العزوم moments

العزم ذو الرتبة r حول نقطة الأصل يعطى بالصيغة الآتية: Mnatsakanov, 2008 [9]

$$E(x^r) = \mu_r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)dx$$

وبتعويض الدالة الموسعة للتوزيع الجديد نحصل على الآتي:

$$E(x^r)=\left[\int_0^{\infty} x^r \Theta\alpha\beta\ (m+1)x^{-\beta-1}\ e^{-\alpha(m+1)(x)^{-\beta}}\ dx\right] \qquad (11)$$

بإجراء العمليات الرياضية الآتية: .Artin (2015) [10]

$$y = \alpha(m+1)(x)^{-\beta}$$
$$dy = -\alpha\beta(m+1)(x)^{-\beta-1}dx$$
$$yx^{\beta} = \alpha(m+1)$$
$$x^{\beta} = y^{-1}\alpha(m+1)$$
$$x = y^{-\frac{1}{\beta}}[\alpha(m+1)]^{\frac{1}{\beta}} \qquad (12)$$

نعوض (15) في (14) نحصل على

$$E(x^r)=\Theta[\alpha(m+1)]^{\frac{r}{\beta}}\left[\int_0^{\infty} y^{-\frac{r}{\beta}}\ e^{-y}dy\right]$$
$$E(x^r)=\Theta[\alpha(m+1)]^{\frac{r}{\beta}}\left[\int_0^{\infty} y^{\left(1-\frac{r}{\beta}\right)+1}\ e^{-y}dy\right]$$
$$E(x^r)=\Theta[\alpha(m+1)]^{\frac{r}{\beta}}\ \Gamma\left(1-\frac{r}{\beta}\right) \qquad (13)$$

3.3 الدالة المولدة للعزوم the moments generating function

يمكن تعريف هذه الدالة المولدة للعزوم بالشكل الآتي. ليكن x متغير عشوائي له دالة كثافة احتمالية g(x).فان الدالة الحقيقية المعرفة بالشكل الآتي:

$$M_x(t)=E(e^{tx})$$

يطلق عليه الدالة المولدة للعزوم للمتغير x إذا كان التوقع للقيمة موجود لكل t ضمن الفترة (-h,h) حيث h>0.بشكل عام الدالة المولدة للعزوم ليس لكل المتغيرات العشوائية موجودة ولكن إذا كانت موجودة فأنها تكون وحيدة. نحصل على الدالة المولدة للعزوم للتوزيع المقترح المعطاة بالشكل الآتي:

$$M_x(t) = \int_0^{\infty}\ e^{tx}f(x)\ dx$$
$$M_x(t) = \sum_{h=0}^{\infty}\frac{(t)^h}{hi}\int_0^{\infty}(x)^h\ f(x)\ dx$$

من المعادلة رقم (13) والمعادلة أعلاه مع تبديل r بـh نحصل على الصيغة النهائية للدالة المولدة للعزوم للتوزيع المقترح:

$$M_x(t)= \sum_{h=0}^{\infty}\frac{(t)^h}{hi}\ \Theta[\alpha(m+1)]^{\frac{r}{\beta}}\ \Gamma\left(1-\frac{h}{\beta}\right)$$

Tikrit Journal of Administrative and Economic Sciences, Vol. 19, No. Special Issue, Part (5): 145-159
Doi: www.doi.org/10.25130/tjaes.19.SP3.5.10

ويمكن الحصول على العزم الأول والثاني من خلال الصيغ الآتية.

$$\mu_1 = E(X^1) = \Theta[\alpha(m+1)]^{\frac{1}{\beta}}\,\Gamma\left(1-\frac{1}{\beta}\right)$$

$$\mu_2 = E(X^2) = E(x^r)=\Theta[\alpha(m+1)]^{\frac{2}{\beta}}\,\Gamma\left(1-\frac{2}{\beta}\right)$$

ولإيجاد التباين للتوزيع الجديد. من خلال هذه العزوم يمكننا الحصول على التباين .(variance) Olivares and Paris (2012).

$$Var(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

$$Var(X) = \left(\Theta[\alpha(m+1)]^{\frac{2}{\beta}}\,\Gamma\left(1-\frac{2}{\beta}\right)\right) - \left(\Theta[\alpha(m+1)]^{\frac{1}{\beta}}\,\Gamma\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\right)^2$$

3.4 الدالة الكمية وبعض الخصائص المتعلقة **Quantile Function and Related Concept**:

تقدم الدالة الكمية طريقة جيدة لوصف التوزيعات. إن دراسة هذه الدالة له فوائد حقيقية غير متوفرة مباشرة من خلال دالة الكثافة أو التوزيع. على سبيل المثال، أبسط طريقة لمحاكاة أي متغير عشوائي غير منتظم بتطبيق دالة الكمية على الانحرافات المنتظمة Donald and Hsu (2014). الدالة الكمية (Q (u هي أداة إحصائية تستخدم لتحديد القيمة التي تقسم التوزيع الاحتمالي على أجزاء متساوية أو محددة. على وجه الخصوص دالة الكمية هي معكوس الدالة التراكمية للتوزيع الاحتمالي Abdullah et. 2019. من المعادلة رقم (4) يمكن الحصول على دالة الكمية للتوزيع المقترح بعد تعويض دالة التوزيع التراكمية لتوزيع معكوس ويبل في المعادلة رقم (4) وكما موضح أدناه.

$$F(x)= \frac{-\ln\left[1-\left(\frac{y(1-\bar{c})}{1-\bar{c}y}\right)^{\frac{1}{\vartheta}}\right]}{\lambda}$$

من تعويض دالة CDF لتوزيع معكوس ويبل نحصل على

$$e^{-\alpha(x)^{-\beta}}= \frac{-\ln\left[1-\left(\frac{y(1-\bar{c})}{1-\bar{c}y}\right)^{\frac{1}{\vartheta}}\right]}{\lambda}$$

$$-\alpha(x)^{-\beta} = \ln\left[\frac{-\ln\left[1-\left(\frac{y(1-\bar{c})}{1-\bar{c}y}\right)^{\frac{1}{\vartheta}}\right]}{\lambda}\right]$$

$$(x)^{\beta} = \frac{-\alpha}{\ln\left[\frac{-\ln\left[1-\left(\frac{y(1-\bar{c})}{1-\bar{c}y}\right)^{\frac{1}{\vartheta}}\right]}{\lambda}\right]}$$

Doi: www.doi.org/10.25130/tjaes.19.SP3.5.10

$$(x) = \left[\frac{-\alpha}{\ln\left[\frac{-\ln\left[1-\left(\frac{y(1-\bar{c})}{1-\bar{c}y}\right)^{\frac{1}{\vartheta}}\right]}{\lambda}\right]}\right]^{\frac{1}{\beta}} \qquad (14)$$

حيث $0 < y < 1 ,\lambda, \beta, \alpha, \vartheta, c > 0$ وتمثل معلمات للتوزيع الجديد المقترح. لا تقتصر وظيفة هذه الدالة على دراسة المحاكاة بل يمكن من خلالها ايجاد الوسيط وهو المقدار الذي يقسم التوزيع على نصفين2020 .AbuJarad et . حيث يمكن ايجاد وسيط التوزيع المقترح بوضع y=0.5 في المعادلة رقم (14).

$$Median = \left[\frac{-\alpha}{\ln\left[\frac{-\ln\left[1-\left(\frac{0.5(1-\bar{c})}{1-\bar{c}\,(0.5)}\right)^{\frac{1}{\vartheta}}\right]}{\lambda}\right]}\right]^{\frac{1}{\beta}}$$

ومن خلال دالة الكمية يمكن أن نعرف نوع ومقدار كل من التفلطح والالتواء للتوزيع المقترح. حيث يعرف مقياس الالتواء بؤلي .Kenney and Keeping (1954) الذي يتعمد في مقياس الالتواء على دالة الكمية ويعطى بالصيغة الآتية:

$$S = \frac{Q\left(\frac{3}{4}\right)+Q\left(\frac{1}{4}\right)-2Q\left(\frac{1}{2}\right)}{Q\left(\frac{3}{4}\right)-Q\left(\frac{1}{4}\right)}$$

حيث $Q\left(\frac{1}{4}\right), Q\left(\frac{1}{2}\right)$ و$Q\left(\frac{3}{4}\right)$تمثل الربيع الاول والثاني والثالث على الوالي. هناك ثلاثة أنواع من الالتواء فاذا كانت قيمة S أكبر من الصفر فأن الاتواء موجب ويكون نحو اليمين وإذا كانت قيمة S سالب فأن الالتواء سالب ويكون نحو اليسار أما إذا كانت قيمة S تساوي صفر فان المنحنى متناظر ولا يوجد التواء. كما يمكن أن نوجد مقدار التفلطح من الصيغة والتي تعتمد هي كذلك على دالة الكمية:

$$k = \frac{Q\left(\frac{3}{8}\right)-Q\left(\frac{1}{8}\right)+2Q\left(\frac{7}{8}\right)-Q\left(\frac{5}{8}\right)}{Q\left(\frac{6}{8}\right)-Q\left(\frac{2}{8}\right)}$$

للتفلطح ثلاثة أنواع من المنحنيات فمنها المدبب والمفلطح والمعتدل فإذا كانت قسمة K أكبر من 3 فإن المنحنى مدبب وإذا كانت قيمة K اقل من 3 فالمنحنى يكون مفلطح اما اذا كانت قيمة K تساوي 3 فإن المنحنى يكون معتدل.ويمكن أن تعرض النتائج في الفصل الثالث والتعرف على أنواع الالتواء وأنواع التفلطح للتوزيع المقترح.

3.5.1.9 ريني انتروبي

تعريف الانتروبيا على أنها مقياس درجة عدم اليقين أو الاضطراب بنظام ما بالأخص تعرف الانتروبيا الاحصائية على أنها احتمال الشكوك في نتيجة تجربة عشوائية. وللأنتروبيا تطبيقات واسعة من هذه التطبيقات هي في علم المياه والموارد المائية، تحليلات التردد، تقدير المعالم، نمذجة مستجمعات المياه، التنبؤ بالتدفق، التحليل الطيفي، تقييم أداء النموذج، تصميم الشبكات، وغيرها من التطبيقات. من خلال الصيغة العامة لمفهوم الانتروبي Handique et. 2019.

$$I_R(S) = (1-\rho)^{-1} log \int_0^{\infty} [g(x))]^{\rho} dx$$

$$\mathrm{I_R(\rho)= (1-\rho)^{-1}\psi^{\rho}\ log\{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^{\rho}(f(x))^{\rho} e^{-\lambda F(X)[\rho+\rho k]}\ dx\}}$$

$$\mathrm{I_R(\rho)= (1-\rho)^{-1}\psi^{\rho}\ log\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \left(\alpha\ \beta\ x^{-\beta-1}e^{-\alpha(x)^{-\beta}}\right)^{\rho} e^{-\lambda\left(e^{-\alpha(x)^{-\beta}}\right)[\rho+\rho k]}\ dx\right\}}$$

$$\mathrm{I_R(\rho)= (1-\rho)^{-1}\psi^{\rho}\ log\left\{\int_{-\infty}^{\infty} (\alpha\ \beta)^{\rho}\ x^{-\rho(\beta+1)}e^{-\alpha\rho(x)^{-\beta}} e^{-\lambda\left(e^{-\alpha(x)^{-\beta}}\right)[\rho+\rho k]}\ dx\right\}}$$

$$\psi = \sum_{i,j,k=0}^{\infty} c\lambda\vartheta(\bar{c})(-1)^{j+k^i}(i+i)\binom{i}{j}\binom{\vartheta(1+j)-1}{k}, \rho>0, \rho\neq 1 \text{ حيث}$$

$$\mathrm{I_R(\rho)= (1-\rho)^{-1}\psi^{\rho}\ log\left\{\int_{-\infty}^{\infty} (\alpha\ \beta)^{\rho}\ x^{-\rho(\beta+1)}e^{-\alpha\rho(x)^{-\beta}} e^{-\lambda\left(e^{-\alpha\rho(x)^{-\beta}}\right)[\rho+\rho k]}\ dx\right\}}$$

$$\mathrm{I_R(\rho) = (1-\rho)^{-1}\psi^{\rho}\ log\ \int_0^{\infty} (\alpha\ \beta)^{\rho}\ x^{-\rho(\beta+1)}\ e^{-\alpha\rho(1+m)(x)^{-\beta}} \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-\lambda\rho[1+k])^m}{m!}\ dx}$$

$$\mathrm{I_R(\rho) = (1-\rho)^{-1}\psi^{\rho}\ log\ \left[\int_0^{\infty} (\alpha\ \beta)^{\rho}\ x^{-\rho(\beta+1)}\ e^{-\alpha\rho(1+\ m)(x)^{-\beta}}\right]\ dx} \quad (15)$$

$$\delta = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha\ \beta)^{\rho}(-\lambda\rho[1+k])^m}{m!}$$

نفرض $y= \alpha\rho(1+\ m)(x)^{-\beta}$ وبأجراء بعض التبسيط نحصل على

$$x = \left(\alpha\rho(1+\ m)\right)^{\frac{1}{\beta}}\ y^{-\frac{1}{\beta}}$$

$$dx = \left(\alpha\rho(1+\ m)\right)^{\frac{1}{\beta}}\ y^{-\frac{1}{\beta}-1}dy$$

نعوض كل من $y.x, dx$ في المعادلة رقم (18)

Doi: www.doi.org/10.25130/tjaes.19.SP3.5.10

$$I_R(\rho) = (1-\rho)^{-1}\psi^{\rho}\log\left[\int_0^{\infty}\left[(\alpha\rho(1+m))^{\frac{1}{\beta}}\ y^{-\frac{1}{\beta}}\right]^{-\rho(\beta+1)}(\alpha\rho(1+m))^{\frac{1}{\beta}}\ y^{-\frac{1}{\beta}-1}dy\ e^{y}\right]dx$$

$$I_R(\rho) = (1-\rho)^{-1}\psi^{\rho}\log\left[\int_0^{\infty}\left[(\alpha\rho(1+m))^{-\left(\rho+\frac{\rho}{\beta}\right)+\frac{1}{\beta}}\right]\right] y^{\frac{-\rho}{\beta}(\beta+1)}\ y^{-\frac{1}{\beta}-1}dy$$

$$I_R(\rho) = (1-\rho)^{-1}\psi^{\rho}\log\left[\int_0^{\infty}\left[(\alpha\rho(1+m))^{-\left(\rho+\frac{\rho}{\beta}\right)+\frac{1}{\beta}}\right] y^{1-\left(\rho+\frac{\rho}{\beta}+\frac{1}{\beta}+1\right)-1}\ e^{-y}\right]dy$$

$$I_R(\rho)=\left[(\alpha\rho(1+m))^{-\left(\rho+\frac{\rho}{\beta}\right)+\frac{1}{\beta}}\right]\Gamma\left(1-\left(\rho+\frac{\rho}{\beta}+\frac{1}{\beta}+1\right)\right)$$

4. التقدير maximum likelihood estimation: في هذا الجزء، ندرس طريقة الامكان الأعظم لتقدير (MLE) Al Abbasi et. 2019 بمعالم التوزيع غير المعروفة من عينات كاملة. تتم مناقشة هذه الطريقة الحصول على MLEs من معلمات التوزيع المقترح MOEEIW. هناك العديد من الطرق لتقدير المعالم لكن. من بين هذه الأساليب تعتبر طريقة الامكان الأعظم الأكثر شيوعًا في الاستخدام. حيث تتميز طريقة MLEs بخصائص جيدة يمكن استخدامها لبناء فترات الثقة والمناطق وتحديد نوع الاختبار الإحصائي. افرض أن $x_1, x_2, \ldots, x_n$ متغيرات عشوائية تتبع التوزيع المقترح MOEEIW. Oguntunde et. 2018 فإن دالة الامكان تعطى بالشكل الآتي:

$$L = = \prod_{i=1}^{n} g(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda, \vartheta, c, \alpha, \beta)$$

$$= \prod_{i=0}^{n}\left\{\frac{\lambda\vartheta c\, f(x)\, e^{-\lambda F(x)}(1-e^{-\lambda F(x)})^{\vartheta-1}}{\left[1-\bar{c}\,(1-(1-e^{-\lambda F(x)})^{\vartheta}\right]^2}\right\} L$$

$$L = \frac{\lambda^n\vartheta^n c^n[f(x)]^n e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}F(x)}\left[1-e^{-\lambda F(x)}\right]^{n(\vartheta-1)}}{[1-\bar{c}\,(1-(1-e^{-\lambda F(x)})^{\vartheta})]^{2n}}$$

وبأخذ اللوغارتم لطرفي المعادلة الأخيرة نتوصل إلى الشكل الآتي:

$$log\, L = \ nlog\,\lambda + n\ \ log\,\vartheta + n\,log\,c + n\,log[f(x)] - \lambda\sum_{i=1}^{n}F(x) + n(\vartheta-1)log\left[1-e^{-\lambda F(x)}\right] - 2nlog\left[1-\bar{c}(1-(1-e^{-\lambda F(x)})^{\vartheta})\right]$$

وبأدخال المعادلات رقم (7) و(8) في المعادلة أعلاه نحصل على المعادلة الآتية:

$$nlog\,\lambda + n\ \ log\,\vartheta + n\,log\,c + log\,L = n\,log\left[\alpha\,\beta\,x^{-\beta-1}e^{-\alpha(x)^{-\beta}}\right] - \lambda\sum_{i=1}^{n}\left(e^{-\alpha(x)^{-\beta}}\right) + n(\vartheta-1)log\left[1-e^{-\lambda\left(e^{-\alpha(x)^{-\beta}}\right)}\right] - 2nlog\left[1-\bar{c}(1-(1-e^{-\lambda\left(e^{-\alpha(x)^{-\beta}}\right)})^{\vartheta})\right] \ldots (16)$$

بأخذ المشتقات الجزئية للمعادلة اعلاه بالنسبة $\beta, \alpha, c, \vartheta, \lambda$ على التوالي ومن ثم جعل المعادلة الناتجة من الاشتقاق تساوي الصفر ولصعوبة حل المعادلات الناتجة بالطرق المعتادة الاحصائي، نحصل على تقديرات لمعالم التوزيع المقترح باستخدام برنامج R الاحصائي Faris and Khaleel 2022.

5. **التطبيق Application**: سنعرض الجانب التطبيقي للتوزيع MOEEIW للبيانات، وقد تم استخدام البيانات الخاصة بالألياف الزجاجية 1.5 سم والتي تم الحصول عليها من المختبر الفيزيائي الوطني البريطاني. تم استخدام هذا البيانات سابقًا من قبل باحثين عدة Smith and Naylor. تعطى البيانات على النحو الآتي.

"0.55, 0.74, 0.77, 0.81, 0.84, 1.24, 0.93, 1.04, 1.11, 1.13, 1.30, 1.25, 1.27, 1.28, 1.29, 1.48, 1.36, 1.39, 1.42, 1.48, 1.51, 1.49, 1.49, 1.50, 1.50, 1.55, 1.52, 1.53, 1.54, 1.55, 1.61, 1.58, 1.59, 1.60, 1.61, 1.63, 1.61, 1.61, 1.62, 1.62, 1.67, 1.64, 1.66, 1.66, 1.66, 1.70, 1.68, 1.68, 1.69, 1.70, 1.78, 1.73, 1.76, 1.76, 1.77, 1.89, 1.81, 1.82, 1.84, 1.84, 2.00, 2.01, 2.24"

الجدول (1): الوصف الاحصائي للبيانات

n	min	max	skew	kurtosis	median	mean	range
63	0.55	2.24	-0.88	0.8	1.59	1.51	1.69

الجدول (2): نتائج ملائمة البيانات الحقيقية مع توزيع MOEEIW والمقارنة مع التوزيعات الأخرى

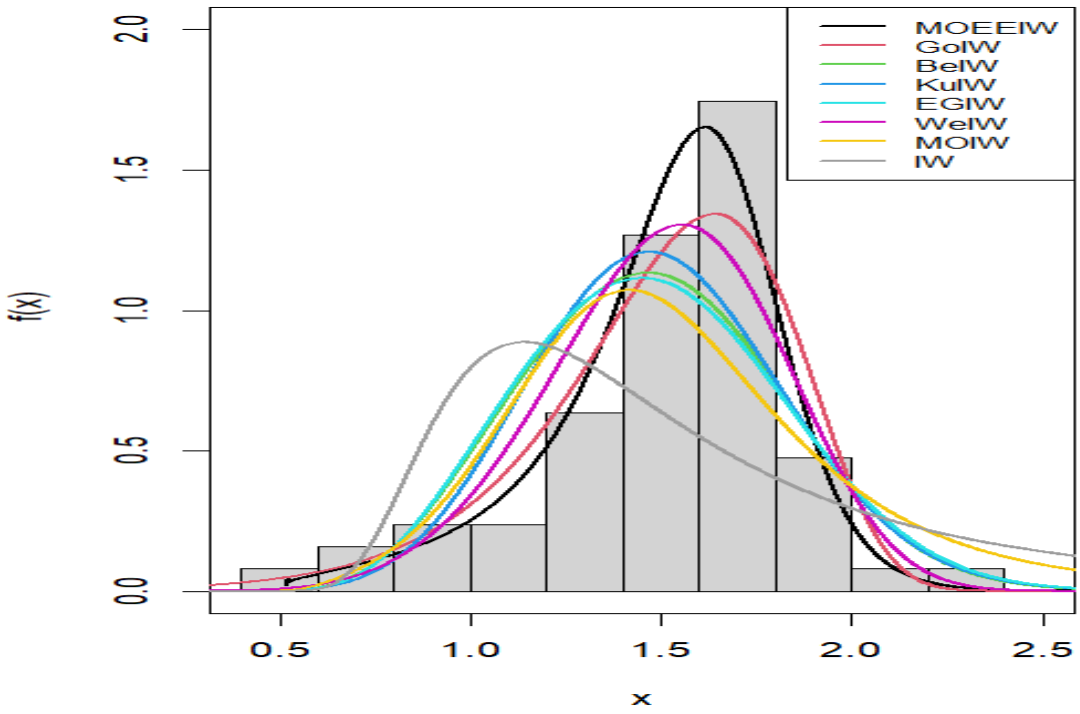
models		MOEEIW	GoIW	BIW	KuIW	EGIW	WeIW	MOIW	IW
Criteria values	KS	0.9	0.126	0.22	0.205	0.22	0.163	0.199	0.24
	p-value	0.56	0.268	0.003	0.009	0.003	0.068	0.013	0.001
	NLL	11.04	14.34	21.16	20.77	22.19	16.08	26.12	46.85
Estimation Parameters	$\hat{\beta}$	0.07	0.47	0.39	2.93	59.86	10.75	120.32	1.96
	$\hat{\alpha}$	36.03	91.85	87.81	326.3	0.41	0.16	0.100	2.88
	$\hat{c}$	27.29	3.49	11.23	2.93	10.33	2.15	6.20	
	$\hat{\lambda}$	9.64	0.38	1.45	0.84	1.55	0.25		
	$\hat{\vartheta}$	2.19							
Criteria Values	AIC	32.08	36.68	50.33	49.54	52.39	40.17	58.42	97.70
	CAIC	33.13	37.37	51.02	50.22	53.08	40.86	58.83	97.90
	BIC	42.79	45.25	58.90	58.11	60.96	48.74	64.85	101.99
	HQIC	36.29	40.05	53.70	52.91	55.76	43.54	60.95	99.39
	w	0.05	0.15	0.47	0.45	0.50	0.27	0.62	1.22
	A	0.34	0.86	2.56	2.50	2.76	1.52	1.52	6.48

Tikrit Journal of Administrative and Economic Sciences, Vol. 19, No. Special Issue, Part (5): 145-159
Doi: www.doi.org/10.25130/tjaes.19.SP3.5.10

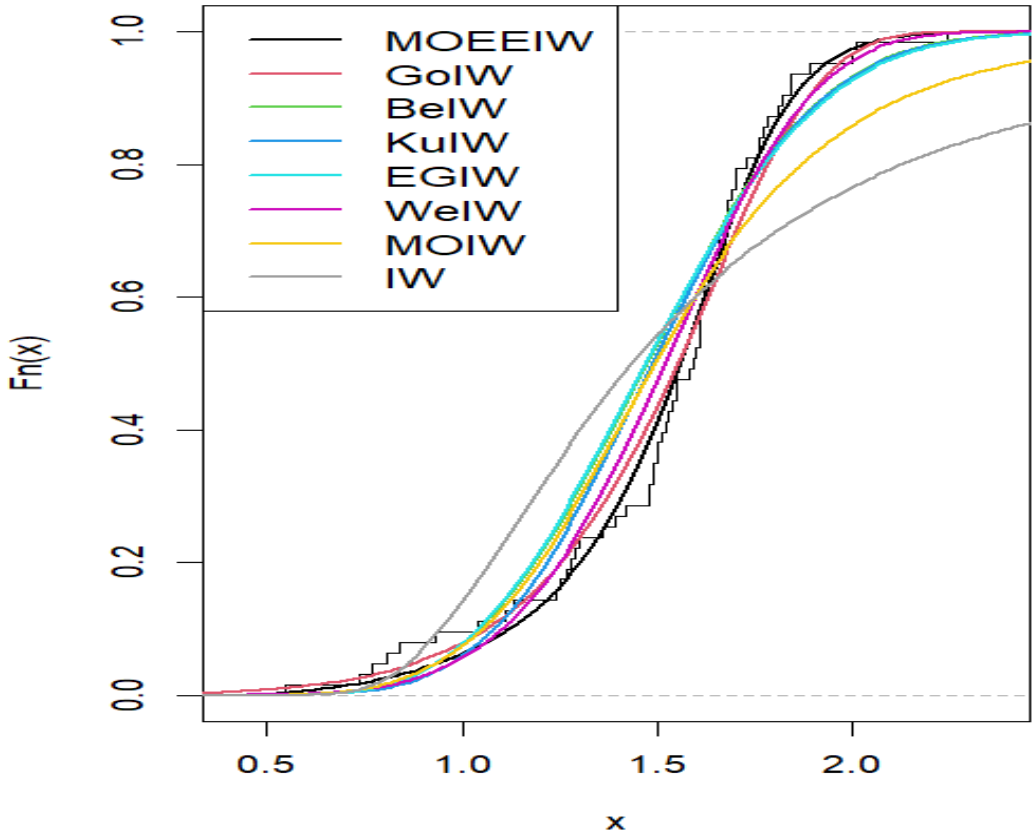
وتم ايجاد مقدرات لمعالم التوزيع المقترح MOEEIW مع بعض التوزيعات القريبة من التوزيع المقترح بطريقة الامكان الأعظم التي ظهرت في الجدول رقم (2). استخدمت بعض المعايير الاحصائية الأكثر استخداما في تقييم النماذج مثل:A, w, HQIC, BIC, CAIC, AIC . لغرض مقارنة أداء التوزيع MOEEW مع التوزيعات المختارة الأخرى، والتي يتم حسابها من تطبيق النماذج على البيانات، ويتم ذلك كله عن طريق حزم خاصة في برامج R.، فكلما كانت قيمة هذه المقاييس الإحصائية قليلة تدل على مدى ملائمة التوزيع للبيانات المستخدمة Ibrahim and Khaleel (2018). [24]. يظهر الجدول الآتي النتائج التي يعتمد عليها في اختيار التوزيع الافضل من بين التوزيعات المدروسة والتوزيعات الأخرى مثل

Distribution, Kumaraswamy-Weibul-Inverse Weibull, Beta -Weibull, Gompertz -Inverse Weibull, Weibull- Inverse Weibull. Gompertz -Inverse Weibul Exponential

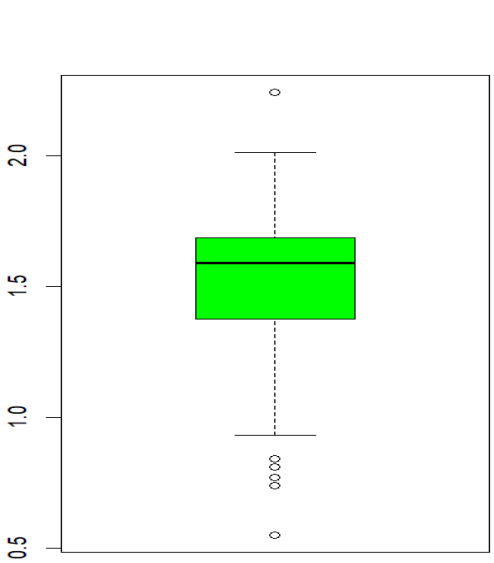
في مدى أفضلية الملائمة لهذه البيانات. استنادًا إلى قيم المعايير المستخدمة لاختيار التوزيع، يُعتبر توزيع MOEEIW أفضل مرونة وملائمة نظرًا لأنه يحتوي على أدنى قيم للمعايير التي تدعم جودة اختبارات الملائمة التي تم إجراؤها باستخدام اختبارات Anderson-Darling (AD) و Kolmogorov-Smirnov (KS) أيضًا هذا الاستنتاج مبين بالقيم p الواردة في الجدول رقم (1) كما يمكن اعطاء رسم توضيحي لمنحنيات دالة الكثافة للتوزيع التي تم مقارنتها مع التوزيع المقترح ويظهر الشكل رقم (1) مدى تطابق التوزيعات المستخدمة في البحث مع المدرج التكراري للبيانات المدروسة وتبين أن التوزيع MOEEIW له تطابق ومدى ملائمة عالية للبيانات أكثر من التوزيعات الاخرى مما يدل على فعالية هذا التوزيع في نمذجة بيانات من هذ النوع في العديد من المجالات.



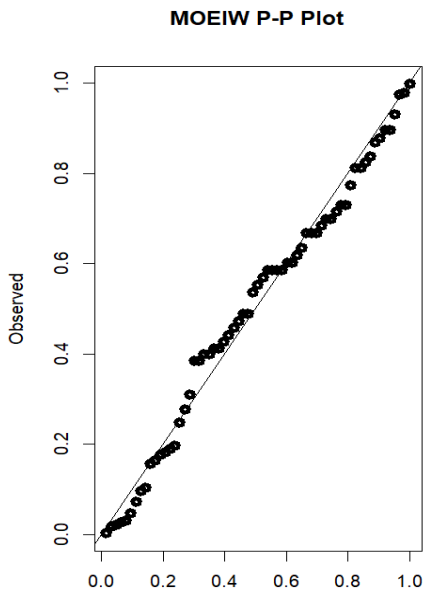
الشكل (3): المدرج والمنحني التكراري للتوزيع المقترح والتوزيعات الأخرى لبيانات الحقيقة



الشكل (4): منحني الدالة التراكمية للتوزيع MOEEIW وتوزيعات المقارنة للبيانات الحقيقية



box plot (6) الشكل



P-P Plot (5) الشكل

6. الاستنتاجات والتوصيات Conclusions and recommendations: تلعب التوزيعات الإحصائية دورًا حاسمًا في الاستدلالات والتطبيقات لتناسب ظواهر العالم الحقيقي المتقدم. في هذه الدراسة اقترح توزيع جديد يطلق عليه مارشال أولكين الاسي المعمم وتم تطبيقه على بيانات حقيقة

مأخوذة من الوقع واستخدمت توزيعات عدة أخرى في البحث لمعرفة مدى ملائمة التوزيع المقترح MOEEIW مع هذه التوزيعات. ومن خلال النتائج الظاهرة في العملي يتضح افضلية التوزيع الجديد على التوزيعات المقارنة معه وقابيله التوزيع ومرونته الكبيرة في نمذجة بيانات من هذا النوع. وبالتالي، يمكن اعتباره نموذجًا جيدا مع تطبيقات محتملة في مجالات مثل الهندسة وعلم الأحياء والطب. يمكن لمزيد من الدراسات استكشاف الخصائص الإحصائية الأخرى للتوزيع وإجراء دراسات المحاكاة للتحقق من أدائها.

المصادر

1. Abdullah, Z. M., Hameed, M., Hisham, M., & Khaleel, M. A., (2019), Modified new conjugate gradient method for Unconstrained Optimization. Tikrit Journal of Pure Science, 24(5), 86-90.
2. AbuJarad, M. H., Khan, A. A., Khaleel, M. A., AbuJarad, E. S., AbuJarad, A. H., & Oguntunde, P. E., (2020), Bayesian reliability analysis of Marshall and Olkin model. Annals of Data Science, 7, 461-489.
3. Ahmed, M. T., Khaleel, M. A., & Khalaf, E. K., (2020), The new distribution (Topp Leone Marshall Olkin-Weibull) properties with an application. Periodicals of Engineering and Natural Sciences, 8(2), 684-692.
4. Ahmedd, M. T., (2019), Exponential Distribution (Topp Leone Marshall-Olkin) Properties with Application. Tikrit Journal of Administration and Economics Sciences, 15(47 Part 2), 242-255.
5. Al Abbasi, J. N., Khaleel, M. A., Abdal-hammed, M. K., Loh, Y. F., & Ozel, G., (2019), A new uniform distribution with bathtub-shaped failure rate with simulation and application. Mathematical Sciences, 13, 105-114
6. Alizadeh, M., Cordeiro, G. M., De Brito, E., & Demétrio, C. G. B., (2015), The beta Marshall-Olkin family of distributions. Journal of Statistical Distributions and Applications, 2(1), 4.
7. Artin, E., (2015), The gamma functions. Courier Dover Publications
8. Chakraborty, S., & Handique, L., (2017), The generalized Marshall-Olkin-Kumaraswamy-G family of distributions. Journal of data Science, 15(3), 391-422.
9. Donald, S. G., & Hsu, Y. C., (2014), Estimation and inference for distribution functions and quantile functions in treatment effect models. Journal of Econometrics, 178, 383-397.
10. Faris, R. W., & Khaleel, M. A., (2022, November), Theory and application of the truncated exponential Marshall olkin gamma distribution: A model bounded on [0, 1] support. In AIP Conference Proceedings (Vol. 2394, No. 1, p. 070010). AIP Publishing LLC.
11. Gupta, R. C., Gupta, P. L., & Gupta, R. D., (1998), Modeling failure time data by Lehman alternatives. Communications in Statistics-Theory and methods, 27(4), 887-904
12. Handique, L., Chakraborty, S., & de Andrade, T. A., (2019), The Exponentiated Generalized Marshall–Olkin Family of Distribution: Its Properties and Applications. Annals of Data Science, 6(3), 391-411

13. Ibrahim, N. A., & Khaleel, M. A., (2018), Exponentiated Kumaraswamy Exponentiated Weibull Distribution with Application. Jurnal Karya Asli Lorekan Ahli Matematik Vol, 11(1), 015-022
14. Kenney, J. F., & Keeping, E. S., (1954), Mathematics of Statistics-Part One, 3 D. Van Nos-trand Company Inc.
15. Malinova, A., Rahneva, O., Terzieva, T., & Angelova, E. Investigations on A" Exponential–Exponentiated–Exponential" Growth Model. Neural, Parallel, and Scientific Computations, 27, 177-184
16. Marshall, A. W., & Olkin, I., (1997), A new method for adding a parameter to a family of distributions with application to the exponential and Weibull families. Biometrika, 84(3), 641-652.
17. Mnatsakanov, R. M., (2008), Hausdorff moment problem: Reconstruction of probability density functions. Statistics & probability letters, 78(13), 1869-1877.
18. Oguntunde, P. E., Khaleel, M. A., Adejumo, A. O., Okagbue, H. I., Opanuga, A. A., & Owolabi, F. O., (2018), The Gompertz inverse exponential (GoIE) distribution with applications. Cogent Mathematics & Statistics, 5(1), 1507122.
19. Olivares, S., & Paris, M. G., (2012), About the probability distribution of a quantity with given mean and variance. Metrologia, 49(3), L14.
20. R. L. Smith and J. C. Naylor, "A comparison of maximum likelihood and bayesian estimators for the three-parameter weibull distribution," Applied Statistics, vol. 36, pp. 258–369, 1987
21. Yousof, H. M., Rasekhi, M., Alizadeh, M., & Hamedani, G. G., (2018), The Marshall-Olkin exponentiated generalized G family of distributions: properties, applications and characterizations. Journal of Nonlinear Sciences