جذر جاكوبسن للحلقات

رسول وداي متعب محمد
المديرية العامة للتربية في محافظة القادسية

الملخص:

لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة ابدالية ذات عنصر محايد . جذر جاكوبسن للحلقة R يرمز له بالرمز Rad (R) ويعرف على أنه تقاطع كل المثاليات العظمى في الحلقة R . العديد من العبارات المكافئة لجذر جاكوبسن للحلقة R قد أعطيت، حيث برهنا أن $a \in Rad(R)$ أذا وفقط أذا كان $1+ra$ له معكوس ضربي في R لكل $r \in R$ كما برهنا أن $\{rR$ مثالي صغير في $R/r \in R\} = Rad(R)$ ، كذلك برهنا أن $Rad(R) = \sum_{Rr \to R} Rr$ العديد من النتائج لجذر جاكوبسن للحلقات قد أعطيت فمثلا برهنا أن أذا كان $(I,+,\cdot)$ مثالي في $(R,+,\cdot)$، فأن $I \subseteq Rad(R)$ أذا وفقط أذا كان كل عنصر في المجموعة المشاركة $1+I$ له معكوس ضربي في R .

المقدمة

في بحثنا هذا الحلقة $(R,+,\cdot)$ تعني حلقة أبدالية ذات عنصر محايد . من المواضيع المهمة في نظرية الحلقات خاصة ، ومواضيع الجبر بصورة عامة هو مفهوم جذر جاكوبسن للحلقة . لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة , جذر جاكوبسن للحلقة R ، والذي يرمز له بالرمز Rad (R) يعرف على انه تقاطع كل المثاليات العظمى في الحلقة R بحثنا هذا جاء ليدرس بشيء من التفصيل جذر جاكوبسن للحلقات .

يتكون هذا البحث من فصلين : في الفصل الأول ذكرنا بعض المفاهيم والحقائق الأساسية في نظرية الحلقات والتي سوف نحتاج أليها في موضوع بحثنا هذا في الفصل الثاني ومن المفاهيم (الحلقة، الحلقة الابدالية ذات العنصر المحايد، المثالي، حلقة القسمة والحلقة التامة، الحقل ومركبة الجمع المباشر للحلقة، وغيرها) .

جاء الفصل الثاني من هذا البحث ليدرس موضوع (جذر جاكوبسن للحلقات) بشيء من التفصيل فبدأ بتعريف المثالي الأعظم ثم أعطينا تعريف جذر جاكوبسن للحلقة R . وأوجدنا جذر جاكوبسن للعديد من الحلقات فمثلا برهنا أن $Rad(Z) = (0)$ حيث $(Z,+,\cdot)$ هي حلقة الأعداد الصحيحة وأوجدنا جذر جاكوبسن للحلقة $(Z_n, +_n, \cdot_n)$ ولقيم مختلفة من n .العديد من المبرهنات والنتائج حول جذر جاكوبسن للحلقات قد

برهنت , برهنا أن لأي مثالي $(I,+,\cdot)$ في الحلقة $(R,+,\cdot)$ فأن $I \subseteq Rad(R)$ أذا وفقط أذا كان كل عنصر في المجموعة المشاركة $I+1$ له معكوس ضربي .العديد من العبارات المكافئة لجذر جاكوبسن للحلقة $(R,+,\cdot)$ قد برهنت حيث برهنا أن العنصر $a \in Rad(R)$ أذا وفقط أذا كان $1+ra$ له معكوس ضربي في R لكل $r \in R$ ونتيجة هذه المبرهنة فقد برهنا أن العنصر المتساوي القوى في جذر أي حلقة هو الصفر فقط . كما برهنا أن $(N,+,\cdot)$ تكون مثالي أذا وفقط إذا كان $N = Rad(R)$ حيث N هي مجموعة العناصر التي ليس لها معكوس ضربي في الحلقة $(R,+,\cdot)$.

يقال للحلقة $(R,+,\cdot)$ بأنها شبه بسيطة أذا كان $Rad(R) = (0)$. برهنا في هذا البحث الحلقة $(R/Rad(R),+,\cdot)$ حلقة شبه بسيطة . يقال للمثالي $(I,+,\cdot)$ بأنه صغير في الحلقة $(R,+,\cdot)$ أذا كان لكل مثالي $(J,+,\cdot)$ في الحلقة $(R,+,\cdot)$ بحيث أن $I+J=R$ فأن $J=R$. برهنا في هذا البحث انه أذا كانت $(R,+,\cdot)$ حلقة ذات عنصر محايد فأن $Rad(R) = \{r \in R/R$ مثالي صغير في $Rr\}$ كما برهنا أن $\sum_{Rr \to R} Rr$ Rad (R) .

الفصل الأول : مفاهيم أساسية في نظرية الحلقات

في هذا الفصل سوف نذكر بعض المفاهيم والحقائق الأساسية في نظرية الحلقات والتي سوف نحتاج أليها في الفصل الثاني من هذا البحث

(1-1) تعريف (الحلقة): هي ثلاث مراتب $(R,+,\cdot)$ مكون من مجموعة غير منتهية R وعمليتين ثنائيتين $(+,\cdot)$ معرفتين

على R بحيث أن الفرضيات التالية تتحقق :

أ) $(R,+)$ زمرة أبدالية .

ب) $(R,\cdot)$ شبه زمرة .

ج) العملية $(\cdot)$ تتوزع على العملية الثنائية $(+)$ من اليسار ومن اليمين أي أن لكل $a,b,c \in R$ فأن :

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$$
$$(b+c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$$

(2-1) تعريف (الحلقة الأبدالية) : لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة يقال أن $(R,+,\cdot)$ حلقة أبدالية أذا كانت $(R,\cdot)$ شبه زمرة أبدالية .

(3-1) **تعريف (الحلقة ذات العنصر المحايد)** : لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة يقال أن $(R, +, \cdot)$ حلقة ذات عنصر محايد أذا كانت $(R, \cdot)$ شبه زمرة ذات عنصر محايد .

(4-1) أمثلة :

أ) أن كل من $(Z, +, \cdot)$ و $(Q, +, \cdot)$ و $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ و $(Z_n, +_n, \cdot_n)$ و $(P(X), \Delta, \cap)$ هي حلقات أبدالية ذات عنصر محايد.

ب) الحلقة $(Z_e, +, \cdot)$ هي حلقة أبدالية لا تحوي عنصر محايد .

ج) الحلقة $(M_{2\times 2\,(R)}, +, \cdot)$ هي حلقة غير أبدالية تحوي عنصر محايد .

(5-1) **تعريف (العنصر القابل للعكس):** لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة ذات عنصر محايد فيقال ان العنصر $a \in R$ بأنه قابل للعكس أذا كان له نظير بالنسبة للعملية $(\cdot)$ وسنرمز لمجموعة كل العناصر القابلة للعكس في الحلقة R بالرمز R^* .

(6-1) **تعريف (المثالي)** : لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة و $I \subseteq R$ و $I \neq \emptyset$ فيقال أن الثلاثي $(I, +, \cdot)$ مثالي في الحلقة $(R, +, \cdot)$ أذا وفقط أذا كان :

أ) $a - b \in I$ لكل $a, b \in I$.

ب) $r \cdot a, a \cdot r \in I$ لكل $a \in I$ و $r \in R$.

(7-1) **أمثلة** : جد كل المثاليات للحلقات الآتية :

أ) الحلقة $(Q, +, \cdot)$ تحوي المثاليتين التافهتين $(\{0\}, +, \cdot)$ و $(Q, +, \cdot)$.

ب) الحلقة $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ تحوي المثاليتين التافهتين $(\{0\}, +, \cdot)$ و $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

(8-1) **تعريف (التماثل الحلقي)** : لتكن كل من $(R, +, \cdot)$ و $(R', +', \cdot')$ حلقة فيقال للدالة $f: (R, +, \cdot) \to (R', +', \cdot')$ بأنها تماثل حلقي من الحلقة $(R, +, \cdot)$ الى الحلقة $(R', +', \cdot')$ أذا كان : لكل $a, b \in R$

أ) $f(a + b) = f(a) +' f(b)$. ب) $f(a \cdot b) = f(a) \cdot' f(b)$.

(9-1)

- **تعريف (التماثل الحلقي المتباين)** : التماثل الحلقي $f: (R, +, \cdot) \to (R', +', \cdot')$ يقال أنه f تماثل حلقي متباين أذا كانت f دالة متباينة .
- **تعريف (التماثل الحلقي الشامل)** : التماثل الحلقي $f: (R, +, \cdot) \to (R', +', \cdot')$ يقال أنه f تماثل حلقي شامل أذا كانت f دالة شاملة .

- **تعريف (التماثل الحلقي المتقابل)** : لتكن كل من $(R, +, \cdot)$ و $(R', +', \cdot')$ حلقة وليكن f تماثل حلقي $f: (R, +, \cdot) \to (R', +', \cdot')$ فيقال أنه f تماثل حلقي متقابل أذا كانت الدالة f شاملة و متباينة .

(10-1) تعريف (حلقة القسمة) : ليكن $(I, +, \cdot)$ مثالي في الحلقة $(R, +, \cdot)$ نعرف المجموعة $R/I = \{ a + I \mid a \in R \}$ ونعرف العمليتين $(+, \cdot)$ على R/I بالشكل التالي : لكل $b + I \in R$ و $a \in I$ فأن $(a + I) \cdot (b + I) = (a \cdot b) + I$, $(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$ فأن الثلاثي $(R/I, +, \cdot)$ يكون حلقة تسمى بحلقة القسمة .

(11-1) مبرهنة : الجداء للحلقات R_i و $i = 1,2,3, \dots \dots, n$ هو حلقة تسمى بحلقة الجداء للحلقات R_i و $i = 1,2,3, \dots \dots, n$.

(12-1) قضية : تقاطع أي عائلة من المثاليات في الحلقة $(R, +, \cdot)$ هومثالي في الحلقة $(R, +, \cdot)$ أيضا أي أن $(\cap_{i \in \lambda} I_i, +, \cdot)$ مثالي في الحلقة $(R, +, \cdot)$ لأي عائلة $\{I_i\}_{i \epsilon \lambda}$ من المثاليات في الحلقة $(R, +, \cdot)$

البرهان :

بما أن $0 \in \{\boldsymbol{I_i}\}_{i \epsilon \lambda}$ أذن $0 \in \{\cap_{i \in \lambda} \boldsymbol{I_i}\} \neq \emptyset$ و ليكن $a, b \in \cap_{i \in \lambda} \boldsymbol{I_i}$ *بما أن* I_i *مثالي في الحلقة* $(\boldsymbol{R}, +, \cdot)$ *أذن* $a - b \in I_i$ *لكل* $i \in \lambda$ *وبالتالي* $a - b \in \cap_{i \in \lambda} I_i$ *ليكن* $r \in R$ *و* $a \in I_i$ *لكل* $i \in \lambda$ بما أن I_i مثالي في الحلقة $(R, +, \cdot)$ *أذن* $a \cdot r \in I_i$ *لكل* $i \in \lambda$ *وبالتالي* $a \cdot r \in \cap_{i \in \lambda} I_i$ أذن $(\cap_{i \in \lambda} I_i, +, \cdot)$ مثالي في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ■

(13-1) قضية : ليكن $(I, +, \cdot)$ و $(J, +, \cdot)$ مثاليتان في الحلقة $(R, +, \cdot)$ فأن $(I + J, +, \cdot)$ هو مثالي في الحلقة $(R, +, \cdot)$ حيث $I + J = \{a + b \mid a \in I, b \in J\}$.

البرهان :

ليكن $(I, +, \cdot)$ و $(J, +, \cdot)$ مثاليتان في الحلقة $(R, +, \cdot)$, $0 = 0 + 0$ أذن $0 \in I + J$ ليكن $I + J \neq \emptyset$ و $x, y \in I + J$ و $x = a_1 + b_1$ و $y = a_2 + b_2$ حيث $a_1, a_2 \in I$, $b_1, b_2 \in J$.

$$x - y = (a_1 + b_1) - (a_2 + b_2) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) \in I + J$$

ليكن $x \in I+J$ و $r \in R$ حيث $x = a+b$, $a \in I$, $b \in J$

وأن $r \cdot x = r \cdot (a+b) = r \cdot a + r \cdot b \in I+J$

أذن $(I+J, +, \cdot)$ مثالي في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ■

(14-1) نتيجة : لتكن $(\{I_i\}, +, \cdot)$ عائلة من المثاليات في الحلقة $(R, +, \cdot)$ حيث $i = 1,2,3, \dots \dots, n$ فأن $(\sum_{i=1}^{n} I_i, +, \cdot)$ هو مثالي في الحلقة $(R, +, \cdot)$.

حيث{لكل $\sum_{i=1}^{n} I_i = \{a_1 + a_2 + \cdots + a_n \mid a_i \in I_i, i = 1,2,3, \dots \dots, n$.

(15-1) تعريف (مركبة الجمع المباشر للحلقة): لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة و $(R, +, \cdot)$ مثالي فيها . يقال أن I هو مركبة جمع مباشر للحلقة R , أذا وجد مثالي أخر مثل $(R, +, \cdot)$ في الحلقة $(R, +, \cdot)$ بحيث أن $I+J = R$ و $I \cap J = \{0\}$.

(16-1) أمثلة :

1) في الحلقة $(Z_6, +_6, \cdot_6)$ فأن المثاليات التي تكون مركبة جمع مباشر هي : $(\{0\}, +_6, \cdot_6)$, $(\{0,3\}, +_6, \cdot_6)$, $(\{0,2,4\}, +_6, \cdot_6)$, $(Z_6, +_6, \cdot_6)$.

2) في الحلقة $(Z_4, +_4, \cdot_4)$ فأن المثاليات التي تكون مركبة جمع مباشر هي : $(Z_4, +_4, \cdot_4)$, $(\{0\}, +_4, \cdot_4)$.

3) في الحلقة $(Q, +, \cdot)$ فأن المثاليات التي تكون مركبة جمع مباشر هي : $(Q, +, \cdot)$, $(\{0\}, +, \cdot)$.

4) في الحلقة $(Z_{10}, +_{10}, \cdot_{10})$ فأن المثاليات التي تكون مركبة جمع مباشر هي : $(Z_{10}, +_{10}, \cdot_{10})$, $(\{0\}, +_{10}, \cdot_{10})$, $(\{0,5\}, +_{10}, \cdot_{10})$, $(\{0,2,4,6,8\}, +_{10}, \cdot_{10})$.

5) في الحلقة $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$ فأن المثاليات التي تكون مركبة جمع مباشر هي : $(\{0\} \times \{0\}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\{0\} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R} \times \{0\}, +, \cdot)$.

(17-1) مبرهنة : ليكن $(I, +, \cdot)$ و $(J, +, \cdot)$ مثاليتان في الحلقة $(R, +, \cdot)$ فأن $([I:J], +, \cdot)$ مثالي في الحلقة $(R, +, \cdot)$ حيث أن $[I:J] = \{r \in R \mid r \cdot J \subseteq I\}$.

البرهان :

1- لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة بما أن $0 \in R$, $0 \cdot J = (0) \subseteq J$, أذن $0 \in [I:J] \neq \emptyset$.

2- ليكن $a, b \in [I:J]$ فأن $b \cdot J \subseteq I$ و $a \cdot J \subseteq I$ و $(a-b) \cdot J = a \cdot J -$ $a - b \in [I:J]$ أذن $b \cdot J \subseteq I$

3-ليكن $a \in [I:J]$ و $r \in R$ فأن $a \cdot J \subseteq I$ و $(r \cdot a) \cdot I = r \cdot (a \cdot J) \subseteq I$

أذن $r \cdot a \in [I:J]$ وعليه $([I:J], +, \cdot)$ مثالي في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ■

(1-18) تعريف (الحلقة التامة) : هي حلقة أبدالية ذات عنصر محايد خالية من القواسم الصفرية .

(1-19) تعريف (منطقة المثاليات الأساسية) : هي حلقة تامة كل مثالي فيها هو مثالي رئيسي .

(1-20) تعريف (الحقل) : هو حلقة أبدالية ذات عنصر محايد كل عنصر غير صفري فيها له معكوس ضربي .

(1-21) أمثلة : أن كل من $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ و $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ و $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ هي حقول .

الفصل الثاني : جذر جاكوبسن للحلقات

في هذا الفصل سوف ندرس جذر جاكوبسن لأي حلقة أبدالية ذات عنصر محايد $(R, +, \cdot)$ وسنذكر بعض العبارات المكافئة .

(2-1) تعريف (المثالي الأعظم) [1] : ليكن $(I, +, \cdot)$ مثالي في الحلقة $(R, +, \cdot)$ (نقول أن $(I, +, \cdot)$ هو مثالي للحلقة $(R, +, \cdot)$ أذا تحققت الشروط التالية :

1) $I \neq R$

2) أذا كان $(J, +, \cdot)$ مثالي اخر في الحلقة $(R, +, \cdot)$ بحيث أن : $I \subseteq J \subseteq R$ فأن $J = R$.

بعبارة أخرى : يكون المثالي $(I, +, \cdot)$ هو مثالي أعظم في الحلقة $(R, +, \cdot)$ أذا كانت الحلقة $(R, +, \cdot)$ هي المثالية

الوحيدة التي تحتوي المثالي $(I, +, \cdot)$ احتواء فعلي .

(2-2) أمثلة :

أ- في حلقة الأعداد الصحيحة $(Z, +, \cdot)$ فأن $((2), +, \cdot)$ مثالي أعظم .

البرهان :

بما أن $1 \in Z$ و $1 \notin (2)$ أذن $(2) \neq Z$ ليكن $(J, +, \cdot)$ مثالي أخر للحلقة $(Z, +, \cdot)$ بحيث أن $(2) \subseteq J \subseteq Z$

للبرهنة على أن $J = Z$.

بما أن $(2) \subseteq J$ أذن يوجد $x \in J$ و $x \notin (2)$ و x عدد صحيح لايقبل القسمة على 2 أذن $((2), +, \cdot) = (d)$ حيث d هو القاسم المشترك الأعظم بين

(2) و x أذن $d = 1$ و أن $z = (2)$ وعليه $z = (x, (2))$ بما أن $J \subseteq (2)$ و $x \in J$ أذن $J \subseteq (x, (2))$ وعليه $J \subseteq Z$ بما أن $Z \subseteq J$ أذن $(Z, +, \cdot)$ مثالي أعظم للحلقة $(Z, +, \cdot)$ ■

ب- في حلقة الأعداد الصحيحة $(Z, +, \cdot)$ فأن $(Z, +, \cdot)$ مثالي أعظم .

البرهان :

بما أن $1 \in Z$ و $1 \notin (3)$ أذن $(3) \neq Z$ ليكن $(J, +, \cdot)$ مثالي أخر للحلقة $(Z, +, \cdot)$ بحيث أن $(3) \subseteq J \subseteq Z$

للبرهنة على أن $J = Z$.

بما أن $(3) \subseteq J$ أذن يوجد $x \in J$ و $x \notin (3)$ و x عدد صحيح لايقبل القسمة على 3 أذن $(d) = (3, +, \cdot)$ حيث d هو القاسم المشترك الأعظم بين (3) و x أذن $d = 1$ و أن $z = (3)$ وعليه $z = (x, (3))$ بما أن $J \subseteq (3)$ و $x \in J$ أذن $J \subseteq (x, (3))$ وعليه $J \subseteq Z$ بما أن $Z \subseteq J$ أذن $(Z, +, \cdot)$ مثالي أعظم للحلقة $(Z, +, \cdot)$ ■

ج-في حلقة الأعداد الصحيحة الزوجية $(Z_e, +, \cdot)$ فأن $(4, +, \cdot)$ هو مثالي أعظم .

د- المثاليات العظمى للحلقة $(Z_4, +_4, \cdot_4)$ هي : $(\{0,2\}, +_4, \cdot_4)$ فقط .

هـ- المثاليات العظمى للحلقة $(Z_5, +_5, \cdot_5)$ هي : $(\{0\}, +_5, \cdot_5)$ فقط .

و- المثاليات العظمى للحلقة $(Z_{10}, +_{10}, \cdot_{10})$ هي : $(\{0,2,4,6,8\}, +_{10}, \cdot_{10})$ و $(\{0,5\}, +_{10}, \cdot_{10})$.

ر- المثاليات العظمى للحلقة $(Z_{12}, +_{12}, \cdot_{12})$ هي :$(\{0,2,4,6,8,10\}, +_{12}, \cdot_{12})$ و $(\{0,3,6,9\}, +_{12}, \cdot_{12})$.

ز- المثاليات العظمى للحلقة $(Z_6, +_6, \cdot_6)$ هي : $(\{0,2,4\}, +_6, \cdot_6)$ و $(\{0,3\}, +_6, \cdot_6)$.

ع- المثاليات العظمى للحلقة $(Z_p, +_p, \cdot_p)$ حيث p عدد أولي هي :$(\{0\}, +_p, \cdot_p)$ فقط .

ن- المثاليات العظمى للحلقة $(p(x), \Delta, \cap)$ و$x = \{1,2\}$هي : $(\{\emptyset, x, \{1\}\}, \Delta, \cap)$ و $(\{\emptyset, x, \{2\}\}, \Delta, \cap)$.

(2-3) مبرهنة : في حلقة الأعداد الصحيحة $(Z,+,\cdot)$ فأن المثالي $((n),+,\cdot)$ يكون أعظم أذا وفقط أذا كان n عدد أولي .

البرهان :

(الاتجاه الأول) : ليكن $((n),+,\cdot)$ هو مثالي أعظم في $(Z,+,\cdot)$ نفرض أن n هو عدد ليس أولي أذن يوجد $1<p\leq q<n$ بحيث أن $n=p\cdot q$ بما أن $p\neq n$ و p تقسم n أذن $(n)\subseteq(p)$ حسب لتكن $(Z,+,\cdot)$ حلقة ولتكن $n,m\in Z$ فأن n تقسم m ولاتساويها أذا وفقط أذا كان المثالي $(m)\subseteq(n)$ بما أن $p\neq 1$ و 1 يقسم p أذن $p\subseteq(1)=Z$ وعليه $(n)\subseteq J\subseteq Z$ وهذا تناقض مع كون $((n),+,\cdot)$ مثالي أعظم أذن n هو عدد أولي ■

(الاتجاه الثاني) : ليكن n عدد أولي نفرض أن المثالي $((n),+,\cdot)$ ليس مثالي أعظم أذن يوجد مثالي أخر $(J,+,\cdot)$ بحيث أن $(n)\subseteq J\subseteq Z$ نفرض أنه يوجد مثالي أخر $(J,+,\cdot)$ في الحلقة $(Z,+,\cdot)$ بحيث أن $(n)\subseteq J\subseteq Z$ بما أن $(Z,+,\cdot)$ هي حلقة مثاليات رئيسية فأنه يوجد $m\in Z$ بحيث أن $J=(m)$ أذن $(n)\subseteq(m)\subseteq(1)$ و $m\neq 1$ و $n\neq m$ و m تقسم n وهذا تناقض لأن n عدد أولي أذن $((n),+,\cdot)$ مثالي أعظم ■

(2-4) مبرهنة (كرول – زورن) [1] : في الحلقة الأبدالية ذات العنصر المحايد كل مثالية فعلية تكون محتواه في مثالية أعظمية .

(2-5) نتيجة : كل حلقة أبدالية ذات عنصر محايد و غير تافه تحتوي على مثالية عظمى .

البرهان :

بما أن الحلقة $(R,+,\cdot)$ حلقة غير تافه هذا يعني المثالي $(\{0\},+,\cdot)$ فعلي للحلقة $(R,+,\cdot)$ أذن المثالي الصفري محتواه في مثالي أعظم (حسب مبرهنة كرول – زورن) وبالتالي كل حلقة غير تافه تحتوي على مثالي أعظم ■

(2-6) نتيجة : في الحلقة الأبدالية ذات العنصر المحايد يكون للعنصر معكوس أذا وفقط أذا كان هذا العنصر لا ينتمي إلى أي مثالي أعظم.

البرهان :

(الاتجاه الأول) : ليكن a هو عنصر قابل للعكس في الحلقة $(R,+,\cdot)$ نفرض أن a ينتمي الى مثالي أعظم مثل $(I,+,\cdot)$

أي أن $a \in I$ بما أن a هو عنصر قابل للعكس أذن $a^{-1} \in R$ بحيث أن $a \cdot a^{-1} = 1$ بما أن $(I, +, \cdot)$ مثالي

و أن $a \in I$ أذن $I = R$ وهذا تناقض كذلك $(I, +, \cdot)$ مثالي أعظم $(I \neq R)$ أذن a لا ينتمي الى أي مثالي أعظم ■

(الاتجاه الثاني) : ليكن $a \in R$ و a لا ينتمي الى أي مثالي أعظم (يجب أن نبرهن أن a هو عنصر قابل للعكس)

نفرض أن $(a) = R$ أذن $((a), +, \cdot)$ محتواة في مثالي أعظم و ليكن $(J, +, \cdot)$ (حسب مبرهنة كرول– زورن)

و عليه $(a) \subseteq J$ أذن $a \in J$ وهذا تناقض أذن $(a) = R$ بما أن $1 \in R$ أذن $1 \in (a)$ يوجد $r \in R$ بحيث أن

$r \cdot a = 1$ بما أن $(R, +, \cdot)$ حلقة أبدالية أذن $r \cdot a = a \cdot r$ و عليه $a \cdot r = 1$ أذن r عنصر

قابل للعكس معكوسه a ■

(2–7) تعريف (الحلقة الموضعية) : يقال للحلقة الأبدالية ذات العنصر المحايد بأنها حلقة موضعية أذا كانت تحتوي على مثالية عظمى وحيدة .

(2–8) أمثلة :

أ– الحلقة $(Z_4, +_4, \cdot_4)$ هي حلقة موضعية ومثاليها الأعظم هو $(\{0,2\}, +_4, \cdot_4)$.

ب– الحلقة $(Z_6, +_6, \cdot_6)$ هي ليست حلقة موضعية لأنها تحتوي على مثاليتان عظمى وهي $(\{0,3\}, +_6, \cdot_6)$ و $(\{0,2,4\}, +_6, \cdot_6)$.

(2–9) تعريف (جذر جاكوبسن للحلقة) [1] : لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة فأن جذر جاكوبسن للحلقة R أو جذر الحلقة R يرمز له بالرمز $Rad(R)$ أو $J(R)$ ويعرف على أنه تقاطع كل المثاليات العظمى في الحلقة $(R, +, \cdot)$:

أي أن $Rad(R) = \cap \{M \mid (M, +, \cdot)$ هو مثالي أعظم في $(R, +, \cdot)\}$.

(2–10) قضية : جذر جاكوبسن للحلقة $(R, +, \cdot)$ هو مثالي في الحلقة $(R, +, \cdot)$.

البرهان : لتكن $(R, +, \cdot)$ بما أن أي حلقة تحوي على الاقل مثالية أعظمية واحدة (حسب مبرهنة كرول – زورن)

ومن التعريف مباشرة الثلاثي $(Rad(R), +, \cdot)$ يشكل مثالية للحلقة $(R, +, \cdot)$ ■

(2-11) أمثلة و ملاحظات :

أ- في الحلقة $(Z_6, +_6, \cdot_6)$ فأن $Rad(Z_6) = \{0,2,4\} \cap \{0,3\} = \{0\}$.

ب-في الحلقة $(Z_4, +_4, \cdot_4)$ فأن $Rad(Z_4) = \{0,2\}$.

ج- في الحلقة $(Z_p, +_p, \cdot_p)$ حيث p عدد أولي فأن $Rad(Z_p) = \{0\}$.

د- في الحقل $(F, +, \cdot)$ فأن $Rad(F) = \{0\}$.

و- جذر الحلقة الموضعية $(R, +, \cdot)$ والتي مثاليتها العظمى $(M, +, \cdot)$ هو $Rad(R) = M$.

ز- جد جذر حلقة الأعداد الصحيحة $(Z, +, \cdot)$.

الحل : $Rad(Z) = \cap \{(p) \mid p$ عدد أولي$\} = (a)$ و a هو المضروب المشترك الأعظم لكل الأعداد الأولية، أذن كل الأعداد الأولية تقسم a بما أن (لايوجد عدد غير صفري يقبل القسمة على كل الأعداد الأولية) أذن $a = 0$ و عليه $Rad(Z) = \{0\}$.

ي- أذا كانت $(R, +, \cdot)$ حلقة ذات عنصر محايد فأن $J(R)$ دائما موجودة .

الحل : لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة بما أن أي حلقة تحوي على الأقل مثالية أعظمية واحدة (حسب مبرهنة كرول – زورن) ومن التعريف مباشرة الثلاثي $(J(R), +, \cdot)$ يشكل مثالية للحلقة $(R, +, \cdot)$.

(2-12) تعريف (الحلقة شبه البسيطة) : يقال أن الحلقة $(R, +, \cdot)$ بأنها حلقة شبه بسيطة أذا كان $Rad(R) = \{0\}$.

(2-13) أمثلة :

أ- كل حقل هو حلقة شبه بسيطة أي أن أذا كان $(F, +, \cdot)$ حقل فأن $Rad(F) = \{0\}$.

ب- الحلقة $(Z, +, \cdot)$ هي حلقة شبه بسيطة .

الحل : $Rad(Z) = \cap \{(p) \mid p$ عدد أولي$\} = (a)$ و a هو المضروب المشترك الأعظم لكل الأعداد الأولية، أذن كل الأعداد الأولية تقسم a بما أن (لايوجد عدد غير صفري يقبل القسمة على كل الأعداد الأولية) أذن $a = 0$ و عليه $Rad(Z) = \{0\}$.

(2-14) مبرهنة : لتكن $(I, +, \cdot)$ مثالي في الحلقة $(R, +, \cdot)$ فأن $I \subseteq Rad(R)$ أذا وفقط أذا كان كل عنصر في المجموعة المشاركة $I + 1$ له معكوس ضربي في R .

البرهان :

(**الاتجاه الأول**) : نفرض أن $\boldsymbol{I \subseteq Rad(R)}$ ونفرض $a \in I$ بحيث أن $1 + a$ ليس له معكوس، أذن يوجد مثالي أعظم M في R بحيث أن : $1 + a \in M$ بما أن $a \in Rad(R)$، وعليه حسب تعريف $Rad(R)$ يكون $a \in M$ وبالتالي يصبح $1 = (1 + a) - a \in M$، وعليه $M = R$. وهذا يعني بأن M ليس مثالي أعظم وهذا تناقض، أذن كل عنصر في $1 + I$ له معكوس ضربي في R ■

(الاتجاه الثاني) : نفرض أن كل عنصر في $1 + I$ له معكوس ضربي في R ونفرض أن $I \subseteq Rad(R)$ هذا يعني بأنه يوجد مثالي أعظم M في R بحيث أن $I \subseteq M$ نأخذ $a \in I$ و $a \in M$ من الواضح أن $R = (M, a)$ وعليه يوجد $m \in M$ و $r \in R$ بحيث أن $a \cdot r + m = 1$ أي أن $m = 1 - a \cdot r \in 1 + I$ أذن m عنصر له نظير و هذا تناقض وعليه $I \subseteq Rad(R)$ ■

(2–15) مبرهنة : في أي حلقة $(R , +, \cdot)$ العنصر $a \in Rad(R)$ أذا وفقط أذا كان $1 + r \cdot a$ له معكوس ضربي في الحلقة $(R , +, \cdot)$ لكل $r \in R$.

البرهان :

(**الاتجاه الأول**) : ليكن $a \in Rad(R)$ أذن $(a) \subseteq Rad(R)$ حسب مبرهنة $(2–14)$ فأن كل عنصر في المجموعة المشاركة $1 + (a)$ له معكوس ضربي

بما أن $1 + (a) = \{1 + r \cdot a \mid r \in R\}$ أذن كل عنصر $1 + (a)$ له معكوس ضربي في الحلقة $(R , +, \cdot)$ لكل $r \in R$ ■

(الاتجاه الثاني) : ليكن $1 + (a)$ له معكوس ضربي في الحلقة $(R , +, \cdot)$ لكل $r \in R$ بما أن $1 + (a) = \{1 + r \cdot a \mid r \in R\}$ أذن كل عنصر في المجموعة المشاركة $1 + (a)$ له معكوس ضربي وحسب المبرهنة $(2–14)$ فأن $(a) \subseteq Rad(R)$ بما أن $a \in (a)$ ، أذن $a \in Rad(R)$ ■

(2–16) نتيجة : العنصر المتساوي القوى في جذر الحلقة هو الصفر فقط .

البرهان : ليكن $a \in Rad(R)$ و أن a متساوي القوى أذن $a^2 = a$ (يجب أن نبرهن أن $a = 0$) ، بما أن $a \in Rad(R)$ أذن حسب المبرهنة $(2–15)$ فأن كل عنصر $1 + r \cdot a$ له معكوس ضربي في الحلقة $(R , +, \cdot)$ لكل $r \in R$ ضع $r = -1$ أذن $1 - a$ عنصر قابل للعكس يوجد $b \in R$ بحيث أن $(1 - a) \cdot b = 1$ أذن

$$a = a^2 = a^2 + a\cdot b - a\cdot b = a^2 + a^2\cdot b - a\cdot b$$
$$= a^2 + a(a\cdot b - b) = a^2 + a(-1) = a^2 - a = 0$$

(2–17) نتيجة : يكون العنصر a قابل للعكس في الحلقة $(R, +, \cdot)$ أذا وفقط أذا كان $a + Rad(R)$ عنصر قابل للعكس في الحلقة $(R/Rad(R), +, \cdot)$.

البرهان :

(**الاتجاه الأول**) : أفرض للمجموعة المصاحبة $a + Rad(R)$ معكوسا في $(R/$ $Rad(R), +, \cdot)$, لعنصر مل مثل $b \in R$ فأن $a\cdot b - 1$ يقع في $Rad(R)$ بعد ذلك نرجع إلى مبرهنة (2–15) .

لنستنتج أن للجداء $a\cdot b = 1 + 1\cdot(a\cdot b - 1)$ معكوسا ■

(الاتجاه الثاني): ليكن a عنصر قابل للعكس في الحلقة $(R, +, \cdot)$ أذن $a^{-1} + Rad(R) \in R/Rad(R)$

لكن $(a + Rad(R))^{-1} = a^{-1} + Rad(R)$

أذن $a + Rad(R)$ عنصر قابل للعكس في الحلقة $(R/Rad(R), +, \cdot)$ ومعكوسه $a^{-1} + Rad(R)$ ■

(2–18) مبرهنة : لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة فأن $(R/Rad(R), +, \cdot)$ هي حلقة شبه بسيطة .

البرهان : نرمز ل $Rad(R)$ بالرمز I افرض أن المجموعة المصاحبة $a + I \in Rad(R/I)$ للبرهنة على أن $a \in I$

لأنه بعد ذلك يكون $a + I = I$ بما أن $a + I$ تقع في $Rad(R)$. فمبرهنة (2–15) تؤكد أن $(1 + I) + (r + I)\cdot(a + I) = 1 + r\cdot a + I$ له معكوس في R/I لكل $r \in R$.

وطبقا لهذا توجد مجموعة مصاحبة $b + I$ (التي تعتمد بالطبع على a, r كليهما) بحيث أن $(1\cdot a\cdot r - I)\cdot(b + I) = 1 + I$ وهذا واضح انه مكافئ ل $b + a\cdot r\cdot b - 1 \in I = Rad(R)$

بالرجوع ثانية ل مبرهنة (2–15) نستخلص أن العنصر $b + a\cdot r\cdot b = 1 + 1\cdot$ $(b + a\cdot r\cdot b - 1)$ له معكوس c في R

لكن $(1 - r\cdot a)\cdot(b\cdot c) = (b - a\cdot r\cdot b)\cdot c = 1$ لذا فأن $1 + r\cdot a$ له معكوس في R .

وبما أن المحاور تتحقق لكل $r \in R$. فينتج أن $a \in Rad(R)$ ■

(19–2) تعريف (المثالي الصغير) : المثالي A من الحلقة $(\cdot, +, \boldsymbol{R})$ يسمى مثالي صغير في $(\cdot, +, \boldsymbol{R})$ ويرمز له بالرمز $A \nrightarrow R$

أذا كان لكل مثالي B من $(\cdot, +, \boldsymbol{R})$ أذا كانت $A + B = R$ فأن $B = R$.

بعبارة اخرى : $A \nrightarrow R$ أذا وفقط أذا كان لكل مثالي فعلي B في $(\cdot, +, R)$ فأن $A + B$ مثالي فعلي في الحلقة $(\cdot, +, R)$.

(20–2) أمثلة :

1– $(\cdot_4, +_4, \{0\})$ و $(\cdot_4, +_4, \{0, 2\})$ هي كل المثاليات الصغيرة في الحلقة $(\cdot_4, +_4, Z_4)$.

2– $(\cdot_6, +_6, \{0\})$ هو المثالي الصغيرة الوحيد في الحلقة $(\cdot_6, +_6, Z_6)$.

(21–2) قضية مساعدة : أذا كان $(\cdot, +, R)$ حلقة ذات عنصر محايد فأنه $R_a \nrightarrow R$ لكل $a \in R$ أذا وفقط أذا كان يوجد مثالي أعظمي مثل c بحيث أن $a \notin c$.

(22–2) نتيجة : ليكن $(\cdot, +, R)$ حلقة فأن $J(R) = \sum_{R_r \nrightarrow R} R_r$.

البرهان : ليكن $x \in J(R)$ أذن حسب المبرهنة (ليكن R حلقة ذات عنصر محايد فأن $r \in J(R)$ أذا وفقط أذا كان $R_r \nrightarrow R$) وعليه $R_x \nrightarrow R$ أذن $R_x \subseteq \sum_{R_r \nrightarrow R} R_r$ وعليه $X \in \sum_{R_r \nrightarrow R} R_r$ أذن $J(R) \subseteq \sum_{R_r \nrightarrow R} R_r$ وبصورة معاكسة، ليكن $y \in \sum_{R_r \nrightarrow R} R_r$ أذن $y = \sum_{i=1}^{n} u_i r_i$ حيث $R_{ri} \nrightarrow R$ لكل $i = 1,2,3, \ldots\ldots, n$,

$R_y = R(\sum_{i=1}^{n} u_i r_i) = \sum_{i=1}^{n} u_i (R_{ri})$ وعليه $u_i \in R$ لكل $i = 1,2,3, \ldots\ldots, n$

بما أن $R_{ri} \nrightarrow R$, $u_i (R_{ri}) \nrightarrow R_{ri}$ لكل $i = 1,2,3, \ldots\ldots, n$

وعليه $u_i (R_{ri}) \nrightarrow R$ لكل $i = 1,2,3, \ldots\ldots, n$

وحسب القضية المساعدة (2–21) فأن $\sum_{i=1}^{n} u_i (R_{ri}) \nrightarrow R$ أذن $R_y \nrightarrow R$ وبالتالي فأن $y \in J(R)$

حسب المبرهنة (ليكن R حلقة ذات عنصر محايد فأن $r \in J(R)$ أذا وفقط أذا كان $R_r \nrightarrow R$)

أذن $\sum_{R_r \nrightarrow R} R_r \subseteq J(R)$ *وعليه* $J(R) = \sum_{R_r \nrightarrow R} R_r$ ■

(23–2) نتيجة : لتكن $(\cdot, +, R)$ حلقة كل مثالياتها هي مركبات جمع مباشر فأن $J(R) = (0)$. وبالتالي فأن $(\cdot, +, R)$ حلقة شبه بسيطة .

البرهان : بما أن R حلقة شبه بسيطة أذن (0) هو المثالي الصغير الوحيد في R بما أن $J(R) = \{r \in R \mid R_r \nrightarrow R\}$

حسب المبرهنة (ليكن R حلقة ذات عنصر محايد فأن $r \in J(R)$ أذا وفقط أذا كان $R_r \nrightarrow R$) أذن $J(R) = (0)$ ■

المصادر References

[1] D.M.Burten : Abstract algebra , Wn.C.Brown publishers , 1988

[2] F.Kasch : Modules and ring . Academic press , London , 1982 .

[3] عادل غسان نعوم : نظرية الحلقات , كلية العلوم , جامعة بغداد , 1988

[4] Carl Faith , Algebra II Ring theory , Springer-Verlay , Berlin , 1976 .

[5] Donald S.passam , Acourse in Ring theory California , 1991 .

[6] Lam.Y.T , Exercises in classical Ring theory Spring-Verlay ,Berlin , 1994 .

[7] Hideyuki Matsumura , Commutative Ring theory Cambridge university Press , 2002 .

Jacobson's Radical of Rings

Abstract

Let $(R, +, \cdot)$ be a replacement ring with Identity . Jacobson's radical of the ring R is symbolized as Rad (R) and is defined as the intersection of all maximal ideals in the ring R . Many of the equivalent phrases of Jacobson's radical of rings are given, whereas we proved that $a \in \text{Rad}(R)$ if only if $1 + r\,a$ has a multiplying inverse in R for each $r \in R$. Also, we proved

$\text{Rad}(R) = \{ r \in R / R \text{ minimal ideal in } R\, r \}$

We prove , as well

$$\text{Rad}(R) = \sum_{Rr \to R} R\, r$$

Many result of Jacobson's radical of rings are given . For example, we proved that if $(I, +, \cdot)$ is an ideal in $(R, +, \cdot)$, then $I \subseteq \text{Rad}(R)$ if only if every element in the co-group $1 + I$ has a multiplying reverse in R .