استعمال توزيع معكوس كاما النصف الدائري
لتحديد احتمالية الاصابة بأمراض العيون

الباحث عمار محمد جاسم
كلية الادارة والاقتصاد/ جامعة كربلاء

ammar.m@s.uokerbala.edu.iq

أ. د. مهدي وهاب نصر الله
كلية الادارة والاقتصاد/ جامعة كربلاء

mehdi.wahab@uokerbala.edu.iq

ملخص

في هذا البحث، تم استعمال المحاكاة بواسطة برنامج ماتلاب باستعمال توزيع كاما المعكوس النصف دائري وطريقة التقدير (OHD) طريقة اقل مسافة Hellinger ذو الخطوة الواحدة لتحديد انحناء القرنية الخلفي لبيانات عن العين تم الحصول عليها من مختبر عيون كربلاء في محافظة كربلاء المقدسة للفحوصات التشخيصية المتقدمة لأمراض العيون باستعمال جهاز مفروس الشبكية Optical coherence tomography (OCT) للتصوير المقطعي ثلاثي الابعاد لعيون (١٠٠) مريض. وتم التوصل الى قيم دالة الكثافة الاحتمالية ودالة البقاء المقدرة بموجب طريقة (OHD) متقاربة مع قيم دالة الكثافة الاحتمالية عند البيانات الحقيقية، كلما زادت زاوية انحناء القرنية الخلفي، قل احتمال اصابة المريض بأمراض العين مثل الزرق (العمى). فعندما تكون زاوية انحناء القرنية الخلفي بمقدار (٤٥ , ٠) راديان فان احتمال بقاء المريض مصاب (٩٩٪)، وعندما تكون زاوية انحناء القرنية الخلفي بمقدار (٢٣ , ٢) راديان فان احتمال بقاء المريض مصاب (٠١٦ , ٠٪).

الكلمات المفتاحية: التوزيع الدائري(القطبي)، توزيع معكوس كاما النصف دائري، مقدر اقل مسافة Hellinger ذو الخطوة الواحدة، دالة الكثافة التوزيعية.

Title: The Use of Inverse Half-Cauchy Distribution

to Determine the Probability of Eye Diseases

Ammar Mohammed Jasim
University of Karbala - College of Management and Economics
ammar.m@s.uokerbala.edu.iq

Dr. Mehdi Wahab Nasrallah
University of Karbala - College of Management and Economics
mehdi.wahab@uokerbala.edu.iq

Abstract

In this research, simulation was used by MATLAB program using the semicircular inverse gamma distribution and the estimation method (OHD) one-step Hellinger least distance method to determine the posterior curvature of the cornea for eye data obtained from the Karbala Eye Laboratory in the holy city of Karbala for advanced diagnostic examinations of diseases Eyes using OCT (Optical coherence tomography) for three-dimensional tomography of the eyes of (100) patients. The values of the probability density function and the survival function estimated according to the (OHD) method were found to be close to the values of the probability density function when the real data, the greater the angle of the corneal curvature back, the less likely the patient will develop eye diseases such as glaucoma (blindness).

Keywords: circular (polar) distribution, semicircular inverse gamma distribution, one-step Hellinger minimum distance estimator, distribution density function.

المقدمة

تعرف القرنية بأنها الطبقة الخارجية الشفافة للعين التي تعمل مع بياض العين كحاجزٍ واقٍ يحمي مكونات العين الحساسة من تأثير الاوساخ والجراثيم والجزيئات الأخرى، ويمكن للقرنية أيضاً حجب كميات معينة من أشعة الشمس فوق البنفسجية. وتلعب القرنية دوراً أساسياً في قدرة الشخص على الرؤية حيث ينكسر الضوء عند دخوله إلى العين نتيجة لشكلها الخارجي، إذ يحدد انحناء هذه الطبقة الخارجية جودة تركيز العين على الأجسام القريبة منها والبعيدة عنها. وعندما تتعرض القرنية للتلف جراء إصابتها بمرضٍ أو التهاب أو أذى يمكن أن تؤثر الندب أو تغيُّرات اللون على الرؤية من خلال حجب الضوء أو حرفه لدى دخوله إلى العين. (Scott C. Litin M.D.,2018) وقد أجريت العديد من الدراسات بهذا الصدد ففي عام (٢٠١٥) استعمل (Rambli et al.) وآخرون اختبار التناقض لاكتشاف القيم المتطرفة الفردية أو المتعددة في البيانات نصف الدائرية بناءً على نظرية التباعد على التوزيع النصف الدائري الجديد الذي تم تطويره باستخدام تقنية الإسقاط المجسم العكسي على متغير له توزيع كاما. بعد ذلك، وتم تطبيق الاختبار على مجموعة بيانات العين التي تم الحصول عليها من عيادة الجلوكوما في المركز الطبي بجامعة مالايا في ماليزيا. وتوصلوا الى ان التوزيع المقترح ملائم لنمذجة البيانات التي تمثل نصف قطر دائرة الوحدة، وان الاختبار المستعمل على التوزيع المقترح أكثر فائدة للكشف عن القيم المتطرفة. في عام (٢٠١٧) اقترح (Abu Zaid) التوزيع النصف الدائري Burr-XI (Half Circular Bur-XII distribution) عن طريق استعمال تقنية اسقاط المجسم العكسية وقدر معلماته باستعمال طريقة الامكان الأعظم وقام بتقييم اداء التقديرات باستعمال تجارب محاكاة مونت –كارلوا على خمسة احجام عينات (n=10, 30, 50, 100, 200) التي تم توليدها من توزيع Burr–XII النصف دائري بالمعلمات (0.5, 1, 3=c=1, k) وتكرار (٢٠٠٠) مرة لكل تجربة محاكاة باستعمال المعايير متوسط التقديات (Mean), التحيز (Bias), متوسط مربعات الخطأ (MSE), وتم تطبيقه على مجموعة بيانات حقيقية لـ (٢٣) مصابا بانحناء القرنية الخلفي حيث تم التقاط الصور الشعاعية للعين باستعمال التصوير المقطعي للجزء الأمامي من التماسك البصري (AS-OCT) في عيادة الجلوكوما في المركز الطبي بجامعة مالايا ، ماليزيا وتم مقارنة تقديرات توزيع Burr-XII مع توزيع كاما النصف دائري المقترح من قبل (Rambli et al. , 2015) باستعمال معيار معلومة اكايكي (AIC), وتم التوصل من خلال تطبيق البيانات الحقيقية بان توزيع Burr-XII النصف دائري اكثر ملاءمة من توزيع كاما النصف دائري بحيث حقق اقل قيمة لمعيار معلومة اكايكي (AIC). ومن تجارب المحاكاة تم التوصل الى أن هنالك علاقة دالية متزايدة بين حجم العينة ومعدل التحيز ومتوسط مربعات الخطأ التي اكدت خاصية الاتساق

لمقدرات الامكان الأعظم ونسبة تغطية قليلة جداً عند فترة الثقة (٩٥٪) مع اختلاف طفيف عند حجم العينة (n=10). في عام (٢٠١٧) اقترح (Abu Zaid) التوزيع النصف الدائري Burr-XII (Half Circular (Bur-XII distribution عن طريق استعمال تقنية اسقاط المجسم العكسية وقدر معلماته باستعمال طريقة الامكان الأعظم وقام بتقييم اداء التقديرات باستعمال تجارب محاكاة مونت -كارلوا على خمسة احجام عينات (n=10, 30, 50, 100, 200) التي تم توليدها من توزيع Burr-XII النصف دائري بالمعلمات (0.5, 1, 3=c=1, k) وتكرار (٢٠٠٠) مرة لكل تجربة محاكاة باستعمال المعايير متوسط التقديرات ,(Mean)التحيز,(Bias) متوسط مربعات الخطأ ,(MSE)وتم تطبيقه على مجموعة بيانات حقيقية لـ (٢٣) مصابا بانحناء القرنية الخلفي حيث تم التقاط الصور الشعاعية للعين باستعمال التصوير المقطعي للجزء الأمامي من التماسك البصري -(AS OCT) في عيادة الجلوكوما في المركز الطبي بجامعة مالايا ، ماليزيا وتم مقارنة تقديرات توزيع Burr-XII مع توزيع كاما النصف دائري المقترح من قبل (Rambli et al. , 2015) باستعمال معيار معلومة اكايكي ,(AIC) وتم التوصل من خلال تطبيق البيانات الحقيقية بان توزيع Burr-XII النصف دائري اكثر ملاءمة من توزيع كاما النصف دائري بحيث حقق اقل قيمة لمعيار معلومة اكايكي (AIC).

في هذا البحث، سيتم استعمال توزيع جديد مقيد بنطاق معين من مدى دائرة الوحدة، توزيع نصف دائري طالما ان النماذج الأخرى تقع في نطاق الفترة (π0,2)والذي يمثل المشاهدات والواقعة بدقة على نصف دائرة الوحدة، على سبيل المثال في الفترة(0,π) بالراديان ، باستخدام الإسقاط المجسم العكسي وباستعمال طريقة مقدر اقل مسافة (OHD)لتحديد امراض العيون التي تخص القرنية.

١.مشكلة البحث:

تواجهنا في العالم الحقيقي, أن بعض الظواهر تقع ضمن المدة (الفترة) (0,2π) وعادة مايتم نمذجة هذه الظواهر عن طريق التوزيعات الدائرية (Circular distributions) ,ولكن قد تواجهنا مشكلة ان بعضاً من تلك الظواهر قد تحتاج أن تقع ضمن منتصف المدى الدائري اي ضمن المدة (الفترة) (0, π) إذ إن الخاصية الدورية للبيانات الدائرية ليست مفيدة للبيانات نصف الدائرية لأن 0°36 ليست هي نفسها 180°. لذلك من الضروري ايجاد انموذج او توزيع احتمالي يمثل تلك الظواهر وهذا ينطوي في ظل التوزيعات النصف دائرية (Half Circular distribution).

٢.هدف البحث:

يرمي البحث الى ايجاد توزيع كاما المعكوس النصف الدائري بالاعتماد على خاصية اسقاط المجسم العكسية (Inverse stereographic projection)والتي تختص بتحويل البيانات الاعتيادية (الديكارتية) الى بيانات قطبية (مقاسة بالزوايا) ومن ثم ايجاد خصائص التوزيع

الجديد النصف دائري ومن ثم تقدير معلمات التوزيع الجديد بالاعتماد على طريقة اقل مسافة Hellinger ذو الخطوة الواحدة (The One-Step Minimum Hellinger Distance Estimator) ومن ثم تطبيق المقدرات المستخرجة على بيانات حقيقية.

٣.التوزيع الدائري(القطبي) Circular(Polar) distribution

التوزيع الدائري (Circular distribution) أو التوزيع القطبي (Polar distribution) هو التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي الذي تكون قيمه هي الزوايا القطبية، والتي تقع ضمن الفترة (0،2π), والتوزيعات الدائرية غالبًا ما يكون توزيعات احتمالية مستمرة ، وبالتالي تكون لها دالة كثافة احتمالية ، ولكن يمكن أيضًا أن تكون هذه التوزيعات منفصلة ، وفي هذه الحالة تسمى توزيعات شبكية دائرية . يمكن استخدام التوزيعات الدائرية حتى عندما لا تكون المتغيرات المدروسة زوايا صريحة فالاعتبار الرئيسي هو أنه لا يوجد عادة أي تمييز حقيقي بين الأحداث التي تحدث في الطرف السفلي أو العلوي من النطاق، ويمكن تقسيم النطاق نظريًا في أي وقت. (Dodge, Y. 2006)

إذا كان التوزيع الدائري له كثافة احتمالية كالآتي:

$$p(\phi) \quad 0 \le \phi \le 2\pi \quad \text{..... (1)}$$

والتي يمكن تمثيلها بيانيا بمنحنى مغلق:

$$[x(\phi), y(\phi)] = [r(\phi)cos\phi, r(\phi)sin\phi] \quad \text{..... (2)}$$

حيث ان r(ϕ) نصف قطر الدائرة والذي يساوي:

(Phani,. & Rao. 2012)

$$r(\phi) = a + bp(\phi) \quad \text{..... (3)}$$

حيث ان a, b يتم اختيارهما على اساس شكل التوزيع ,على سبيل المثال اذا كان لدينا متغير عشوائي x يمثل الولادة في شهر معين من السنة ، وكانت الاشهر مرتبة حول دائرة ، بحيث يكون كل شهر بجوار الشهر التالي . فسيكون التوزيع الشبكي الدائري هو احتمال الولادة في شهر معين من السنة. أي ان دالة الكثافة الاحتمالية p(x) يمكن ان تلتف حول محيط دائرة نصف قطرها الوحدة والتي تشكل دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير الملتف (Wrapped Variable).

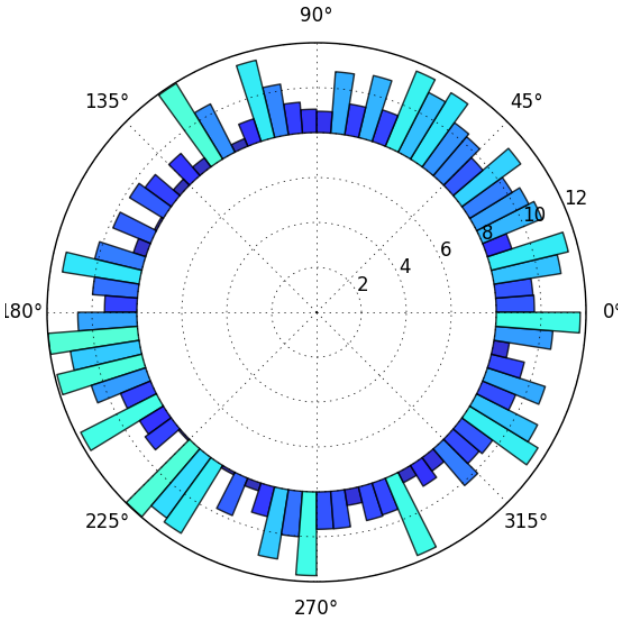
$$\theta = x_w = x \in (-\pi, \pi) \quad \text{..... (4)}$$

فأن:

$$p_w(\theta) = \sum_{k1=-\infty}^{\infty} p(\theta + 2\pi k) \quad \text{..... (5)}$$

يمكن توسيع هذا المفهوم ليشمل السياق متعدد المتغيرات من خلال امتداد المجموع البسيط إلى عدد F من المجاميع التي تغطي جميع الابعاد وكالآتي:

$$p_w(\vec{\theta}) = \sum_{k1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{k_F=-\infty}^{\infty} p(\vec{\theta} + 2\pi k_1 e_1 + \cdots + 2\pi k_F e_F) \quad \text{.....(6)}$$



شكل (١) توزيع الاحتمالات على قطر دائرة الوحدة

٤. توزيع معكوس كاما النصف دائري المحول(HCTIG):

لنفرض انه لدينا المتغير العشوائي X له توزيع كاما بالمعلمتين (α,β) حيث ان α معلمة الشكل, β معلمة القياس , فان دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائب تعطى بالصيغة الآتية:

$$f(x,\alpha,\beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}\, x^{\alpha-1}\ \ exp^{\left(-\frac{x}{\beta}\right)}\ \ I_{(0,\infty)} \quad \text{.....(7)}$$

اذ ان $\Gamma(\alpha)$ تعرف بدالة كاما والتي تحسب كما يأتي :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1}\, e^{-x} dx \quad \text{.....(8)}$$

$$= (\alpha-1)!$$

توزيع كاما المحول النصف دائري يرمز له CTIG(α,β)H يمكن الحصول عليه باستعمال التحويل:(Wang, M-Z.& Shimizu, K.2012)

$$\theta = 2tan^{-1}x \quad \text{.....(9)}$$

بحيث θ ان تعطى ضمن الفترة (0,π)

ليكن m (θ) =tan (θ/2) باستخدام إسقاط مجسم عكسي فان دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع HCTIG تعطى بالشكل الآتي:

$$g(\theta) = |m'(\theta)|f(m(\theta) \quad \text{.....(10)}$$

ومن معادلة (١٠) سنحصل على الآتي:

$$|m'(\theta)| = \left|\frac{1}{2}sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| \quad \text{.....(11)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1-\cos\left(2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}{1+\cos 2\left(\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}\right)$$

$$= \frac{1}{1+\cos(\theta)}$$

وأن:

$$f[m(\theta)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} \quad \ldots\ldots (12)$$

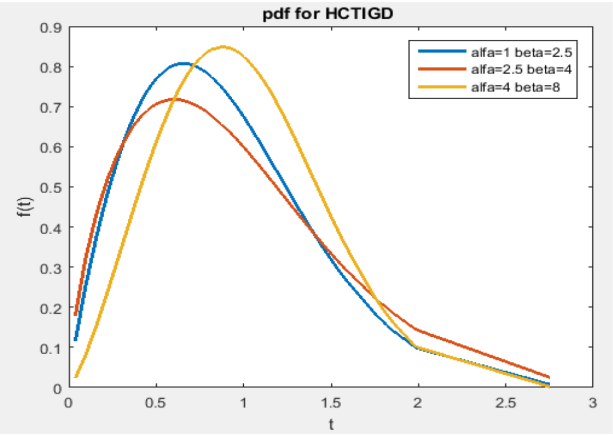
$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha-1} \quad exp\left(-\frac{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\beta}\right)$$

وبذلك تكون دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع كالآتي:

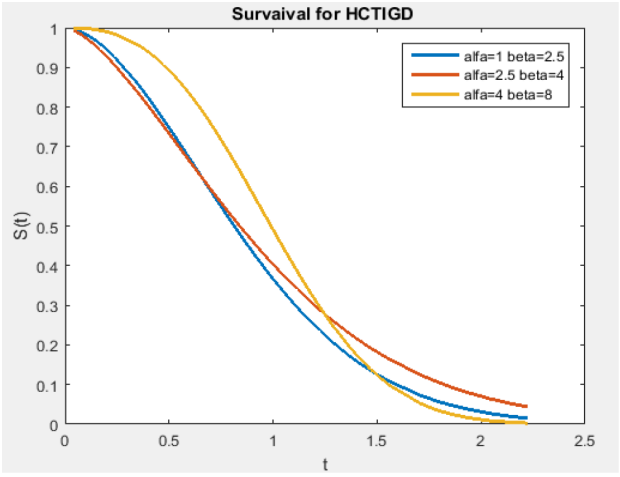
(ADZHAR et al , 2019)

$$g(\theta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}(1+\cos(\theta))} \quad \ldots (13)$$

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha-1} \quad exp\left(-\frac{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\beta}\right) \quad ; 0< \theta < \pi$$



شكل (٢) منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع معكوس كاما النصف دائري المحول



شكل (٣) منحنى دالة البقاء لتوزيع معكوس كاما النصف دائري المحول

٥. المحاكاة(Simulation) :

تعد دراسات المحاكاة أداة مهمة للبحث الإحصائي. اذ إنها تساعدنا على فهم خصائص الأساليب الإحصائية ومقارنة الطرائق المختلفة. وهي عملية تطبيق للخيال على واقع افتراضي تجريبي لغرض فحص مشكلة معينة او قياس اداء معين لغرض دراسة السلوك وبإعمام النتائج على الواقع الحقيقي، اي هو عملية تقليد لنظام معين ينطوي بناء تاريخ اصطناعي مع مميزات النظام الحقيقي لغرض فهم ذلك النظام أفضل ما يكون ودراسة سلوكه وتطوره بمرور الوقت. وكثيرا ما نجد في الواقع الحقيقي ان هناك عمليات تكون معقدة الفهم والتحليل لذلك فمن الافضل ان نوصف هذه العمليات بصورة مشابهة للصور الحقيقية بنماذج معينة، ففهم الانموذج يحقق لنا قدراً من الادراك للعملية الاصلية او الواقع الحقيقي عن طريق محاكاة الانموذج، ومن الطبيعي ان

درجة المشابهة بين أي تجربة محاكاة والواقع الحقيقي تعتمد على مدى مطابقة او مشابهة انموذج المحاكاة للنظام الحقيقي. لقد تعددت اساليب المحاكاة ولاسيما بعد التطور السريع الذي حصل في استعمال الحاسبة الالكترونية ولكونها الاسلوب الفعال الذي يمكننا من ادارته بشكل تطبيقي واسع في التطبيق العملي.

ومن المبادئ الاساسية للمحاكاة باستعمال الحاسبة وضع برنامج يمثل او يشابه سلوك العملية الحقيقية بشكل مقارب للواقع الحقيقي قدر الامكان، وغالباً ما يكون هذا الواقع معقداً جداً لتمثيله أو تقليده بصورة متقنة في برنامج الحاسبة وعلى الرغم من ذلك فأن اسلوب المحاكاة يمكن ان يعطي معلومات مفيدة عن الواقع الحقيقي الذي يشابهه، ونماذج المحاكاة الاكثر شبه للواقع الحقيقي تكون أكثر دقة في النتائج والمعلومات المستخلصة منها. ان اول مراحل استعمال اسلوب المحاكاة هو توليد المتغيرات العشوائية قيد الدراسة، كما ان أي تجربة محاكاة ماهي الا عبارة عن نوع معين من انواع المعاينة اذ تسحب هذه العينة من المجتمع الافتراضي الممثل للظاهرة المدروسة بأحجام مختلفة من العينات , وتكرار العملية مرات كثيرة بدلا من ان تسحب من المجتمع الحقيقي وبذلك فأن اسلوب المحاكاة يمكن ان يحقق للباحثين حلولا تحليلية وكذلك يؤمن قاعدة تجريبية تكون دليلاً لهم مع القاعدة النظرية لاختيار الاسلوب الملائم او الطريقة الملائمة لتحليل ودراسة بيانات الظواهر التي يدرسونها عن طريق مطابقة خصائصها مع الانواع التي طبقت المحاكاة عليها. (Silva& et al. , 2010 ,429-430)

٥-١ مراحل تطبيق تجارب المحاكاة:

تتضمن تجارب المحاكاة المراحل الاتية:

المرحلة الأولى:

تعد هذه المرحلة من اهم المراحل التي تعتمد عليها المراحل اللاحقة إذ يتم فيها اختيار القيم الافتراضية، أي تعيين احجام العينات المفترضة وكما يأتي:

n = 10, 30, 50, 100, 200 اذ تم الحصول على القيم الافتراضية تجريبياً من إجراء تجارب عدة واختيار القيم التي إستقرت عندها التقديرات وأعطت أفضل النتائج كما مبينة بالجدول الاتي:

جدول (١) قيم المعلمات الافتراضية

Parameter	Model			
α	1			
β	0.5	1	2	3

الجدول (١) يمثل القيم للمعلمات الافتراضية التي حصلنا عليها بتكرار تجارب المحاكاة مساوياً لـ (r = 1000) لكل تجربة.

المرحلة الثانية: توليد البيانات:

لغرض توليد بيانات توزيع HCTIG سيتم استعمال قاعدة الرفض والقبول بالاعتماد على التوزيع الأسي العمومي (Generalized exponential distribution) وفقاً للخطوات الآتية: (Kundu & D. Gupta, 2007)

١. نضع:

$$a = \frac{\left(1-e^{-\frac{1}{2}}\right)^{\alpha}}{\left(1-e^{-\frac{1}{2}}\right)^{\alpha} + \frac{\alpha e^{-1}}{2^{\alpha}}} \quad \ldots\ldots(14)$$

$$b = \left(1-e^{-\frac{1}{2}}\right)^{\alpha} + \frac{\alpha e^{-1}}{2^{\alpha}} \quad \ldots\ldots(15)$$

٢. نولّد متغيرا عشوائيا يتبع التوزيع المنتظم U على المدة (الفترة (0,1)

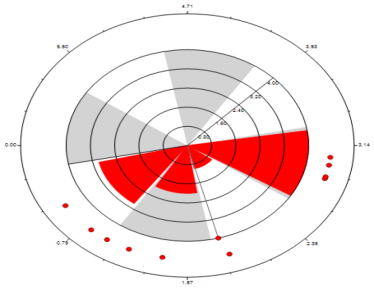
٣. اذا كان $U \le a$, فان $x = -2\ln\left[1-(Ub)^{\frac{1}{\alpha}}\right]$

٤. نولّد متغيرا عشوائيا يتبع التوزيع المنتظم V على الفترة (0,1) ويكون مستقلا عن U.

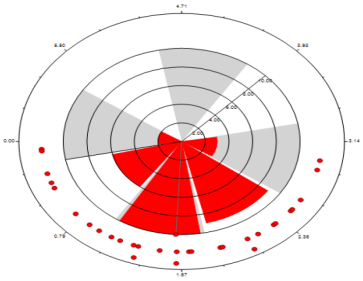
٥. اذا كان $V \le \frac{X^{\alpha-1}e^{-\frac{X}{2}}}{2^{\alpha-1}\left(1-e^{-\frac{X}{2}}\right)^{\alpha-1}}$ فان V هو توزيع كاما بمعلمتين, عدا ذلك نعود الى الخطوة ٢.

٦. اذا كان V هو توزيع كاما فان Z=1/V هو توزيع معكوس كاما بمعلمتين.

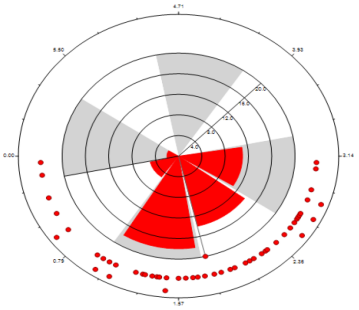
٧. باستعمال تقنية اسقاط المجسم العكسي عن طريق الدالـــــــة Z=tan(θ) فان الدالة العكسية لهذه الدالة هي . $\theta=\tan^{-1}(Z)$



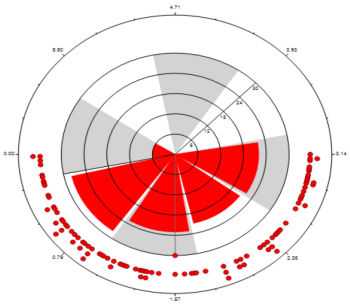
شكل (٤) عينة توزيع معكوس كاما النصف دائري المحول بحجم عينة n=10



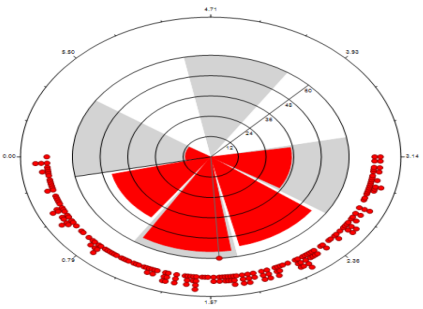
شكل (٥) عينة توزيع معكوس كاما النصف دائري المحول بحجم عينة n=30



شكل (٦) عينة توزيع معكوس كاما النصف دائري المحول بحجم عينة n=50



شكل (٧) عينة توزيع معكوس كاما النصف دائري المحول بحجم عينة n=100



شكل (٨) عينة توزيع معكوس كاما النصف دائري المحول
n=200بحجم عينة

ومن الاشكال (٤) الى (٨) نلحظ ان البيانات تتوزع في الربع الثالث والرابع من الدائرة وهو ما يمثل سلوك البيانات للتوزيع النصف دائري حسب حجم العينات المفترضة.

المرحلة الثالثة:

في هذه المرحلة يتم تقدير معلمات توزيع HCTIG بموجب طريقة مقدر اقل مسافة Hellinger ذو الخطوة الواحدة (The One-Step Minimum Hellinger Distance Estimator) .

تم الحصول على مقدرات معلمات توزيع HCTIG بإحدى الطرائق العددية المستعملة لحل المعادلات الرياضية غير الخطية عن طريق استعمال الدالة $f$solve في برنامج ماتلاب ولطريقة التقدير المذكورة انفا.

المرحلة الرابعة:

لغرض الوصول للمقدر الافضل عن طريق المفاضلة بين طرائق التقدير المدروسة، فقد جرى الاعتماد بشكل عام على المعايير الآتية:

أ. **معدل التحيز Bias**: يمثل معدل التحيز مطلق مجموع الفرق بين القيمة المقدرة والقيمة الحقيقية مقسوماً على عدد مرات تكرار التجربة وصيغته كالآتي:

$$\text{Bias} = \left|\frac{\sum_{i=1}^{r}(\hat{\theta}-\theta)}{r}\right| \quad \text{.....(16)}$$

r عدد مرات تكرار تجارب المحاكاة

ب. **متوسط مربعات الخطأ Mean Square of Errors (MSE)**: هو معدل مجموع مربعات الفرق بين المعلمة المقدرة والمعلمة الحقيقية مضافاً له مربع التحيز, وصيغته كالآتي:

$$\text{MSE} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{\theta}-\theta)^2}{n} + Bias^2 \quad \text{.....(17)}$$

(Ali H. Abu Zaid, 2017, 12)

ج. **نسبة التغطية للمعلمات المقدرة CP**

The actual coverage probabilities (CP) of nominal 95% credible/confidence intervals

في الإحصاء احتمالية التغطية هي تقنية لحساب مقدار الثقة، وهو نسبة الوقت الذي يحتوي فيه الفاصل الزمني على القيمة الحقيقية ويعطى بالصيغة الاتية:

$$\text{CP} = \frac{USL-LSL}{6\sigma} \quad \text{.....(18)}$$

حيث ان USL و LSL الحدود العليا والدنيا المخصصة لمدة (لفترة) الثقة, يعطي بسط CP مدى التغطية الذي يمكن أن تختلف فيه قياسات العملية. ويعطي المقام مدى التغطية الذي تختلف فيه العملية فعلياً. فكلما كان احتمال التغطية عاليا كانت المعلمات المقدرة أفضل.

(Panichkitkosolkul, W., 2016, 110)

٥-٢ مناقشة نتائج المحاكاة:

تم عرض نتائج تجارب المحاكاة وتحليلها لتقدير معلمات توزيع HCTIG في الجداول التي سيتم تحليلها بحسب التسلسل، ولحجوم العينات المختلفة والحالات المختلفة للقيم الافتراضية الاولية كافة والموضحة في الجدول (٢) ولتجربة عدد مكرراتها (١٠٠٠) مرة، وفيما يأتي النتائج الموضحة في الجداول التي سيتم تحليلها في الفقرة التالية.

٥-٣ تقديرات معلمات توزيع HCTIG عندما $\alpha=1$ وقيم: $\beta=0.5, 1, 2, 3$

جدول (٢) متوسط تقديرات معلمات توزيع HCTIG ومتوسط مربعات الخطأ ومقدار التحيز ونسبة التغطية عند مدة (فترة ثقة 95%) عندما $\alpha=1$ وقيم $\beta=0.5, 1, 2, 3$

β		Index	10		30		50		100		200	
			α	β	α	β	α	β	α	β	α	β
	0.5	Mean	0.84	0.86	0.85	0.83	1.04	0.59	1.01	0.52	1.00	0.51
		Bias	0.16	0.36	0.15	0.33	0.04	0.09	0.02	0.02	0.00	0.01
		MSE	0.178	0.115	0.031	0.111	0.024	0.045	0.012	0.013	0.014	0.010
		CP %	94	94	94	94	95	95	95	95	95	95
	1	Mean	0.88	0.87	0.84	0.85	0.99	0.97	1.10	0.99	1.01	1.10
		Bias	0.12	0.13	0.16	0.15	0.01	0.03	0.10	0.01	0.01	0.10
		MSE	0.113	0.057	0.123	0.056	0.021	0.055	0.018	0.014	0.012	0.001
		CP %	94	94	94	94	95	95	95	95	95	95
	2	Mean	0.82	2.99	0.81	2.66	0.97	2.14	1.19	2.13	1.14	2.12
		Bias	0.18	0.49	0.19	0.16	0.03	0.36	0.19	0.37	0.14	0.38
		MSE	0.122	0.982	0.121	0.872	0.111	0.512	0.111	0.311	0.101	0.122
		CP %	93	93	93	94	94	95	95	95	95	95
	3	Mean	0.41	3.89	0.61	3.50	0.75	3.47	1.42	3.33	1.33	3.23
		Bias	0.59	0.89	0.39	0.50	0.25	0.47	0.42	0.33	0.33	0.23
		MSE	0.444	0.357	0.342	0.232	0.331	0.211	0.131	0.114	0.121	0.111
		CP %	90	92	92	93	94	94	95	95	95	95

من جدول (٢) وعند القيم الافتراضية و α =1 β=0.5, 1, 2, 3 يتضح ما يأتي:

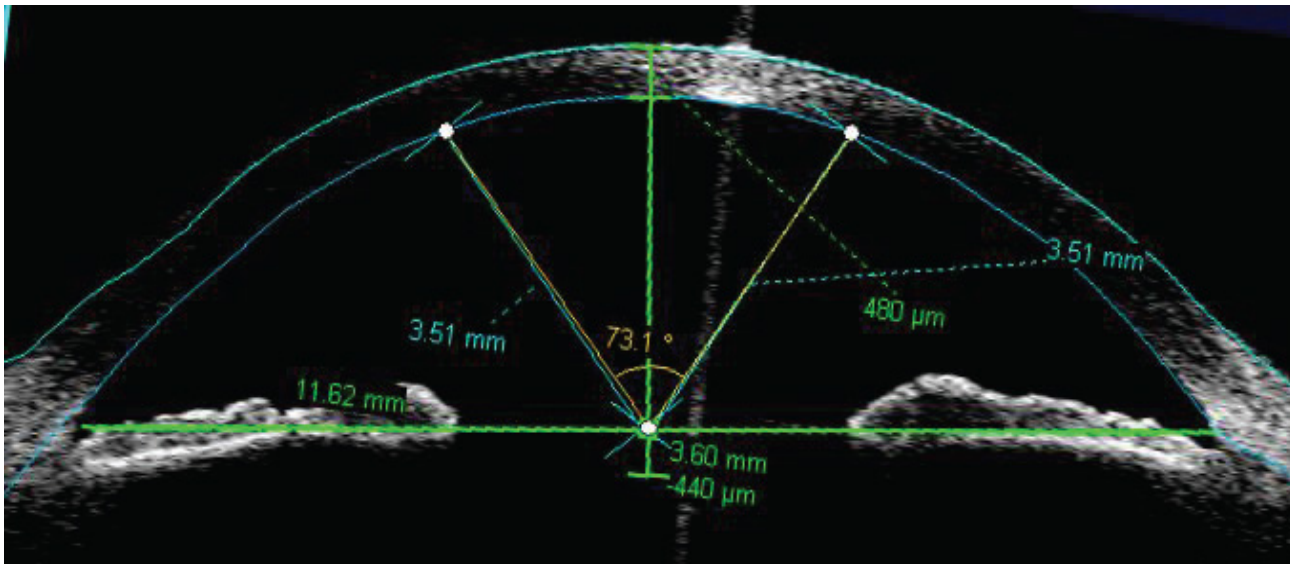
١. القيم التقديرية متناسقة مع القيم الافتراضية وقريبة عليها وكلما زاد حجم العينة اقتربت المعلمات المقدرة من المعلمات الافتراضية.

٢. برهنت طريقة مقدر اقل مسافة Hellinger ذو الخطوة الواحدة (OHD)عند القيم الافتراضية β=0.5,1,2,3 و α=1انها تمتلك اقل معدل تحيز (Bias) واقل متوسط مربعات خطأ (MSE) واكبر نسبة تغطية (CP) لكافة القيم التقديرية.

٣. نلحظ وجود دالة متناقصة بين حجم العينة ومعدل التحيز ومتوسط مربعات الخطأ. وان نسبة التغطية مغلقة جداً عند (٩٥٪) لأحجام العينات (n=50 ,100,200) مع تغيرات طفيفة عند احجام العينات (n=10,30).

٦. البيانات الحقيقية (Real Data)

أخذت مجموعة بيانات عن العين تم الحصول عليها من مختبر عيون كربلاء في محافظة كربلاء للفحوصات التشخيصية المتقدمة لأمراض العيون باستعمال جهاز مفروس الشبكية OCT للتصوير المقطعي ثلاثي الابعاد المقدسة والتي تم التقاط صور للجزء الخلفي من عيون (١٠٠) مريض. والمتغير الذي يمثل البيانات المدروسة هو الزاوية مقاسة بالرادين والتي تقيس الانحناء الخلفي للقرنية الناتجة من تقاطع المحور الهندسي للعين (الخط الأفقي) مع الخط المصنوع بين التوءات الصلبة الأنفية والزمنية (الخط العمودي). إذ عندما نرسم نصف القطر إلى السطح الخلفي للقرنية بأطوال تتراوح بين (٣,٤٩،٣,٥١) ملم فان الزاوية الممتدة بنصف القطر هي انحناء القرنية الخلفي كما مبين في الشكل (٩). من المتوقع أن يكون للزاوية قيمة أعلى عندما تكون القرنية محدبة بشكل أكبر.



شكل (٩) قياس انحناء القرنية الخلفي (Rambli et al., 2015, 4)

٧.اختبار ملائمة البيانات Data Fitting:

للتأكد من ان البيانات ملائمة للتوزيعات المدروسة تم استعمال اختبار Chi-square لحسن المطابقة وبموجب الفرضية الآتية:

H_0:The data have the HCTIG

H_1:The data dont have the HCTIG

ولاختبار هذه الفرضية الاحصائية سيتم احتساب قيمة إحصاءه χ^2 وحسب الصيغة الآتية:

$$\chi_c^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \quad \text{.....(19)}$$

حيث تم احتساب إحصاءه حسن المطابقة χ_c^2 في برنامج (MatLab) وكانت نتائج الاختبار كما في جدول (٣):

جدول (٣) نتائج إختبار ملائمة البيانات

Distribution	χ_c^2	χ_t^2	Sig.	Decision
HCTIG	0.07855	15.51	0.44358	Don't reject

نلحظ من جدول (٣) ان قيمة χ_c^2 المحسوبة لتوزيع معكوس كاما النصف دائري المحول والبالغة (٠,٠٧٨٥٥) اقل من قيمة χ_t^2 الجدولية عند مستوى معنوية ٥٪ ودرجة حرية (٨) والبالغة (١٥,٥١) وكانت قيمة Sig=٠,٤٤٣٥٨ اكبر من مستوى المعنوية (٠,٠٥) وهذا يعني عدم رفض فرضية العدم اي ان البيانات الحقيقية تتوزع وفقاً لتوزيع معكوس كاما النصف دائري المحول.

٨. المفاضلة بين التوزيع المقترح وباقي التوزيعات:

في هذه الفقرة سيتم استعمال معايير المقارنة بين التوزيعات وهي (-2LnL, AIC , AICc, BIC, HQIC) للمقارنة بين التوزيعات المستعملة وهي توزيع معكوس كاما النصف دائري المحول وتوزيع معكوس كاما وتوزيع كاما بمعلمتين لغرض معرفة اي من التوزيعات اكثر دقة للبيانات الحقيقية وكانت النتائج في جـــــــدول(٤).

جدول (٤) نتائج اختبارات المقارنة والدقة والتي طبقت على البيانات الحقيقية

Distribution	MMLE	-2LnL	AIC	AICc	BIC	HQIC
HCTIG	α=1.2134 β=2.1123	123.22	123.56	123.88	123.45	5.08
Inverse Gamma	α=1.32311 β=2.4511	124.98	124.78	124.69	124.55	7.66
Gamma	α=1.51221 β=2.75332	126.99	126.88	126.69	126.88	9.64

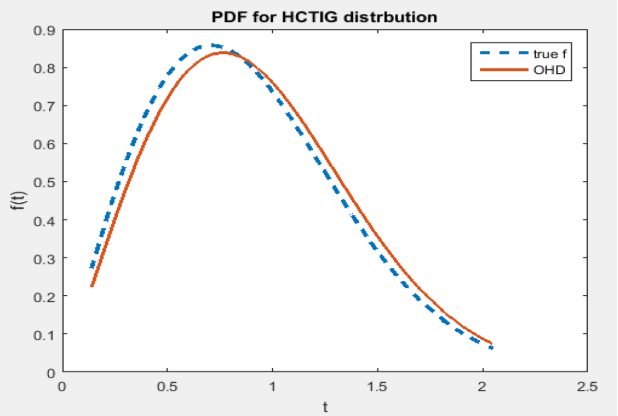
نلحظ من جدول (٤) بان معايير الاختبارات الخاصة بتوزيع معكوس كاما النصف دائري المحول أفضل من توزيع كاما وتوزيع معكوس كاما في ملاءمة البيانات الحقيقية، وهذا يدل عن ملاءمة البيانات الحقيقية أكثر لتوزيع معكوس كاما النصف دائري المحول من باقي التوزيعات. ونلاحظ ايضاً ان المعلمات المقدرة بطريقة اقل مسافة Hellinger ذي الخطوة الواحدة (The One-Step Minimum Hellinger Distance Estimator) للبيانات الحقيقية لتوزيع معكوس كاما النصف دائري المحول أكثر اقتراباً للمعلمات الافتراضية في الجانب التجريبي بخلاف باقي التوزيعات التي نلاحظ ان المعلمات المقدرة أكثر ابتعاداً عن المعلمات الافتراضية.

٩. تحليل البيانات الحقيقية: (Real data analysis)

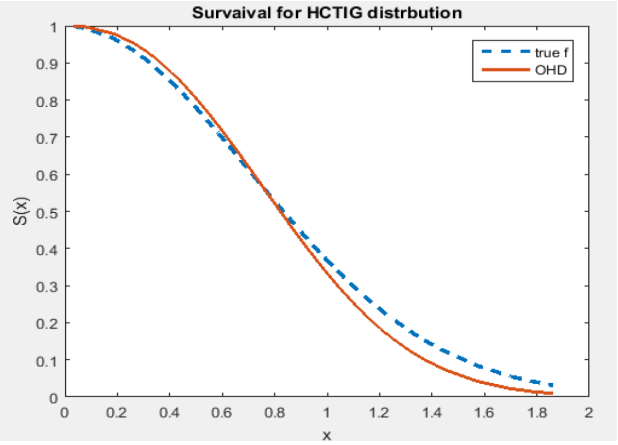
بينت نتائج تجارب المحاكاة الموضحة في هذا البحث أفضلية طريقة اقل مسافة Hellinger ذو الخطوة الواحدة (The One-Step Minimum Hellinger Distance Estimator) في تقدير معلمات توزيع معكوس كاما النصف دائري المحول عند كافة احجام العينات المفترضة، وتبين كذلك من الجانب التطبيقي أفضلية معكوس كاما النصف دائري المحول لتمثيل البيانات الحقيقية، وعلى ضوء ذلك تم تقدير المعلمات ودالة البقاء بطريقة اقل مسافة Hellinger ذو الخطوة الواحدة وكانت نتائج التقدير كما في جدول (٥) أدناه:

جدول (٥) قيم دالة الكثافة الاحتمالية ودالة البقاء المقدرة بموجب طريقة (OHD) للبيانات الحقيقية

No.	t_i	$f(t_i)$	(t_i)	Real $S(t_i)$	(t_i)
1	0.45	0.21836	0.22511	0.99956	0.99856
2	0.47	0.22786	0.22561	0.99955	0.99844
3	0.56	0.24117	0.23906	0.99933	0.99831
..	..	..	.	.	..
50	1.47	0.65511	0.59412	0.10327	0.10227
51	1.48	0.65453	0.59412	0.10122	0.10022
52	1.49	0.67885	0.59412	0.10051	0.19951
53	1.54	0.55522	0.59412	0.19877	0.19777
54	1.55	0.66533	0.59412	0.19676	0.19576
.. .	..	..	..	.. .	.. .
97	2.21	0.26747	0.25783	0.00054	0.00044
98	2.21	0.26747	0.25783	0.00045	0.00035
99	2.22	0.24455	0.25783	0.00035	0.00025
100	2.23	0.23422	0.25783	0.00026	0.00016



شكل (١١) منحنى دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طريقة اقل مسافة Hellinger ذو الخطوة الواحدة



شكل (١٢) منحنى دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طريقة اقل مسافة Hellinger ذو الخطوة الواحدة

الاستنتاجات

من الجدول (٥) والأشكال (١١) و(١٢) يتضح الآتي:

١. تناقص قيم دالة البقاء مع الزمن وبصورة واضحة وهذا ما يطابق سلوك هذه الدالة كونها متناقصة مع الزمن.

٢. قيم دالة الكثافة الاحتمالية المقدرة بموجب طريقة (OHD) متقاربة مع قيم دالة الكثافة الاحتمالية عند البيانات الحقيقية.

٣. كلما قلت زاوية انحناء القرنية الخلفي، قل احتمال اصابة المريض بأمراض العين مثل الحول الزرق العمى. فعندما تكون زاوية انحناء القرنية الخلفي بمقدار (٠,٤٥) راديان فان احتمال بقاء المريض مصاب (٩٩٪) , وعندما تكون زاوية انحناء القرنية الخلفي بمقدار (٢,٢٣) راديان فان احتمال بقاء المريض مصاب (٠,٠١٦٪).

التوصيات

من ما تم التوصل اليه من استنتاجات نوصي بالآتي:

١. استعمال تقنية الاسقاط العكسي لإيجاد التوزيعات النصف دائرية المحولة والتوزيعات المركبة والتوزيعات المختلطة والتي تتضمن أكثر من معلمتين.

٢. استعمال طريقة مقدر اقل مسافة Hellinger ذو الخطوة الواحدة (OHD) لتقدير المعلمات كونها أعطت نتائج مقبولة.

٣. الحفاظ على العين من الامراض خصوصا انحناء القرنية والبحث في أسبابها وطرق معالجتها ومكافحة الحالات المماثلة.

٤. نوصي وزارة الصحة العراقية بضرورة إعتماد نتائج هذه الرسالة لغرض تقدير احتمال الاصابة بأمراض العين بالاستناد إلى زاوية انحاء القرنية الخلفي.

المصادر

1. ADZHAR RAMBLI, IBRAHIM MOHAMED, KUNIO SHIMIZU & NORLINA MOHD RAMLI, (2019), " A Half-Circular Distribution on a Circle", Sains Malaysiana 48(4)(2019): 887-892 http://dx.doi.org/10.17576/jsm-2019-4804-21
2. Dodge, Y. (2006). The Oxford Dictionary of Statistical Terms. OUP. ISBN 0-19-920613-9
3. Gato, R. & Jammalamadaka, S.R. 2003. Inference for wrapped symmetric a-stable circular models. The Indian Journal of Statistics 65(2): 333-355.
4. Jammalamadaka, S.R. & SenGupta, A. 2001. Topics in Circular Statistics. Singapore: World Scientific.
5. Jones, M.C. & Pewsey, A. 2005. A family of symmetric distributions on the circle. Journal of the American Statistical Association 100: 1422-1428.
6. Kato, S. & Jones, M.C. 2010. A family of distributions on the circle with links to, and applications arising from, Möbius transformation. Journal of the American Statistical Association 105: 222-229.
7. Lund, U. 1999. Least circular distance regression for directional data. Journal of Applied Statistics 26: 723-733.
8. Mardia, K.V. 1972. Statistics of Directional Data. London: Academic Press.
9. Mardia, K.V. & Jupp, P.E. 2000. Directional Statistics. 2nd ed. Chichester: Wiley.
10. McKay, J. 1987. On computing discriminants. The American Mathematical Monthly 94(6): 523-527.
11. Minh, D.L.P. & Farnum, N.R. 2003. Using bilinear transformations to induce probability distributions. Communications in Statistics-Theory and Methods 32: 1-9.
12. Phani, Y., Girija, S.V.S. & Rao, A.V.D. 2012. Circular model induced by inverse stereographic projection on extreme-value distribution. Engineering Science and Technology 2(5): 881-888.
13. Rambli, A., Mohamed, I.B., Shimizu, K. and Khalidin N. (2015). Outlier detection in a new half-circular distribution. AIP Conference Proceedings, Selangor, Malaysia, 24-26, November, paper no. 050018. pp. 1-5, doi: 10.1063/1.4932509.
14. Scott C. Litin M.D., (2018). 'Mayo Clinic Family Health ', 5th Edition: Completely Revised and Updated Hardcover - May 29.
15. Venables, W.N. & Ripley, B.D. 2002. Modern Applied Statistics with S. 4th ed. New York: Springer.
16. Wang, M-Z. & Shimizu, K. 2012. On applying Möbius transformation to cardioids random variables. Statistical Methodology 9: 604-614.