التوزيع الأسي الاحتمالي (توب ليون مارشال اولكن TLMOE) خصائص وتطبيق

الباحثة: إيمان خالد خلف
كلية التربية للعلوم الصرفة
جامعة تكريت
emank6827@gmail.com

أ.د. محمد طه أحمد
كلية التربية للعلوم الصرفة
جامعة تكريت
mohta.taha@gmail.com

أ.م.د. منذر عبدالله خليل
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
جامعة تكريت
mun880088@tu.edu.iq

المستخلص:

نقترح في هذا البحث تعميم جديد ثم توزيع جديد من توزيعات العائلة:

Topp Leone Marshall-Olkin-G family

تحت اسم:

(Topp Leone Marshall-Olkin Exponential distribution: TLMOE).

يحتوي التوزيع الجديد على ثلاث معلمات لذلك يمتاز بمرونة عالية لتوافق أنواع مختلفة من البيانات. يعطي التوزيع الجديد اشكال بيانية لدالة الكثافة الاحتمالية مثل متماثلة الشكل او معكوسة الحرف J او الملتوية لليمين. ويمكن أن يكون لمنحني دالة المخاطرة شكل يشبه احادي النموذج (متزايد او متناقص) أو الاسي. تم توسيع أو اعادة صياغة دالة الكثافة الاحتمالية وايجاد بعض الخصائص الرياضية والاحصائية بما في ذلك الدالة الكمية والعزوم الاعتيادية والدالة المولدة للعزوم وكذلك الحصول على الإحصاءات المرتبة والانتروبي. وقد قدرت معلمات التوزيع بطريقة الإمكان الأعظم. ولبيان مرونة وقابلية التوزيع الجديد على البيانات طبق هذا التوزيع على بيانات حقيقية طبية لأمراض سرطان الثدي من أحد المستشفيات، حيث اثبت التوزيع الجديد ملائمة عالية للبيانات الحقيقية بالمقارنة مع بعض التوزيعات المعروفة.

الكلمات المفتاحية: عائلة مارشال اولكن توب ليون، العزوم، طريقة الامكان الأعظم MLE، التوزيع الاسي، التوزيع الاسي الاحتمالي TLMOE.

Exponential Distribution (Topp Leone Marshall-Olkin) Properties with Application

Researcher: Eman k. khalaf
College of Education for pure Sciences
Tikrit University

Prof. Dr. Mohammed T.Ahmedd
College of Education for pure Sciences
Tikrit University

Assist. Prof. Dr. Mundher A. khaleel
College of Computer Science and Mathematics
Tikrit University

Abstract:

We introduce in this paper a new generalized distribution for the distribution family Topp Leone Marshall Olkin-G family under named Topp Leone Marshall Olkin Exponential distribution (TLMOE). This new distribution has three parameter and it has very flexibility for fitting many different datasets. A new distribution give flexibility

shapes the probability density function as shape symmetrical or reversed or right-skewed. The hazard function can be given to the shape of a monolithic model (increasing or decreasing) and exponential. The probability density function was expanded and some mathematical and statistical characteristics were found including the quntial function, the normal moment, the generating function of the Entropy. the parameters of the distribution were estimated by the Maximum likelihood method. To demonstrate the flexibility and new scalability of the data, this distribution was applied to real medical data on breast cancer from a hospital, where the new distribution demonstrated a high correlation with real data compared with some known distributions.

Keywords: Topp Leone Marshall Olkin-G family, Moment, Maximum likelihood estimation (MLE), exponential distribution, TLMOE.

١. المقدمة Introduction:

اتجهت البحوث الحديثة في السنوات الاخيرة الى ايجاد عائلات جديدة من التوزيعات المستمرة. يتم الحصول على هذه العوائل الجديدة عن طريق أضافة واحدة أو أكثر من معلمات الشكل الزائدة الى التوزيع الأساسي (Topp Leone Marshall-Olkin) ان الهدف من هذا هو الحصول على مزيد من المرونة للتوزيع الاحصائي الجديد ليكون أكثر ملائمة في تحليل البيانات الحقيقية في مجالات مختلفة مثل العلوم الطبية والهندسية الزراعية والاقتصاد والمالية والعلوم البيئية. في السنوات الأخيرة قام الكثير من الباحثين بتوليد العديد من العوائل منها بإضافة معلمة شكل ومنها بإضافة معلمتين شكل والقليل بإضافة ثلاث معالم.

ونود الاشارة ان الباحثين يعتقدون ان الكثير من التوزيعات الاحتمالية الموجودة لا تستطيع وصف جميع أنواع البيانات الحقيقية للظواهر المختلفة بدقة عالية وبدرجات متباينة، ولهذا يتم دراسة اقتراحات لإيجاد انماط من توزيعات جديدة ذات ميزات أفضل ولها مرونة عالية من حيث التطبيق والوصف على البيانات الحقيقية ولهذا جاء بحثنا بهذا الاتجاه، حيث يمكن ان يدرس هذا التوزيع أنواع مختلفة من البيانات الحقيقية مثل البيانات الملتوية من اليمين او الملتوية من اليسار او المتماثلة.

ان الهدف من البحث هو توليد عائلة جديدة من التوزيعات الاحتمالية النوع المستمر بإضافة معلمتي شكل ويدعى هذا التوزيع الجديد بتوزيع:

Topp Leone Marshall-Olkin Exponential distribution

باستخدام عائلة:

Topp Leone Marshall-Olkin -G (TLMO-G) family

ودراسة بعض الخصائص الرياضية وكذلك اثبات ان التوزيع الجديد هو أكثر مرونة وملائمة لبيانات الحقيقية من التوزيعات الأخرى.

ان هذا البحث تم تقسيمة الى عدة اقسام كالتالي، القسم الأول المقدمة والثاني الدراسات السابقة والثالث عائلة (Topp Leon Marshall Olkin-G family) والقسم الرابع سوف يتم انشاء التوزيع الجديد سمي بتوزيع:

(Topp Leone Marshall-Olkin Exponential distribution: TLMOE).

وفي القسم الخامس احتوى على توسيع الدالة (CDF) ودالة (PDF)، أما القسم السادس فتضمن بعض الخصائص الرياضية مثل دالة الكمية، وتوليد العزوم، ودالة المولدة للعزوم، Entropy، الإحصاءات المرتبة، والقسم السابع تضمن طريقة الإمكان الأعظم لتقدير معالم النموذج، وفي القسم الثامن تم اجراء التطبيق على البيانات، اما القسم التاسع فقد تضمن الاستنتاجات التي توضحت لنا من تطبيق البيانات.

٢. الدراسات السابقة Historical background:

لقد تابع الباحثين في مجال التوزيعات الاحتمالية، سلوك مختلف الظواهر، واهتموا بنمذجة البيانات، واكتشفوا تأثير معالم الشكل والقياس على العديد من النماذج التي تلائم سلوك تلك الظواهر.

قام كل من الباحثين (Marshall and Olkin., 1997, 4) بتوليد عائلة جديدة من خلال اضافة معلمة شكل واحدة الى التوزيع الأساسي اسموها Marshall-Olkin-G family.

وفي عام 1997 تم توسيع عائلة مارشال اولكن Extension Marshall Olkin لكل من الباحثين (Marshall and Olkin., 1997, 4).

وقدم كل من الباحثين (Gupta et al., 1998, 2) تعميم العائلة الاسية Exponential-G وذلك بإضافة معلمة شكل على التوزيع الاساسي.

واقترح كل من (Eugene et al., 2002, 1) طريقة جديدة لتوليد التوزيعات المستمرة وذلك بالاستناد على (logic of a beta)، وأطلقوا علية عائلة التوزيع (Beta-G) حيث تم إضافة معلمتين شكل الى التوزيع الاساسي.

قام كل من الباحثين (Cordeiro & de Castro., 2011, 5) بإضافة معلمتين الى التوزيع الأساسي حيث استعملوا توزيع Kumaraswamy على الفترة (٠،١)، لتوليد عائلة توزيع أطلق عليها (Kumaraswamy-G).

كما ان العديد من العوائل تم دراستها من قبل الباحثين منها العائلة اللوجستية للباحثين (Torabi and Hedesh., 2012, 3) في عام ٢٠١٢ و كذلك تعميم العائلة الاسية (G-EXP) في عام ٢٠١٣ للباحثين (Cordeiro et al., 2013,4).

توسيع عائلة مارشال اولكن للباحثين (Alshangiti et al.,2014 ,1) كان في عام 2014. وقد اقترح كل من الباحثين (Bourguignon et al., 2014, 5) دراسة عائلة عامة من توزيعات أحادية بمعلمتين إضافية.

تعتبر عائلة توب-ليون عائلة جديدة نسبيا وقد قام بعض الباحثين بعدة دراسات حول هذه العائلة من خلال اشتقاق خصائصها وعلاقتها مع بعض العوائل والتوزيعات الاخرى على سبيل المثال:

Topp Leon generator distribution (Sangasanit and Bodhisuean., 2016, 2), Topp Leone G family (Al-Shomrani et al., 2016, 4), Topp Leone Burr XII distribution (Reyad et al.,2018, 3).

٣. عائلة التوزيعات Topp Leon Marshall Olkin–G family (TLMO-G):

لقد اقترحنا تعميم لعائلة التوزيعات TLMO-G، والتي على اساسها تكون الدالة التراكمية التوزيعية $F(x;\alpha,b,\phi)$ يرمز لها (CDF) و $f(x;\alpha,b,\phi)$ تمثل دالة الكثافة الاحتمالية (PDF)

ودالة البقاء (Survival Function) $R(x;\alpha,b,\phi)$ ودالة المخاطرة (hazard function) $h(x;\alpha,b,\phi)$ لأي متغير عشوائي بمتجه (ϕ) من المعالم للمتغير العشوائي X للعائلة TLMO-G تعطي على التوالي حسب الصيغ التالية :

$$F(x;\alpha,b,\phi)=\left[1-\left(1-\frac{\alpha\bar{M}(x;\phi)}{1-\bar{\alpha}\ \bar{M}(x;\phi)}\right)^2\right]^b \qquad (1)$$

$$f(x;\alpha,b,\phi)=\frac{2b\alpha^2 m(x,\phi)\ \bar{M}(x;\phi)}{\left(1-\bar{\alpha}\bar{M}(x;\phi)\right)^3}\ \left(1-\left(1-\frac{\alpha\ \bar{M}(x;\phi)}{1-\bar{\alpha}\bar{M}(x;\phi)}\right)^2\right)^{b-1} \qquad (2)$$

بحيث ان كل من α, b هما معلمتا شكل وان $\alpha, b > 0$.

يمكن الحصول على دالة البقاء لتوزيع TLMO-G المرن من العلاقة التالية:

$$R(x;\alpha,b,\phi)=1-F(x;\alpha,b,\phi) \qquad (3)$$

وعليه فان دالة البقاء لتوزيع TLMO-G المرن هي كالتالي:

$$R(x;\alpha,b,\phi)=1-\left[1-\left(1-\frac{\alpha\bar{M}(x;\phi)}{1-\bar{\alpha}\ \bar{M}(x;\phi)}\right)^2\right]^b \qquad (4)$$

يمكن الحصول على دالة المخاطرة او دالة معدل الفشل من العلاقة:

$$h(x;\alpha,b,\phi)=\frac{f(x;\alpha,b,\phi)}{R(x;\alpha,b,\phi)} \qquad (5)$$

بتعويض المعادلتين (٢) و (٤) في (٥) نحصل على دالة الفشل لتوزيع TLMO-G المرن:

$$h(x;\alpha,b,\phi)=\frac{\dfrac{2b\alpha^2 m(x,\phi)\ \bar{M}(x;\phi)}{\left(1-\bar{\alpha}\bar{M}(x;\phi)\right)^3}\ \times\left(1-\left(1-\dfrac{\alpha\ \bar{M}(x;\phi)}{1-\bar{\alpha}\ \bar{M}(x;\phi)}\right)^2\right)^{b-1}}{1-\left[1-\left(1-\dfrac{\alpha\bar{M}(x;\phi)}{1-\bar{\alpha}\ \bar{M}(x;\phi)}\right)^2\right]^b} \qquad (6)$$

بحيث ان ϕ هو متجه من المعالم للتوزيع الجديد المضاف.

عند التعويض عن $\alpha = 1$ نحصل على عائلة Topp Leone-G family، واذا عوضنا عن $b = 1$ نحصل على عائلة Marshall-Olkin-G family.

٤. التوزيع الأسي TLMOE المقترح:

Topp Leone Marshall Olkin Exponential distribution

لتكن لدينا الدالة الاحتمالية والدالة التجميعية ودالة بقاء الحياة $m(x,\phi)$ و $M(x,\phi)\ \bar{M}(x;\phi)$ للتوزيع الاسي مع المعلمة $\lambda > 0$ ولكل $x > 0$ وعلى التوالي:

$$m(x,\lambda)=\lambda\, e^{-\lambda x}\text{، }M(x,\lambda)=1-e^{-\lambda x}\quad \bar{M}(x;\lambda)=\ e^{-\lambda x}$$

فأن (CDF) و (PDF) ودالة البقاء ودالة معدل الخطر لتوزيع TLMO-E يعطي على التوالي:

$$F(x;b,\alpha,\lambda)=\left(1-\left(1-\frac{\alpha\, e^{-\lambda x}}{1-\bar{\alpha}\, e^{-\lambda x}}\right)^{2}\right)^{b} \qquad (7)$$

هنا يكون كل من المعلمات الاتية اكبر من الصفر $\alpha,b,\lambda>0$، حيث ان كل من α, b هما معلمتي الشكل الاضافيتان، وعليه فان دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع TLMOE تعطى كما يلي:

$$f(x;b,\alpha,\lambda)=\frac{2b\alpha^{2}\,\lambda\, e^{-2\lambda x}}{(1-\bar{\alpha}\, e^{-\lambda x})^{3}}\left(1-\left(1-\frac{\alpha e^{-\lambda x}}{1-\bar{\alpha}\, e^{-\lambda x}}\right)^{2}\right)^{b-1} \qquad (8)$$

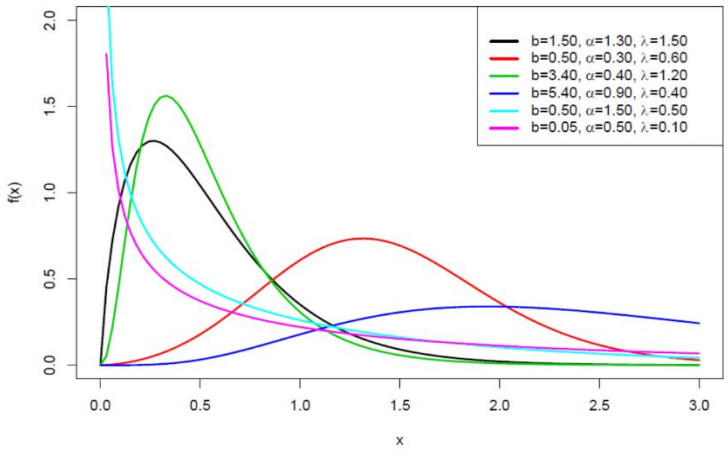
وان دالة البقاء لتوزيع TLMO-E المرن الجديد هي كالتالي:

$$R(x;b,\alpha,\lambda)=1-\left(1-\left(1-\frac{\alpha e^{-\lambda x}}{1-\bar{\alpha}\, e^{-\lambda x}}\right)^{2}\right)^{b} \qquad (9)$$

يمكن الحصول على دالة المخاطرة او دالة معدل الفشل لتوزيع TLMO-E المرن الجديد كالتالي:

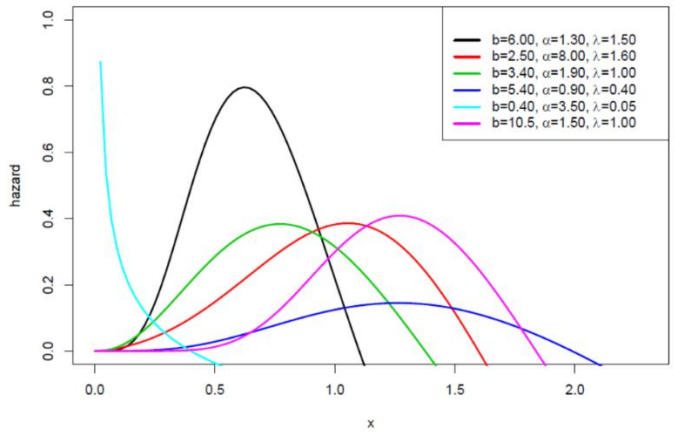
$$\tau(x;\alpha,b,\lambda)=\frac{\frac{2b\,\alpha^{2}\,\lambda\, e^{-2\lambda x}}{(1-\bar{\alpha}\, e^{-\lambda x})^{3}}\left(1-\left(1-\frac{\alpha\, e^{-\lambda x}}{1-\bar{\alpha}\, e^{-\lambda x}}\right)^{2}\right)^{b-1}}{1-\left[1-\left(1-\frac{\alpha e^{-\lambda x}}{1-\bar{\alpha}\, e^{-\lambda x}}\right)^{2}\right]^{b}} \qquad (10)$$

في الشكل (1) التالي الذي يمثل عرض لبعض المنحنيات الممكنة لدالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع TLMOE وذلك باختيار قيم مختلفة للمعالم الثلاثة، وتم ذلك باستعمال البرنامج الحاسوبي الجاهز حزمة R وبملاحظة المنحنيات نلاحظ ثلاث أنماط: (التواء لليمين right skewed) او reversed-J (معكوس حرف J) او Symmetric المتماثل او القريب من المتماثل. ومن الجانب الاخر فعند زيادة قيم المعالم لاحظنا الاتي: إذا كانت القيم المعلمة الأولى اقل من واحد وثبات القيم المعلمتين الآخرتين يأخذ شكل الاسي الاعتيادي فاذا زادت عن الواحد تغير شكل المنحني الى نموذج ذو القمة الواحدة وملتوي لليمين تدريجيا. وكلما زادت قيمة المعلمة الثانية زاد تفلطح المنحني، اما قيمة المعلمة الثالثة فكلما زادت أكثر من واحد تزداد درجة التواء المنحني نحو اليمين.



الشكل (1): بعض اشكال الدالة الاحتمالية لـتوزيع TLMOE لقيم مختارة للمعالم (b,α,λ)

والشكل (2) يعرض بعض الاشكال الممكنة لدالة المخاطرة والتي تظهر بأشكال التزايد والتناقص والتحدب.



الشكل (2): بعض الاشكال الممكنة لدالة المخاطرة لـتوزيع TLMOE لاختيار القيم المختلفة للمعالم $(\boldsymbol{b},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda})$

٥. توسيع الدوال Extension Functions:

في هذا القسم، سيتم إعادة الصياغة بفك وتوسيع دالة CDF ودالة PDF للتوزيع الجديد وهي مفيدة لدراسة خصائصها الإحصائية. بأخذ معادلة رقم (7) وباستخدام سلسلة ثنائي الحدين المعممة $(1-u)^a = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^j \binom{a}{j} u^j$ عدة مرات وصيغة سلسة تايلور نحصل على المعادلة التالية:

$$F(x;\alpha,b,\lambda) = \sum_{i=j=k=0}^{\infty} (-1)^{i+j+k} \binom{b}{i}\binom{2i}{j}\binom{-j}{k} \alpha^j (1-\alpha)^k \, e^{-\lambda x(j+k)}$$

$$F(x;\alpha,b,\lambda) = \sum_{i=j=k=0}^{\infty} \Pi_{i,j,k} \; e^{-\lambda x(j+k)} \qquad (11)$$

حيث ان: $\Pi_{i,j,k} = (-1)^{i+j+k}\binom{b}{i}\binom{2i}{j}\binom{-j}{k}\alpha^j(1-\alpha)^k$

يتم توسيع PDF باستخدام السلسلة ثنائي الحدين على معادلة (8) عدة مرات نحصل على المعادلة الاتية:

$$f(x;\alpha,b,\lambda) = \sum_{i=j=k=0}^{\infty} \Psi_{i,j,k} \; \lambda e^{-\lambda x(2+j+k)} \qquad (12)$$

حيث ان: $\Psi_{i,j,k} = 2b \; \alpha^{2+j} \, (1-\alpha)^k (-1)^{i+j+k} \binom{b-1}{i}\binom{2i}{j}\binom{-(3+j)}{k}$

ان المعادلة (11) والمعادلة (12) تعتبر من النتائج الرئيسية لهذا البحث حيث يمكن استخدامها في إيجاد العديد من الخصائص الرياضية كما سنوضح ذلك.

٦. الخصائص الرياضية Mathematical Properties:

في هذا القسم، يتم إيجاد بعض الخصائص الرياضية الهامة لتوزيع TLMO-E، وتحديدا دالة الكمية، العزوم، دالة المولدة للعزوم، الانتروبي، الإحصاءات المرتبة.

٦-١. دالة الكمية Quantile Function:

بما ان دالة الكمية واسعة الاستخدام عموما في الإحصاء، فيمكن الحصول عليها بالاعتماد على دالة CDF وذلك عن طريق اخذ معكوسها:

$$Q(u) = F^{-1}(x) \qquad (13)$$

يمكننا إيجاد الدالة الكمية لتوزيع TLMO-E المرن كالتالي، بتعويض معادلة رقم (١) في العلاقة أعلاه وباستخدام بعض العمليات الجبرية نحصل على الصيغة:

$$Q(u) = \frac{1}{\lambda}\left(\ln\frac{1-(1-u^{1/b})^{1/2}}{(1-(1-u^{1/b})^{1/2}))\ \ \bar{\alpha}+\alpha}\right) \qquad (14)$$

ان المعادلة (14) مهمة لإيجاد بعض القياسات الأساسية مثل الالتواء (Bowley's skewness) والتفلطح (Moor's kurtosis). حيث يتم استخدام هذه المقاييس في إيجاد التوزيعات ذات الالتواء وكذلك لإيجاد التوزيعات التي لا تملك العزم الثالث او الرابع. وتعد هذه المقاييس قليلة الحساسية للقيم الشاذة مقارنة بالمقاييس الاصلية.

يتم محاكاة متغير عشوائي وفق توزيع (TLMOE) مباشرة. اذا كان U متغير عشوائي منتظم ضمن الفترة (0,1) باستخدام طريقة المعكوس للمتغير العشوائي X والذي يعطى وفق المعادلة (15). ويتم استخدامها في توليد الاعداد العشوائية في دراسة المحاكاة من توزيع (TLMOE) عندما تكون المعالم جميعها معلومة.

$$x = \frac{1}{\lambda}\left(\ln\frac{1-(1-U^{1/b})^{1/2}}{(1-(1-U^{1/b})^{1/2}))\ \ \bar{\alpha}+\alpha}\right) \qquad (15)$$

على وجه الخصوص، القيم الثلاثة الأولى لدالة الكمية تمثل قيم الربيعات (Q_1, Q_2, Q_3) عن طريق وضع $u = 0.25, u = 0.5, and\ u = 0.75$ في المعادلة أعلاه على التوالي. هذا فضلا عن ان (15) نستطيع بواسطتها توليد قيم للمتغيرات العشوائية تتبع توزيعنا المقترح TLMOE.

٦-٢. العزوم Moment:

إن للعزوم دورا مهما في إيجاد وقياس بعض الخصائص الإحصائية. واي خاصية يمكن دراستها من خلال العزوم، مثل معامل الاختلاف، الالتواء والتفلطح، الانحراف المعياري، علاوة على إمكانية إيجاد المتوسط والتباين ومقاييس أخرى. يمكننا الحصول على العزم ذو الدرجة r لتوزيع TLMOE من العلاقة التالية وذلك بالاعتماد على دالة الكثافة الاحتمالية بعد توسيعها:

$$\mu'_r = E(x^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r\, f_{TLMOE}(x)\, dx$$

$$\mu'_r = \sum_{i=j=k=0}^{\infty} \Psi_{i,j,k} \int_0^{\infty} x^r\ \lambda e^{-\lambda x(2+j+k)}\ dx$$

$$Let\ y = \lambda x(2+j+k)$$

$$then\ x = \frac{y}{\lambda(2+j+k)}$$

$$and\ then\ dx = \frac{dy}{\lambda(2+j+k)}$$

$$\mu'_r = \sum_{i=j=k=0}^{\infty} \Psi_{i,j,k} \int_0^{\infty} \left(\frac{y}{\lambda(2+j+k)}\right)^r e^{-y} dy$$

$$\mu'_r = \sum_{i=j=k=0}^{\infty} \Psi_{i,j,k} \int_0^{\infty} \frac{y^r}{(\lambda(2+j+k))^r} e^{-y} dy$$

$$\mu'_r = \frac{\Gamma(r+1)}{(\lambda(2+j+k))^{r+1}} \sum_{i=j=k=0}^{\infty} \Psi_{i,j,k} \int_0^{\infty} y^r e^{-y} dy$$

وبإيجاد التكامل نحصل على الصيغة النهائية للعزوم للتوزيع الجديد TLMOE كما يلي:

$$\mu'_r = \sum_{i=j=k=0}^{\infty} \Psi_{i,j,k} \ \lambda \ \frac{\Gamma(r+1)}{(\lambda(2+j+k))^{r+1}} \qquad (16)$$

ان المعادلة (16) مهمة في إيجاد بعض الخصائص للتوزيع الجديد مثل الوسط الحسابي والتباين والالتواء ومقاييس أخرى.

٦-٣. الدالة المولدة للعزوم Moment Generating Function:

ان الدالة المولدة للعزوم M.G.F للمتغير المستمر X للتوزيع موضوع بحثنا ستكون كالتالي:

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x;\alpha,b,\lambda)\, dx$$

باستخدام المعادلة (12) والتوسيع للدالة الاسية يمكن إيجاد دالة M.G.F للتوزيع TLMOE حيث وفق سلسلة تايلور يكون لدينا:

$$Ee^{tx} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r E\,(x^r)}{r!}$$

$$M_X(t) = \sum_{i=j=k=0}^{\infty} \Psi_{i,j,k}\, \lambda \int_0^{\infty} \frac{t^r E\,(X^r)}{r!}\, e^{-\lambda x(2+j+k)}\, dx$$

بعد اجراء بعض عمليات التبسيط نحصل على ما يلي:

$$M_X(t) = \sum_{i=j=k=0}^{\infty} \Psi_{i,j,k}\, \lambda \ \frac{t^r}{r!} \int_0^{\infty} y^r e^{-\lambda x(2+j+k)}\, dx$$

وبإيجاد التكامل كما في المعادلة (16) فان $M_X(t)$ تكون بالصيغة النهائية للدالة المولدة للعزوم للتوزيع TLMOE كما يلي:

$$M_X(t) = \sum_{i=j=k=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} \Psi_{i,j,k,l}\, \lambda \frac{\Gamma(r+1)}{(\lambda(2+j+k))^{r+1}} \qquad (17)$$

٦-٤. الانتروبي Entropy:

ان مفهوم الانتروبي للمتغير العشوائي هو مؤشر لقياس عدم تأكديه البيانات والتذبذب للظاهرة المدروسة ويمكن تطبيق مفهوم الانتروبي في مجال العلوم والهندسة والإحصاء، إن Renyi Entropy يعد أحد اهم أنواع الانتروبي والذي يعرف كما يأتي:

$$I_R(\delta) = \frac{1}{1-\delta} \log \int_0^{\infty} f(x;\alpha,b,\lambda)^{\delta}\, dx$$

حيث $\delta > 0 , \delta \neq 1$

$$I_R(\delta) = \frac{1}{1-\delta}\, log \int_0^{\infty} \sum_{i=j=k=0}^{\infty} \Psi_{i,j,k} \left[\lambda e^{-\lambda x(2+j+k)}\right]^{\delta} dx$$

$$I_R(\delta) = \frac{1}{1-\delta} \log \sum_{i=j=k=0}^{\infty} \Psi_{i,j,k}\, \lambda^{\delta} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x \delta(2+j+k)}\, dx \qquad (18)$$

وبإيجاد التكامل كما في المعادلة (16) فان الصيغة النهائية للدالة ريني انتروبي للتوزيع TLMOE كما يلي:

$$I_R(\delta) = \frac{1}{1-\delta} \log \sum_{i=j=k=0}^{\infty} \Psi_{i,j,k}\, \lambda^{\delta} \frac{1}{-\lambda\delta(2+j+k)} \qquad (19)$$

٦-٤. الإحصائيات المرتبة Order statistics:

يتم استخدام الاحصائيات المرتبة في مجال الموثوقية واختبار الحياة على نطاق واسع.

لتكن $X_1, X_2 \ldots, X_n$ عينة عشوائية من حجم n، من توزيع TLMOE الذي يمتلك دالة تراكمية في المعادلة رقم (7) ودالة كثافة الاحتمال في المعادلة رقم (8).

ولتكن $X_{(1,n)} \leq X_{(2,n)} \leq \cdots, \leq X_{(n,n)}$ ترمز للإحصاءات المرتبة من هذه العينات. فأن دالة كثافة الاحتمالية pdf للإحصاءات المرتبة $X_{i,n}$، $1 \leq k \leq n$، نكتبها بالشكل $f_{i,n}(x)$ تعطي كالتالي:

$$f_{i,n}(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} [F_{TLMOE}(x)]^{i-1} [1 - F_{TLMO}(x)]^{n-i} f_{TLMO}(x)$$

$$f_{i,n}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} k\, (-1)^j \binom{n-i}{j} f(x) [F_{TLMOE}(x)]^{i+j-1} \qquad (20)$$

حيث $k = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}$

الرتبة الإحصائية الأولى تمثل $X_{(1)} = \min(X_1, X_2 \ldots, X_n)$ والرتبة الإحصائية الأخيرة تمثل $X_{(n)} = \max(X_1, X_2 \ldots, X_n)$

بالتعويض (CDF, PDF) للتوزيع الجديد TLMOE وباستخدام ثنائي الحدين نحصل على التالي:

$$f(x)\, F(x)^{i+j-1} = 2b\, \alpha^2\, \lambda\, e^{-2\lambda x} \left(1 - \bar{\alpha}\, e^{-\lambda x}\right)^{-3} \left(1 - \left(1 - \frac{\alpha e^{-\lambda x}}{1 - \bar{\alpha}\, e^{-\lambda x}}\right)^2\right)^{b(i+j)-1}$$

$$= \sum_{i=k=v=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-i} k\,(-1)^{i+j+k+v} \binom{b(i+j)-1}{i} \binom{2i}{k} \binom{-(3+k)}{v} \binom{n-i}{j} 2b\alpha^{2+k}\lambda(1-\alpha)^{v} e^{-\lambda x(2+k+v)} \quad (21)$$

٧. مقدرات الامكان الأعظم Maximum likelihood estimations:

في هذا القسم، سنقوم بتقدير معالم التوزيع الجديد باستخدام طريقة الامكان الأعظم (MLE) وذلك من خلال إيجاد المشتقات الجزئية لدالة الامكان الاعظم للتوزيع:

Topp Leone Marshall Olkin Exponential.

لتكن $X_1, X_2 \ldots, X_n$ عينة عشوائية بحجم n من توزيع TLMOE بمعالم b, α, λ، مع متجه المعالم الغير معروف $\Theta = (b, \alpha, \lambda)^T$.

$$\mathrm{L} = \mathrm{L}(b, \alpha, \lambda / X_i) = \prod_{i=0}^{n} f(x; b, \alpha, \lambda)$$

بأخذ اللوغاريتم لدالة الإمكان الأعظم نحصل على:

$$\ln\ (L) = n \ln\,(2) + n \ln\,(\mathrm{b}) + n \ln\ (\alpha^2) + n \ln(\lambda) - \sum_{i=1}^{n} 2\lambda x_i - 3\sum_{i=1}^{n} \ln\left(1 - \bar{\alpha} e^{-\lambda x_i}\right) + (b-1)\sum_{i=1}^{n} \ln\left(1 - \left(1 - \frac{\alpha e^{-\lambda x_i}}{1 - \bar{\alpha} e^{-\lambda x_i}}\right)^2\right) \quad (22)$$

يتم الحصول على تقدير احتمال كل معلمه من خلال المشتقة الجزئية الأولى لدالة (Log Likelihood) بالنسبة لكل معلمة:

$$\frac{\partial ln(L)}{\partial b} = \frac{n}{b} + \sum_{i=1}^{n} \ln\left(1 - \left(1 - \frac{\alpha e^{-\lambda x_i}}{1 - \bar{\alpha}\, e^{-\lambda x_i}}\right)^2\right) \quad (23)$$

$$\frac{\partial ln(L)}{\partial \alpha} = \frac{2n}{\alpha} - \frac{3\left(\sum_{i=1}^{n} e^{-\lambda x_i}\right)}{\alpha + \sum_{i=1}^{n}\left(\alpha e^{-\lambda x_i - e^{-\lambda x_i}}\right)} + \frac{(b-1)\left(\sum_{i=1}^{n}\left(-2\left(1 - \frac{\alpha e^{-\lambda x_i}}{1 - \bar{\alpha} e^{-\lambda x_i}}\right)\left(-\frac{e^{-\lambda x_i}}{1 - \bar{\alpha} e^{-\lambda x_i}} + \frac{\alpha\left(e^{-\lambda x_i}\right)^2}{\left(1 - \bar{\alpha} e^{-\lambda x_i}\right)^2}\right)\right)\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(1 - \left(1 - \frac{\alpha e^{-\lambda x_i}}{1 - \bar{\alpha} e^{-\lambda x_i}}\right)^2\right)} \quad (24)$$

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \left(\sum_{i=1}^{n} 2x_i\right) - \frac{3\left(\sum_{i=1}^{n}\left(-x_i e^{-\lambda x_i}\alpha + x_i e^{-\lambda x_i}\right)\right)}{n + \sum_{i=1}^{n}\left(\alpha e^{-\lambda x_i} - e^{-\lambda x_i}\right)}$$

$$+\frac{(b-1)\left(\sum_{i=1}^{n}\left(-2\left(1-\frac{\alpha e^{-\lambda x_i}}{1-\bar{\alpha}\,e^{-\lambda x_i}}\right)\left(\frac{\alpha x_i e^{-\lambda x_i}}{1-\bar{\alpha}\,e^{-\lambda x_i}}+\frac{\alpha\left(e^{-\lambda x_i}\right)^2\bar{\alpha}\,x_i}{(1-\bar{\alpha}\,e^{-\lambda x_i})^2}\right)\right)\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(1-\left(1-\frac{\alpha e^{-\lambda x_i}}{1-\bar{\alpha}\,e^{-\lambda x_i}}\right)^2\right)} \quad (25)$$

وبعد مساواتها بالصفر نحصل على التقدير الأعظم:

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial b}=\frac{\partial \ln(L)}{\partial \alpha}=\frac{\partial \ln(L)}{\partial \lambda}=0$$

نلاحظ بأن المعادلات (٢٣)، (٢٤)، (٢٥) بعد مساواتها بالصفر من الصعب حلها يدويا، لذا هناك العديد من البرمجيات الإحصائية التي يمكن بواسطتها تعظيم الدالة وايجاد حل تقريبي منها على سبيل المثال Package Adequacy Model او أي برامج أخرى مثل برنامج SAS او برنامج OX او Mathematical ويمكن ان نحصل على الحل عدديا باستعمال طرق تكرارية كطريقة نيوتن رافسن لتقدير الفترة لمعالم التوزيع.

٨. التطبيق Application:

في هذه الفقرة سنعرض إمكانية تطبيق التوزيع الجديد على البيانات الحقيقية التي تمثل مجموعة البيانات لأعمار ١٥٥ مريضًا من أورام الثدي مأخوذة من شهر حزيران الى شهر تشرين الثاني لعام (٢٠١٤)، التي اوجدت عن طريق (وحدة الكشف المبكر عن أورام الثدي، مستشفى جامعة بنها، مصر) (Hassan et al., 2016). واخذت هذه البيانات من بعض المصادر كون جميع البيانات في العراق تحتاج الى جهد ومتابعة وبالإضافة الى التكلفة المالية. تم إيجاد تقدير لقيم المعلمات الثلاثة بطريقة الإمكان الأعظم المذكورة اعلاه للتوزيع الجديد TLMOE، ولجميع التوزيعات المستخدمة في هذا التطبيق التي تم اختيارها لقربها منه لغرض المقارنة، ثم مقارنة مع توزيعات أخرى ذات علاقة مع التوزيع المقترح مثل:

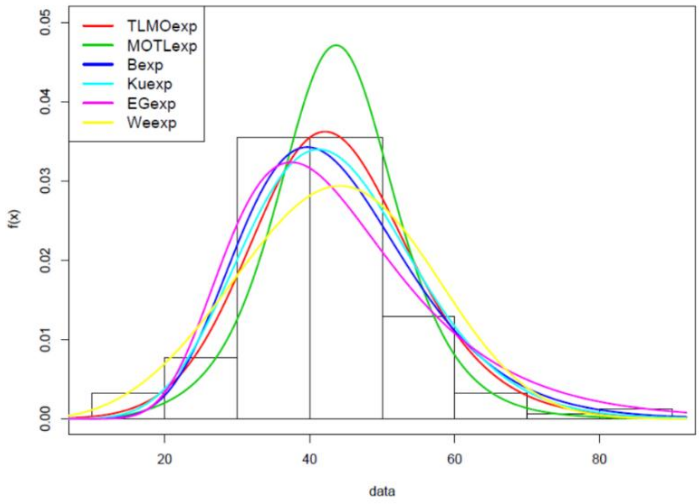
Marshall Olkin Topp Leone-exponential, Beta-exponential, Kumaraswamy-exponential Exponentiated Generalized-exponential Weibull-exponential.

تم توظيف بعض معايير حسن المطابقة المعروفة لغرض المقارنة بين اداء هذه التوزيعات مثل (-LL, AIC, CAIC, BIC) والتي يتم حسابها من تطبيق النماذج على البيانات، ويتم هذا كله بواسطة حزمة برامج R الجاهزة. كلما كانت قيمة هذه المعايير قليلة تشير الى ملائمة التوزيع للبيانات. وكانت نتائج التطبيق كما في الجدول التالي:

الجدول (1): يمثل قيم تقديرات المعالم مع قيم المعايير (-LL, AIC, CAIC, BIC) للبيانات الحقيقية

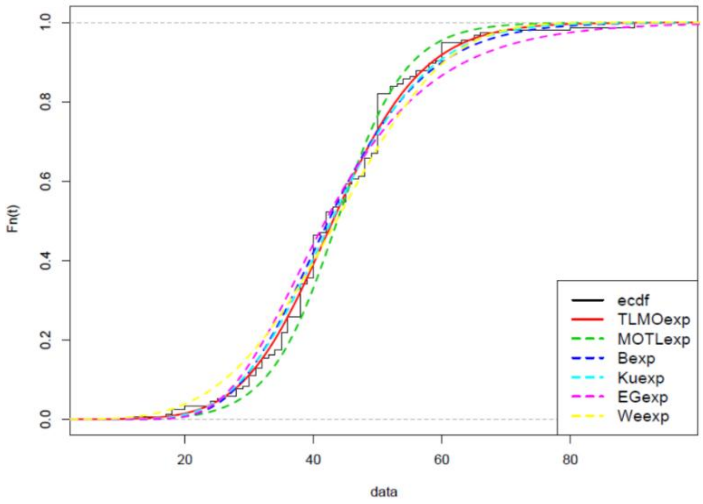
Models	Estimation Parameters				Criteria Values		
	$\hat{b}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}$	-LL	AIC	CAIC	BIC
TLMO-exp	**2.938**	**28.950**	**0.082**	**600**	**1207.0**	**1207.2**	**1216.1**
MOTL-exp	42.334	84.499	0.093	606.4	1218.9	1219.0	1228.0
B-exp	15.698	4.045	0.038	605.1	1216.3	1216.4	1225.4
Ku-exp	9.631	5.827	0.037	602.9	1211.8	1212.0	1220.9
EG-exp	0.755	25.245	0.114	611.2	1228.4	1228.6	1237.6
We-exp	3.687	6,079	0.126	610.2	1226.5	1226.7	1235.7

لقد اثبت التوزيع الجديد ملائمة عالية للبيانات الحقيقية مقارنة مع التوزيعات الاخرى وذلك من خلال المعايير الإحصائية المستخدمة كما يظهر ذلك في الجدول (1) ذلك لأن حصول التوزيع المقترح على أصغر قيمة لهذه المقاييس تشير الى ان التوزيع أكثر ملائمة للبيانات هذه من التوزيعات الأخرى. كذلك فان الشكل (٣) والشكل (٤) يشير الى ملائمة دالة الكثافة الاحتمالية والدالة التراكمية وقربها من منحنى البيانات مقارنة مع الاشكال الأخرى للتوزيعات الاخرى، مما يعزز نجاح التوزيع في مسألة حسن المطابقة او الملائمة وامكانية استعماله في التطبيقات العملية والاستفادة منه.



الشكل (3): تقدير ملاءمة دوال الكثافة الاحتمالية الست للبيانات الحقيقية

ويمثل حسن المطابقة للبيانات الحقيقية للتوزيع المقترح مع توزيعات أخرى ويتبين من خلال الشكل ان توزيع الجديد أكثر ملائمة.



الشكل (٤): يمثل حسن المطابقة للبيانات الحقيقية للدوال التراكمية للتوزيعات الست مقارنة مع التوزيع المقترح

٩. الاستنتاجات Conclusions:

في هذا البحث قمنا باقتراح تعميم للعائلة ثم اقتراح توزيع جديد من توزيعات العائلة:

Topp Leone Marshall-Olkin-G family

تحت اسم:

(Topp Leone Marshall-Olkin Exponential distribution: TLMOE).

يمتاز التوزيع الجديد بمرونة عالية لتوافق أنواع مختلفة من البيانات. تم إيجاد التوسيع لدالة الكثافة الاحتمالية والدالة التراكمية للتوزيع المقترح لأهميتها في إيجاد بعض الخصائص. حيث ان دالة الكثافة الاحتمالية والتراكمية للتوزيع (TLMOE) يعبر عنها كمزيج خطي منتهي لدالة الكثافة الاحتمالية بمعلمة جديدة. العديد من الخصائص الرياضية بما في ذلك الدالة الكمية والعزوم الاعتيادية والدالة المولدة للعزوم والإحصاءات المرتبة والانتروبي تم ايجادها. قدرت معلمات التوزيع بطريقة الإمكان الأعظم. ولبيان مرونة وقابلية التوزيع الجديد على البيانات طبق هذا التوزيع على بيانات حقيقية طبية لأمراض سرطان الثدي من مستشفى جامعة بنها في مصر، حيث اثبت التوزيع الجديد ملائمة عالية للبيانات الحقيقية. لذلك نقترح على الباحثين توسيع الدراسة عن هذا التوزيع بإيجاد اشكال اخرى منه، ومحاولة تطبيق التوزيع الجديد على أنواع مختلفة من البيانات مثل المجالات الطبية والهندسية والزراعية والاقتصادية والمالية والعلوم البيئية وفي غيرها التي تصلح بحيث تتفق مع نموذجنا المقترح وتحقق اقل ما يمكن من الاخطاء.

المصادر References:

1. Alshangiti, A. M., Kayid, M., & Alarfaj, B., (2014), A new family of Marshall-Olkin extended distributions. Journal of Computational and Applied Mathematics, 271, 369-379.
2. Al-Shomrani, A., Arif, O., Shawky, A., Hanif, S., & Shahbaz, M. Q. (2016). Topp-Leone family of distributions: some properties and application. Pakistan Journal of Statistics and Operation Research, 12 (3), 443-451.
3. Bourguignon, M., Silva, R. B., & Cordeiro, G. M., (2014), The Weibull-G family of probability distributions. Journal of Data Science, 12 (1), 53-68.
4. Cordeiro, G. M., & de Castro, M., (2011), A new family of generalized distributions. Journal of statistical computation and simulation, 81 (7), 883-898.
5. Cordeiro, G. M., Ortega, E. M., & da Cunha, D. C., (2013), The exponentiated generalized class of distributions. Journal of Data Science, 11 (1), 1-27.
6. Eugene, N., Lee, C., & Famoye, F., (2002), Beta-normal distribution and its applications. Communications in Statistics-Theory and methods, 31 (4), 497-512.
7. Gupta, R. C., Gupta, P. L., & Gupta, R. D., (1998), Modeling failure time data by Lehman alternatives. Communications in Statistics-Theory and methods, 27 (4), 887-904.
8. Hassan, A. S., Elbatal, I., & Hemeda, S. E., (2016), Weibull quasi lindley distribution and its statistical properties with applications to lifetime data. International Journal of Applied Mathematics and Statistics, 55 (3), 63-80.

9. Marshall, A. W., & Olkin, I., (1997), A new method for adding a parameter to a family of distributions with application to the exponential and Weibull families Biometrika, 84 (3), 641-652.
10. Reyad, H., Alizadeh, M., Jamal, F., & Othman, S., (2018), The Topp Leone odd Lindley-G family of distributions: Properties and applications. Journal of Statistics and Management Systems, 21 (7), 1273-1297.
11. Sangsanit, Y., & Bodhisuwan, W., (2016), The Topp-Leone generator of distributions: properties and inferences. Songklanakarin Journal of Science & Technology, 38 (5).
12. Torabi, H., & Hedesh, N. M., (2012), The gamma-uniform distribution and its applications. Kybernetika, 48 (1), 16-30.