Warith Scientific Journal

توظيف إسلوب المعكوس الكروي المعدل في بناء توزيع احتمالي ليندلي شبه الدائري مع تطبيق عملي

On Stereographic Semi-circular Three Parameter Lindley Distribution With practical application

نجوى تركي عواد
NAJWAA TURKI AWAD [1,a]
najwaturkiawad@gmail.com
كلية الادارة والاقتصاد جامعة كربلاء ,كربلاء ,العراق
College of Administration and Economics, University of Karbala

ا.م.د صدى فايض محمد
Ass. Prof. Dr. Sada Fayed Mohammed [2,b]
Sada.f@uokerbala.edu.iq
كلية الادارة والاقتصاد جامعة كربلاء ,كربلاء ,العراق
College of Administration and Economics, University of Karbala

المستخلص :في هذا البحث تم ايجاد التوزيع المعكوس الكروي المعدل شبه الدائري(لتوزيع ليندلي ذو ثلاثة معلمات) والتي تختص بتحويل البيانات الاعتيادية (الديكارتية) الى بيانات قطبية (مقاسة بالزوايا) ومن ثم ايجاد خصائص التوزيع المعكوس الكروي المعدل شـــبه الدائري(لتوزيع ليندلي ذو ثلاثة معلمات) ومن ثم تقدير معلمات التوزيع الجديد بالاعتماد على طريقة يقة الامكان الاعظم (Maximum Likelihood)_وطريقة الفترات التجزيئية ولغرض المقارنة بين طرائق تقدير المعلمات للتوزيع المقترح فقد تم توظيف اسلوب محاكاة مونت كارلو (Monte carlo) باستعمال برنامج بلغة(الماتلاب) لإجراء عدة تجارب بأحجام عينات مختلفة (صغيرة(30)، ومتوسطة(50) وكبيرة(150,100)) بالاعتماد على المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطأ (MSE),وقد اظهرت النتائج افضـــلية طريقة طريقة الامكان الاعظم في حســـاب مقدرات معلمات التوزيع المقترح في ضـــل حجوم العينات المتوســـطة والكبيرة وافضلية طريقة المقدرات التجزيئية في ضل حجوم العينات الصغيرة والمتوسطة .

الكلمات المفتاحية: طريقة الامكان الاعظم, طريقة الفترات الجزئية, التوزيع المعكوس الكروي المعدل شبه الدائري, توزيع ليندلي ذي الثلاث معلمات .

ABSTRACT: In this paper, we found the semi-circular modified spherical inverse distribution (for a three-parameter Lindley distribution), which is concerned with converting ordinary (Cartesian) data into polar data (measured by angles) and then finding the characteristics of the semi-circular modified spherical inverse distribution (for a three-parameter Lindley distribution). The parameters of the new distribution are then estimated based on the Maximum Likelihood method and the fractional interval method. For the purpose of comparing the methods of estimating the parameters of the proposed distribution, the Monte Carlo simulation method was employed using a program in the MATLAB language to conduct several experiments with sample sizes. Different sizes (small (30), medium (50) and large (150,100)) based on the statistical standard Mean Squared Error (MSE). The results showed the superiority of the maximum likelihood method in calculating the estimates of the parameters of the proposed distribution under medium and large sample sizes and the superiority of the small method. And medium.

Keywords: Maximum potential method, subinterval method, semicircular modified spherical inverse distribution, three-parameter Lindley distribution.

1-المقدمة: (Introduction)

تكمن اهمية التوزيع الاحتمالي في قابلية التطبيق على بيانات العالم الحقيقي وكذلك قدرته على ملائمة البيانات بدقة وفائدته في عمل التنبوءات ورســـم روى ذات مغزى عند اســـتعمال اي توزيع في مجال بحث معين فيتم تحديده من خلال مدى استيفائه لهذه المعايير للبيانات والتطبيقات المحددة من خلال نمذجة البيانات الزاوية (الدائرية) التي تعد من التقنيات التطبيقية الوثيقة الصلة والمهمة للغاية في العديد من المجالات مثل العلوم الفيزيائية والعلوم الطبية وعلم الارصاد الجوي وعلم النفس وغيرها من العلوم ,لذلك جاء هذا البحث لا يجاد انموذج او توزيع احتمالي يمثل تلك الظواهر وهذا ينطوي في ظل التوزيعات الشبه دائرية وهو توزيع ليندلي ذو ثلاثة معلمات .

2-مشكلة البحث: (Problem of Research)

بالرغم من اتساع تطبيق التوزيعات الاحتمالية في مجالات مختلفة من مجالات الحياة، تواجهنا في العالم الحقيقي بعض الظواهر تقع ضـــمن الفترة $(\mathbf{0, 2\pi})$ نمذجة بعض وعادة مايتم نمذجة هذه الظواهر عن طريق التوزيعات الدائرية **(Circulardistributions)** ولكن قد تواجهنا مشـــكلة ان بعضـــاً من تلك الظواهر قد تحتاج أن تقع ضـــمن المدى الدائري اي ضـــمن الفترة $(\mathbf{0, 2\pi})$ حيث أن الخاصـــية الدورية للبيانات الدائرية ليســـت مفيدة للبيانات الدائرية لأن 0° ليست هي نفسـها 180°. لذلك من الضـروري ايجاد انموذج او توزيع احتمالي يمثل تلك الظواهر وهذا ينطوي في ظل التوزيعات الشبه دائرية لذلك تضمنت مشكلة الرسالة :-

- صعوبة التعامل مع البيانات الدائرية وتحديد توزيع دائري لها .
- تحويل التوزيعات الخطية الى شبه دائرية التي تقع ضمن الفترة $(\mathbf{0, 2\pi})$.

- ايجاد توزيع شبه دائري باستخدام الصيغة المجسمة من التوزيع الخ

3-هدف البحث:

(Aim of Research)

1- بناء توزيع احتمالي جديد باستعمال نظرية التوزيعات الدائرية بالاعتماد على اسلوب المعكوس الكروي المعدل والذي يختص بتحويل التوزيعات الخطية الى توزيعات شبه دائرية .
2- اشتقاق خصائص التوزيع الجديد وتقدير معلماته ودالة البقاء بطرائق مختلفة (طريقة الامكان الاعظم (MLE) وطريقة الفترات التجزيئية .
3- اختيار افضل طريقة لمقدرات المعلمات وذلك بالاعتماد على المقياس الاحصائي متوسط مربعات الخطاء (MSE) وباستعمال اسلوب المحاكاة واحجام عينات مختلفة.

4-دالة البقاء : **(Survival Function)**

أحد أساليب في علم الإحصاء هو تحليل البقاء على قيد الحياة، الذي يصف الموت في الكائنات الحية والفشل في لأنظمة والمكائن إضافة الى استخداماتها في الجانب الحياتي والجانب الطبي ويمكن تعريف وقت البقاء على انه حدوث حدث معين، كظهور مرض معين او الاستجابة الى العلاج معين او الانتكاسة او الموت، يتركز تحليل البقاء على قيد الحياة بشكل رئيسي على التنبؤ في تحديد احتمال المخاطر ويرمز لها بالرمز $S(t)$ ويمكن التعبير عنها رياضيا كالاتي [7] [8] :

$$S(t) = 1 - F(t) \quad \dots (1)$$

$F(t)$: يمثل دالة الكثافة التجميعية التراكمية للمتغير العشوائي.

:يمثل زمن بقاء الكائن الحي على قيد الحياة

5- توزيع ليندلي ذي الثلاث معلمات: **(Three Parameter Lindley Distribution)**

يعد توزيع ليندلي [10]من التوزيعات المستخدمة بشكل واسع في نمذجة بيانات الحياة ودالة البقاء، وان اكتشاف هذا التوزيع ساهم في تطور الإحصاء لأهميته في العلوم الطبية والهندسية، ونمذجة بيانات الوقت، ويعد أحد نماذج الفشل وله العديد من الاستعمالات في الحقول المختلفة منها في دراسات المعولية، والدراسات السكانية المتمثلة بتوقعات جدول الحياة وان دالة الكثافة الاحتمالية للتوزع تكون بالصيغة التالية:

$$f(x,\theta,\alpha,\beta) = \frac{\theta^2}{\alpha\theta+\beta}(\alpha+\beta x)e^{-\theta x} \quad ،\theta > 0 \beta \quad > 0 \quad ، x > 0 \quad .\theta\ \beta + \alpha > 0 \quad \dots (2)$$

حيث ان: -

α : معلمة الشكل (Shape parameters).

β :معلمة الشكل (Shape parameters).

θ : معلمة القياس(Scale parameter) .

وتكون دالة الكثافة التجميعية (c.d.f) للتوزيع فتكون بالصيغة الاتية.

$$F(x.\theta.\alpha.\beta) = 1 - \left[1 + \frac{\theta\beta x}{\theta\alpha+\beta}\right] e^{-\theta x} \quad \dots (3)$$

اما دالة البقاء ودالة المخاطرة فيمكن صياغتهما وفق الصيغة الاتية:

$$S(t) = \left[1 + \frac{\theta\beta x}{\theta\alpha+\beta}\right] e^{-\theta x} \quad \dots (4)$$

$$h(x) = \frac{\theta^2(\alpha+\beta x)}{(\beta\theta x+\theta\alpha)+\beta} \quad \dots (5)$$

6- التوزيعات الدائرية: **Circular Distribution**

التوزيع الدائري ، المعروف أيضا باسم التوزيع الاتجاهي ، هو توزيع احتمالي يصف احتمال وقوع حدث أو متغير عشوائي على مقياس دائري. يتم استعماله لنمذجة البيانات التي يتم قياسها في الزوايا أو الاتجاهات ، حيث تلتف القيم بطريقة دائرية بحيث يكون المدى للمتغير العشوائي الدائري الدائرية الاحتمالية التوزيعات وتقسم $(-\pi, \pi)$ او(0, 2π)هو(Circular Random (Variable)الى قسمين , الأول توزيعات دائرية متقطعة والتي تعيين كتلة احتمالية قابلة للعد والتي تسمى بالتوزيعات الشبكية الدائرية , الثاني توزيعات دائرية مستمرة وتكون لها دالة الكثافة الاحتمالية الدائرية للمتغير العشوائي الدائري θ [12]لها الخصائص الآتية:

1. $f(\theta) = \geq 0$
2. $\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)d\theta = 1, -\infty < \theta < \infty$
3. $f(\theta) = (\theta + c.2\pi)$

7 - خريطة الاسقاط المجسم لتوليد التوزيعات شبه الدائرية (Inverse stereographic projection Semicircular)

ان إسقاط خريطة لنصف الكرة الأرضية يوضح خطوط الأرض لخط العرض وخط الطول المسقطة على مستوى مماس بواسطة شعاعي من نقطة على سطح الكرة المقابلة لنقطة التماس. كما بالمثل فان الإسقاط المجسم هو تعيين دالة معينة تقوم بإسقاط شكل كروي على مستوى اقليدي. حيث يتم تحديد الإسقاط على الكرة بأكملها ، باستثناء نقطة واحدة يتم تحديدها وهي نقطة الإسقاط. وهو طريقة لتصوير الكرة على انها المستوى الاحداثي الذي منه نحصل على البيانات الدائرية. اي ان طريقة اسقاط المجسم العكسية طريقة لاسقاط المتغير العشوائي من خط الاعداد الحقيقية الى البيانات الاحداثية على دائرة الوحدة بحيث يمكن استخدام الاحصاءات الدائرية لانشاء التوزيعات الدائرية او النصف دائرية عن طريق دالة تحويل تحول من البيانات على خط الاعداد الحقيقية الى بيانات اتجاهية مقاسة بالزوايا .[13]

اذا كان لدينا المتغير العشوائي المقاس على خط الاعداد الحقيقية R فعند اسقاط خط من نقطة من نقاط المتغير العشوائي x الى دائرة الوحدة فان هذا الخط يصنع زاوية في نقطة تقاطع الخط المماس مع محيط دائرة الوحدة فان طريقة الاسقاط العكسية تتم من خلال الدالة

$$x = v\tan(\frac{\theta}{2})$$

فان الدالة العكسية لهذه الدالة هي:

$$T^{-1}(x) = 2tan^{-1}\left(\frac{x}{v}\right)$$

فان توزيع *Stereographic Semicircular Distribution* الذي يرمز له بالرمز *SSD* يمكن الحصول عليه باستعمال تقنية إسقاط المجسم العكسية *(Inverse stereographic projection)* عن طريق التحويلة الآتية:

$$F(\theta) = G\left(V\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \quad ; 0 < \theta < \pi \qquad \ldots (6)$$

اذ ان $G(x)$ هي دالة الكتلة او الكثافة الاحتمالية للتوزيع الأصلي $(c.d.f)$

$F(\theta)$ دالة الكتلة او الكثافة التراكمية لتوزيع *Stereographic Distribution*

- يمكن أيجاد الدالة الاحتمالية $(p.d.f)$ لتوزيع*Stereographic Semicircular Distribution* من الدالة الاحتمالية للتوزيع الأصلي الخطي عن طريق القاعدة الأتية:

$$f(\theta) = \frac{v}{2}g\left(V\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \qquad \ldots (7)$$

اذ ان $G(x)$ هي دالة الكتلة او الكثافة الاحتمالية للتوزيع الأصلي $(c.d.f)$.

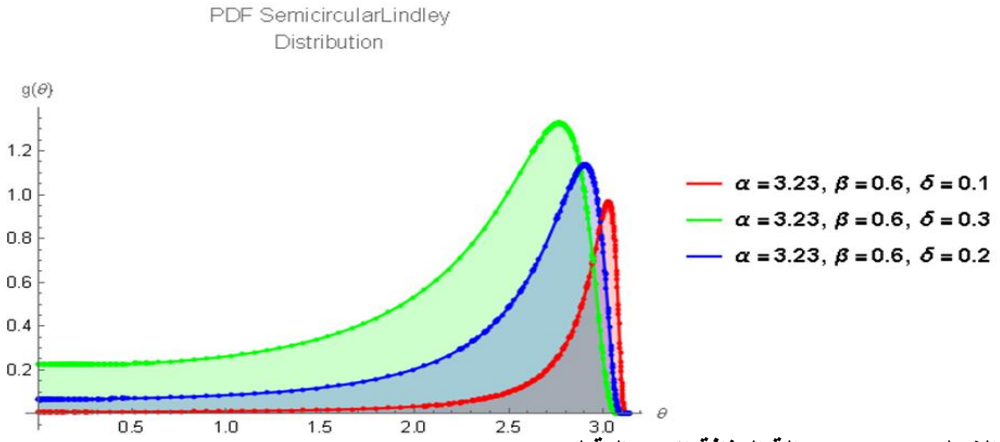
$f(\theta)$ دالة الكتلة او الكثافة الاحتمالية لتوزيع *Stereographic Distribution*.

8- دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع (Stereographic Semicircular Lindley):

بالاعتماد على معادلة(2) و(6) نحصل على الدالة الاحتمالية الجديدة لتوزيع المقترحة لتوزيع (Stereographic Semicircular Lindley) على النحو الاتي:

$$f(\theta, \alpha, \beta, \sigma) = \frac{v\sigma^2}{2(\alpha\sigma + \beta)}\left(\alpha + \beta V\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)e^{-\sigma V\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}\left(sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \qquad \ldots (8)$$

والشكل (1) ادناه يوضح دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع باستعمال قيم افتراضية مختلفة



الشكل (1) يوضح دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع(Stereographic Semicircular Lindley)

9-دالة التوزيع التراكمية لتوزيع (Stereographic Semicircular Lindley) :

وهي احتمالية فشل الوحدة التجريبية (الماكنة) قبل الوقت **t** ويرمز لها **F(t)** وبالإمكان التعبير عنها رياضيا كمايأتي :

$$\mathbf{F(t) = pr\,(T \le t), t \ge 0}$$

اذ ان: $\boldsymbol{t}$ يمثل الوقت حتى حدوث الفشل

$$\mathbf{F(t) = \int_0^t f(u)du}$$

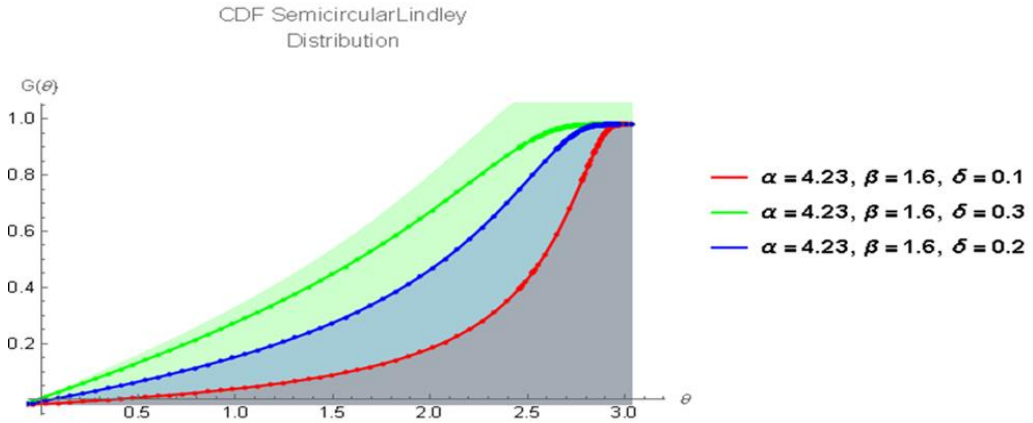
اذ تمثل $\mathbf{f(u)}$ دالة الكثافة الاحتمالية للفشل لزمن **t**

با لاعتماد على معادلة(**3**) و(**7**) نحصل على الدالة الاحتمالية الجديدة لتوزيع المقترحة لتوزيع (Stereographic Semicircular Lindley) على النحو الاتي:

$$G(\theta) = \mathrm{F}\left(\mathrm{V}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

$$\mathrm{F}(\theta,\alpha,\beta,\sigma) = 1 - \left(1 + \frac{\sigma\beta \mathrm{V}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\alpha\sigma + \beta}\right)\mathrm{e}^{-\sigma \mathrm{V}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)} \qquad \dots (\mathbf{9})$$

والشكل (2) ادناه يوضح الدالة التراكمية لتوزيع (Stereographic Semicircular Lindley) باستعمال قيم افتراضية مختلفة للمعلمات:



الشكل (2) يوضح دالة المعولية لتوزيع(Stereographic Semicircular Lindley)

10-دالة المعولية لتوزيع (Stereographic Semicircular Lindley):

دالة المعولية (Reliability function) بانها احتمال أن الوحدة التجريبية (الماكنة) تعمل وعدم فشلها في مدة زمنية معينة $(0,t)$ بمعنى اخر بعد مرور الوقت t، اذ ان ($t > 0$) ، وغالبا ما يرمز لدالة المعولية بالرمز R(t)، ويكون التعريف الرياضي على النحو الاتي:

$$\mathrm{R(t) = pr\,(T > t)}$$

اذ ان:

T: متغير عشوائي موجب يمثل الزمن المتراكم لحياة الوحدة التجريبية (الماكنة) في المدة الزمنية $(0, t)$، (متغير عشوائي موجب يمثل وقت اشتغال الوحدة التجريبية (الماكنة) حتى حدوث الفشل).

t: يمثل زمن الاشتغال وهو اكبر او يساوي صفراً($t \ge 0$).

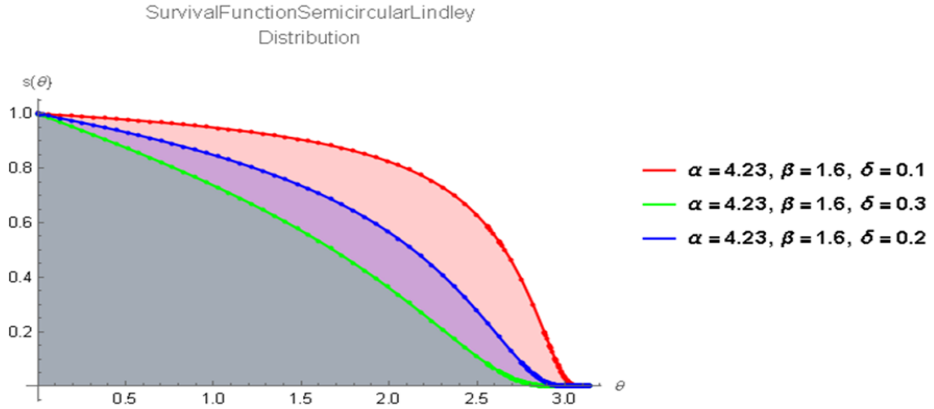
وتكون صيغة دالة المعولية للتوزيعات المستمر كالاتي:

يمكن الحصول على دالة المعولية لتوزيع (Stereographic Semicircular Lindley) من خلال الصيغة التالية :

$$R(x) = 1 - F(\theta, \alpha, \beta, \sigma)$$

$$S(\theta, \alpha, \beta, \sigma) = \left(1 + \frac{\sigma\beta V \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\alpha\sigma + \beta}\right) e^{-\sigma V \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad \dots (11)$$

وان الشكل (3) ادناه يوضح دالة المعولية لتوزيع (Stereographic Semicircular Lindley) :



الشكل (3) ادناه يوضح دالة المعولية لتوزيع(Stereographic Semicircular Lindley)

11-دالة المخاطرة لتوزيع (Stereographic Semicircular Lindley)

يمكن الحصول على دالة المخاطرة لتوزيع (Stereographic Semicircular Lindley) من خلال الصيغة التالية :

$$h(\theta, \alpha, \beta, \sigma) = \frac{f(\theta, \alpha, \beta, \sigma)}{S(\theta, \alpha, \beta, \sigma)}$$

$$= \frac{\frac{V\sigma^2}{2(\alpha\sigma + \beta)}\left(\alpha + \beta V \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) e^{-\sigma V \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)} \left(\sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}{\left(1 + \frac{\sigma\beta V \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\alpha\sigma + \beta}\right) e^{-\sigma V \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}} \quad \dots (11)$$

12-خصائص توزيع (Stereographic Semicircular Lindely)بالاعتماد على الخصائص المثلثية :

العزوم المثلثية [12]

$$\emptyset_p = \alpha_p + i\beta_p \qquad , \emptyset_p = 0, \mp 1, \mp 2, \mp 3 \dots \dots$$

$$\alpha_p = E(\cos(p\theta))$$

$$\beta_p = E(\sin(p\theta))$$

حيث أن الجزء الحقيقي للعزوم المثلثية :

$$\alpha_1 = \int_0^{\infty} \cos(\theta) \frac{V\sigma^2}{2(\alpha\sigma + \beta)}\left(\alpha + \beta V \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) e^{-\sigma V \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)} \left(\sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) d\theta$$

باستخدام التحويل $tan\left(\frac{\theta}{x}\right)$

$$\cos(\theta) = 1 - \frac{2x^2}{1 + x^2}$$

وبعد اجراء التبسيطات

$$\alpha_1 = \left(1 - \frac{2\alpha\sigma^2}{\alpha\sigma + \beta}\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi}} G_{13}^{31}\left(\frac{\sigma^2}{4}\middle| \begin{matrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2} \end{matrix}\right) - \frac{\beta\sigma^2}{(\alpha\sigma + \beta)\sqrt{\pi}} G_{13}^{31}\left(\frac{\sigma^2}{4}\middle| \begin{matrix} -1 \\ -1, 0, \frac{1}{2} \end{matrix}\right)\right]\right) \quad \dots (12)$$

$$\beta_1 = \frac{\sigma^2}{\alpha\sigma+\beta}\int_0^{\infty} (\sin(\theta))(\alpha+\beta x)e^{-\sigma x}dx$$

$tan\left(\frac{\theta}{x}\right)$ باستخدام التحويل

$$\sin(\theta) = \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$$

$$\beta_1 = \frac{\sigma^2 2\alpha}{\alpha\sigma+\beta}\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}G_{13}^{31}\left(\frac{\alpha^2}{4}\middle|\begin{matrix}0\\0,0,\frac{1}{2}\end{matrix}\right)+\frac{2}{2\sqrt{\pi}}G_{13}^{31}\left(\frac{\alpha^2}{4}\middle|\begin{matrix}-\frac{1}{2}\\\frac{-1}{2},0,\frac{1}{2}\end{matrix}\right)\right) \quad \dots(13)$$

$$\alpha_2 = \frac{\sigma^2}{\alpha\sigma+\beta}\left(\int_0^{\infty}(\alpha+\beta x)e^{-\sigma x}dx+\left(\int_0^{\infty}\alpha\frac{8x^4e^{-\sigma x}}{(1+x^2)^2}dx+\int_0^{\infty}\frac{8x^4e^{-\sigma x}}{(1+x^2)^2}\beta x dx\right)\right.$$
$$\left.-\left(\int_0^{\infty}\alpha\frac{8x^2e^{-\sigma x}}{(1+x^2)}dx+\int_0^{\infty}\frac{8x^2e^{-\sigma x}}{(1+x^2)}\beta x dx\right)\right)$$

باستخدام التحويل $\cos 2\theta = 1+\frac{8x^4}{(1+x^2)^2}-\frac{8x^2}{(1+x^2)}$

$$\alpha_2 = \left(1+\frac{\sigma^2}{\alpha\sigma+\beta}\left[\frac{4\sigma}{\sqrt{\pi}}G_{13}^{31}\left(\frac{\sigma^2}{4}\middle|\begin{matrix}\frac{-3}{2}\\\frac{-1}{2},0,\frac{1}{2}\end{matrix}\right)+\frac{8}{2\sqrt{\pi}}G_{13}^{31}\left(\frac{\sigma^2}{4}\middle|\begin{matrix}-2\\-1,0,\frac{1}{2}\end{matrix}\right)-\frac{8\sigma}{2\sqrt{\pi}}G_{13}^{31}\left(\frac{\sigma^2}{4}\middle|\begin{matrix}\frac{-1}{2}\\\frac{-1}{2},0,\frac{1}{2}\end{matrix}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{4}{\sqrt{\pi}}G_{13}^{31}\frac{\sigma^2}{4}\middle|\begin{matrix}1\\-1,0,\frac{1}{2}\end{matrix}\right]\right) \quad \dots(14)$$

$$\beta_2 = \frac{\sigma^2}{\alpha\sigma+\beta}\int_0^{\infty}(\sin 2\theta)(\alpha+\beta x)e^{-\sigma x}dx$$

$$\sin 2\theta = \frac{4x}{(1+x^2)}-\frac{8x^3}{(1+x^2)^2}$$

$$\beta_2 = \left(\frac{\sigma^2}{\alpha\sigma+\beta}\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}G_{13}^{31}\left(\frac{\sigma^2}{4}\middle|\begin{matrix}0\\0,0,\frac{1}{2}\end{matrix}\right)+\frac{4}{\sqrt{\pi}}G_{13}^{31}\left(\frac{\sigma^2}{4}\middle|\begin{matrix}-\frac{1}{2}\\\frac{-1}{2},0,\frac{1}{2}\end{matrix}\right)-\frac{4\sigma}{\sqrt{\pi}}G_{13}^{31}\left(\frac{\sigma^2}{4}\middle|\begin{matrix}1\\-1,0,\frac{1}{2}\end{matrix}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{4}{\sqrt{\pi}}G_{13}^{31}\left(\frac{\sigma^2}{4}\middle|\begin{matrix}\frac{-3}{2}\\\frac{-1}{2},0,\frac{1}{2}\end{matrix}\right)\right) \quad \dots(15)$$

13-لوسط الحسابي لتوزيع(Stereographic Semicircular Lindely) :

يمكن حساب الوسط الحسابي لتوزيع(Stereographic Semicircular Lindely distribution) المقترح من خلال الصيغة[**13**] :

$$\mu = \tan^{-1}\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1}\right) \quad \dots(16)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{\sigma^2 2\alpha}{\alpha\sigma+\beta}\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}G_{13}^{31}\left(\frac{\alpha^2}{4}\middle|\begin{matrix}0\\0,0,\frac{1}{2}\end{matrix}\right)\right)+\frac{\sigma^2 2\alpha}{\alpha\sigma+\beta}\left(\frac{2}{2\sqrt{\pi}}G_{13}^{31}\left(\frac{\alpha^2}{4}\middle|\begin{matrix}-\frac{1}{2}\\\frac{-1}{2},0,\frac{1}{2}\end{matrix}\right)\right)}{\left(1-\frac{2\alpha\sigma^2}{\alpha\sigma+\beta}\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi}}G_{13}^{31}\left(\frac{\sigma^2}{4}\middle|\begin{matrix}-\frac{1}{2}\\\frac{-1}{2},0,\frac{1}{2}\end{matrix}\right)-\frac{\beta\sigma^2}{(\alpha\sigma+\beta)\sqrt{\pi}}G_{13}^{31}\left(\frac{\sigma^2}{4}\middle|\begin{matrix}-1\\-1,0,\frac{1}{2}\end{matrix}\right)\right]\right)}\right) \quad \dots(17)$$

متوسط الطول الدائري الناتج من عملية الدوران he mean resultant length (MRL) من خلال الصيغة التالية:

$$\rho = \sqrt{{\alpha_1}^2+{\beta_1}^2}$$

$$\rho = \sqrt{\left(1-\frac{2\alpha\sigma^2}{\alpha\sigma+\beta}\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi}}G_{13}^{31}\left(\frac{\sigma^2}{4}\middle|\begin{matrix}-\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\end{matrix}\right)-\frac{\beta\sigma^2}{(\alpha\sigma+\beta)\sqrt{\pi}}G_{13}^{31}\left(\frac{\sigma^2}{4}\middle|\begin{matrix}-1\\ -1,0,\frac{1}{2}\end{matrix}\right)\right]\right)^2+\left(\frac{\sigma^2 2\alpha}{\alpha\sigma+\beta}\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}G_{13}^{31}\left(\frac{\alpha^2}{4}\middle|\begin{matrix}0\\ 0,0,\frac{1}{2}\end{matrix}\right)\right)+\frac{\sigma^2 2\alpha}{\alpha\sigma+\beta}\left(\frac{2}{2\sqrt{\pi}}G_{13}^{31}\left(\frac{\alpha^2}{4}\middle|\begin{matrix}-\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\end{matrix}\right)\right)\right)^2} \quad \dots(18)$$

مكن حساب التباين الدائريthe circular variance من خلال الصيغة :

$$v = 1-\rho = \sqrt{{\alpha_1}^2+{\beta_1}^2}$$

$$v = 1-\sqrt{\left(1-\frac{2\alpha\sigma^2}{\alpha\sigma+\beta}\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi}}G_{13}^{31}\left(\frac{\sigma^2}{4}\middle|\begin{matrix}-\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\end{matrix}\right)-\frac{\beta\sigma^2}{(\alpha\sigma+\beta)\sqrt{\pi}}G_{13}^{31}\left(\frac{\sigma^2}{4}\middle|\begin{matrix}-1\\ -1,0,\frac{1}{2}\end{matrix}\right)\right]\right)^2+\left(\frac{\sigma^2 2\alpha}{\alpha\sigma+\beta}\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}G_{13}^{31}\left(\frac{\alpha^2}{4}\middle|\begin{matrix}0\\ 0,0,\frac{1}{2}\end{matrix}\right)\right)+\frac{\sigma^2 2\alpha}{\alpha\sigma+\beta}\left(\frac{2}{2\sqrt{\pi}}G_{13}^{31}\left(\frac{\alpha^2}{4}\middle|\begin{matrix}-\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\end{matrix}\right)\right)\right)^2} \quad \dots(19)$$

يمكن حساب الانحراف الدائريthe circular variance من خلال الصيغة :[12]

$$\sigma = \sqrt{-\log\left({\alpha_1}^2+{\beta_1}^2\right)}$$

$$\sigma = \sqrt{-\log\left(\left(1-\frac{2\alpha\sigma^2}{\alpha\sigma+\beta}\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi}}G_{13}^{31}\left(\frac{\sigma^2}{4}\middle|\begin{matrix}-\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\end{matrix}\right)-\frac{\beta\sigma^2}{(\alpha\sigma+\beta)\sqrt{\pi}}G_{13}^{31}\left(\frac{\sigma^2}{4}\middle|\begin{matrix}-1\\ -1,0,\frac{1}{2}\end{matrix}\right)\right]\right)^2+\left(\frac{\sigma^2 2\alpha}{\alpha\sigma+\beta}\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}G_{13}^{31}\left(\frac{\alpha^2}{4}\middle|\begin{matrix}0\\ 0,0,\frac{1}{2}\end{matrix}\right)\right)+\frac{\sigma^2 2\alpha}{\alpha\sigma+\beta}\left(\frac{2}{2\sqrt{\pi}}G_{13}^{31}\left(\frac{\alpha^2}{4}\middle|\begin{matrix}-\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\end{matrix}\right)\right)\right)^2\right)} \quad \dots(20)$$

14 - معامل الالتواء الدائري لتوزيع(Stereographic Semicircular Lindely) :

يمكن حساب معامل الالتواء الدائري the Circular skewness من خلال الصيغة :[12]

$$\text{Circular skewness} = \frac{\beta_2}{(1-\rho)^{\frac{2}{3}}}$$

$$C.k = \frac{\begin{pmatrix}\frac{\sigma^2}{\alpha\sigma+\beta\sqrt{\pi}}2\sigma G_{13}^{31}\left(\frac{\sigma^2}{4}\middle|\begin{matrix}0\\ 0,0,\frac{1}{2}\end{matrix}\right)+\frac{4}{\sqrt{\pi}}G_{13}^{31}\left(\frac{\sigma^2}{4}\middle|\begin{matrix}-\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\end{matrix}\right)-\frac{4\sigma}{\sqrt{\pi}}G_{13}^{31}\left(\frac{\sigma^2}{4}\middle|\begin{matrix}1\\ -1,0,\frac{1}{2}\end{matrix}\right)\\ -\frac{4}{\sqrt{\pi}}G_{13}^{31}\left(\frac{\sigma^2}{4}\middle|\begin{matrix}-\frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\end{matrix}\right)\end{pmatrix}}{\left(\sqrt{\left(1-\frac{2\alpha\sigma^2}{\alpha\sigma+\beta}\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi}}G_{13}^{31}\left(\frac{\sigma^2}{4}\middle|\begin{matrix}-\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\end{matrix}\right)-\frac{\beta\sigma^2}{(\alpha\sigma+\beta)\sqrt{\pi}}G_{13}^{31}\left(\frac{\sigma^2}{4}\middle|\begin{matrix}-1\\ -1,0,\frac{1}{2}\end{matrix}\right)\right]\right)^2+\left(\frac{\sigma^2 2\alpha}{\alpha\sigma+\beta}\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}G_{13}^{31}\left(\frac{\alpha^2}{4}\middle|\begin{matrix}0\\ 0,0,\frac{1}{2}\end{matrix}\right)\right)+\frac{\sigma^2 2\alpha}{\alpha\sigma+\beta}\left(\frac{2}{2\sqrt{\pi}}G_{13}^{31}\left(\frac{\alpha^2}{4}\middle|\begin{matrix}-\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\end{matrix}\right)\right)\right)^2}\right)^{\frac{2}{3}}} \quad \dots(21)$$

15 -معامل التفرطح الدائري لتوزيع(Stereographic Semicircular Lindely) :

يمكن حساب معامل التفرطح الدائري(the circular kurtosis) من خلال الصيغة :[13]

$$= \frac{\overset{k.s}{\left(1+\frac{\sigma^2}{\alpha\sigma+\beta}\left[\frac{4\sigma}{\sqrt{\pi}}G_{13}^{31}\left(\frac{\sigma^2}{4}\middle|_{-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}}^{\frac{-3}{2}}\right)+\frac{8}{2\sqrt{\pi}}G_{13}^{31}\left(\frac{\sigma^2}{4}\middle|_{-1,0,\frac{1}{2}}^{-2}\right)-\frac{8\sigma}{2\sqrt{\pi}}G_{13}^{31}\left(\frac{\sigma^2}{4}\middle|_{-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}}^{\frac{-1}{2}}\right)\right.\right.}}{\left.\left.-\frac{4}{\sqrt{\pi}}G_{13}^{31}\frac{\sigma^2}{4}\middle|_{-1,0,\frac{1}{2}}^{1}\right]\right)-\left(\begin{array}{c}\left(1-\frac{2\alpha\sigma^2}{\alpha\sigma+\beta}\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi}}G_{13}^{31}\left(\frac{\sigma^2}{4}\middle|_{-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}}^{\frac{-1}{2}}\right)-\frac{\beta\sigma^2}{(\alpha\sigma+\beta)\sqrt{\pi}}G_{13}^{31}\left(\frac{\sigma^2}{4}\middle|_{-1,0,\frac{1}{2}}^{-1}\right)\right]\right)^2\\ +\left(\frac{\sigma^2 2\alpha}{\alpha\sigma+\beta}\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}G_{13}^{31}\left(\frac{\alpha^2}{4}\middle|_{0,0,\frac{1}{2}}^{0}\right)\right)+\frac{\sigma^2 2\alpha}{\alpha\sigma+\beta}\left(\frac{2}{2\sqrt{\pi}}G_{13}^{31}\left(\frac{\alpha^2}{4}\middle|_{-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}}^{\frac{-1}{2}}\right)\right)\right)^2\end{array}\right)^2}{\left(1-\sqrt{\left(\begin{array}{c}\left(1-\frac{2\alpha\sigma^2}{\alpha\sigma+\beta}\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi}}G_{13}^{31}\left(\frac{\sigma^2}{4}\middle|_{-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}}^{\frac{-1}{2}}\right)-\frac{\beta\sigma^2}{(\alpha\sigma+\beta)\sqrt{\pi}}G_{13}^{31}\left(\frac{\sigma^2}{4}\middle|_{-1,0,\frac{1}{2}}^{-1}\right)\right]\right)^2\\ +\left(\frac{\sigma^2 2\alpha}{\alpha\sigma+\beta}\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}G_{13}^{31}\left(\frac{\alpha^2}{4}\middle|_{0,0,\frac{1}{2}}^{0}\right)\right)+\frac{\sigma^2 2\alpha}{\alpha\sigma+\beta}\left(\frac{2}{2\sqrt{\pi}}G_{13}^{31}\left(\frac{\alpha^2}{4}\middle|_{-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}}^{\frac{-1}{2}}\right)\right)\right)^2\end{array}\right)}\right)^4} \quad \dots (22)$$

16-تقديرات معلمات التوزيع Stereographic Semicircular Lindley

ان عملية تقدير معلمات اي مجتمع هي تقريب للخصائص الاصلية للمجتمع الذي سحبت منه العينة، ويعد التقدير من الركائز الاساسية في الاستدلال الاحصائي اذ تكمن اهميته في تقدير معلمات المجتمع الذي يتم عن طريق احصاءات يتم الحصول عليها من عينة تسحب من المجتمع قيد الدراسة وان لتوزيع(StereographicSemicircularLindley)ذو ثلاثة معلمات (α, σ, β) ولهما تقدير يتم الحصول عليه باستعمال طرائق التقدير ومن ثم تقدير دالة المعولية بالاعتماد عليهما، ومن طرائق التقدير التي وقع عليها اختيار الباحث هي:

طريقة الامكان الأعظم

طريقة الفترات التجزيئية

17- طريقة الامكان الاعظم (Maximum Likelihood Method)

تعد طريقة الإمكان الأعظم من الطرائق الاكثر شيوعا في التقدير لأنها تشتمل على خصائص جيدة مثل ثبات التباين والاتساق . اقترح (Fisher) عام (1920) والتي تهدف الى جعل دالة الامكان للمتغيرات العشوائية (random variables) أعظم ما يمكن. اذ يفترض هذا الاسلوب بان المعلمة المراد تقديرها هي قيمة ثابتة بمعنى ان التقدير سوف يعتمد على بيانات العينة للمشاهدات لذلك سنكون بحاجة الى دالة الامكان (Likelihood Function (M.L.E)) المتغير العشوائي المستخدم ويتم تقدير المعلمات من خلال مساواة مشتقة دالة الإمكان بالنسبة للمعلمات المراد تقديرها بالصفر. اذ تتضمن خصائص كثيرة منها (الاتساق) وتكون كافية وتملك اقل تباين ممكن ومن اهم خصائصها الثبات (Invariant) وتكون أكثر(دقة من طرائق التقدير الاخرى خصوصا عند زيادة حجم العينة، ويمكن تعريف دالة الامكان رياضيا.[5]

$$L(\theta_1, \theta_2 . \theta_n, \alpha) = f(\theta_1, \sigma, \alpha, \beta).\ f(\theta_2, \sigma, \alpha, \beta).f(\theta_3, \sigma, \alpha, \beta) \dots\ f(\theta_n, \sigma, \alpha, \beta) \quad \dots (23)$$

$$L(x, \sigma, \alpha, \beta) = \prod_{i=1}^{n} f(\theta, \sigma, \alpha, \beta)$$

$$= \frac{v\sigma^2}{2(\beta+\alpha\sigma)}\left(\alpha Sec^2[\frac{\theta}{2}]e^{-v\sigma Tan[\frac{\theta}{2}]} + e^{-v\sigma Tan[\frac{\theta}{2}]}v\beta Sec^2[\frac{\theta}{2}]Tan[\frac{\theta}{2}]\right)$$

$$L(\theta_i, \sigma, \alpha, \beta) = \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{v\sigma^2}{2(\beta+\alpha\sigma)}\left(\alpha Sec^2[\frac{\theta}{2}]e^{-v\sigma Tan[\frac{\theta}{2}]} + e^{-v\sigma Tan[\frac{\theta}{2}]}v\beta Sec^2[\frac{\theta}{2}]Tan[\frac{\theta}{2}]\right)\right]$$

$$L(\theta_i, \sigma, \alpha, \beta) = \left(\frac{V\sigma^2}{2(\alpha\sigma+\beta)}\right)^n e^{-v\sigma\sum_{i=1}^{n} Tan[\frac{\theta_i}{2}]}\prod_{i=1}^{n}\left(\alpha Sec^2[\frac{\theta_i}{2}] + v\beta Sec^2[\frac{\theta_i}{2}]Tan[\frac{\theta_i}{2}]\right) \quad \dots (24)$$

وبأخذ اللوغاريتم لطرفي الصيغة آنفاً نحصل على:

$$\log L = n\log(V\sigma^2) - n\log\big(2(\alpha\sigma+\beta)\big) - \sigma V\sum_{i=1}^{n}\tan\left(\frac{\theta_i}{2}\right)$$

$$+ \log\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha Sec^2[\frac{\theta_i}{2}] + v\beta Sec^2[\frac{\theta_i}{2}]Tan[\frac{\theta_i}{2}]\right) \quad \dots (25)$$

وبأخذ المشتقة الجزئية الأولى للصيغة آنفاً بالنسبة للمعلمات (σ, α, β) ومساواتها الى الصفر نحصل على :

$$\frac{\partial \log L}{\partial\alpha} = -\frac{n\sigma}{\beta+\alpha\sigma} + \frac{nSec^2[\frac{\theta i}{2}]}{n\alpha Sec^2[\frac{\theta i}{2}] + v\beta\sigma^2 Sec^2[\frac{\theta i}{2}]Tan[\frac{\theta i}{2}]} = 0 \quad \dots (26)$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial\beta} = -\frac{n}{\beta+\alpha\sigma} + \frac{v\sigma^2 Sec^2[\frac{\theta i}{2}]Tan[\frac{\theta i}{2}]}{n\alpha Sec^2[\frac{\theta i}{2}] + v\beta\sigma^2 Sec^2[\frac{\theta i}{2}]Tan[\frac{\theta i}{2}]} = 0 \quad \dots (27)$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial\sigma} = \frac{2n}{\sigma} - \frac{n\alpha}{\beta+\alpha\sigma} - nvTan[\frac{\theta i}{2}] + \frac{2v\beta\sigma Sec^2[\frac{\theta i}{2}]Tan[\frac{\theta i}{2}]}{n\alpha Sec^2[\frac{\theta i}{2}] + v\beta\sigma^2 Sec^2[\frac{\theta i}{2}]Tan[\frac{\theta i}{2}]} = 0 \quad \dots (28)$$

المعادلات السابقة لا يمكن حلها بالطرائق التحليلية الاعتيادية لانها معادلات غير خطية ولذلك تم حلها باستعمال الطريقة العددية للحصول على مقدرات طريقة الامكان الاعظم، وتعويض المقدرات $(\hat{\sigma},\hat{\alpha},\hat{\beta})$ في دالة البقاء نحصل على مقدر الامكان الاعظم لهذه الدالة.

$$\hat{S}_{MLE}(\theta,\sigma,\alpha,\beta)=\left(1+\frac{\hat{\sigma}_{MLE}\hat{\beta}_{MLE}V\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\hat{\alpha}_{\mathbf{MLE}}\hat{\sigma}_{MLE}+\hat{\beta}_{MLE}}\right)e^{-\hat{\sigma}_{MLE}V\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad \dots (29)$$

18-طريقة الفترات التجزيئية (MPS)(Maximum Product of Spacing Estimation Method)

تعد من طرائق التقدير المهمة التي اقترحت من قبل العالم (Cheng and Amin) in(1938) وتعتبر هذه الطريقة بديلا ناجح لطريقة الامكان الاعظم (MLE)الذي تم ذكرها سابقا والاكثر شيوعا في التقدير لأنها تشتمل على خصائص جيدة مثل ثبات التباين والاتساق لتقدير المعلمات المجهولة للتوزيعات الاحتمالية اذ يفترض هذا الاسلوب بان المعلمة المراد تقديرها هي قيمة ثابتة بمعنى ان التقدير سوف يعتمد على بيانات العينة للمشاهدات لذلك سنكون بحاجة الى دالة الامكان (L.E) للحصول على مقدرات طريقة(Product of Spacing Estimation (Method .

فاذا كانت لدينا مشاهدات عينة عشوائية بحجم n (xn,…….., x2, x1) من توزيع (Stereographic Semicircular) Lindely فإن يتم الحصول على مقدر التباعد عن طريق تعظيم الوسط الهندسي للمسافات ويمكن صياغة طريقة (Product of Spacing Estimation (Method على النحو الاتي:[7]

$$p(\sigma,\alpha,\beta)=\left[\prod_{i=1}^{n+1}\boldsymbol{D_i}\,(\sigma,\alpha,\beta)\right]^{n+1}$$

حيث ان

$$\mathbf{D_i}(\sigma,\alpha,\beta)=\mathbf{F}(\theta_i,\sigma,\alpha,\beta)-\mathbf{F}(\theta_{i-1},\sigma,\alpha,\beta)$$

ويمكن كتابة الصيغية اعلاه بالشكل التالي :

$$\sum_{i=1}^{n+1}D_i(\sigma,\alpha,\beta)=1 \qquad i=1,2,\dots\dots n+1$$

$$D_i=\begin{cases}F(\theta_i) & \text{if } i=1\\ F(\theta_i)-F(\theta_{i-1}) & \text{if } i=2\dots n\\ 1-F(\theta_i) & \text{if } i=n+1\end{cases}$$

وباخذ ln للمعادلة وكما يلي :

$$ln(\sigma,\alpha,\beta)=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}\ln D_i(\sigma,\alpha,\beta)$$

$$ln(\sigma,\alpha,\beta)=\frac{1}{n+1}\left[\ln D_1(\sigma,\alpha,\beta)+\sum_{i=2}^{n}\ln D_i(\sigma,\alpha,\beta)+\ln D_{n+1}(\sigma,\alpha,\beta)\right]$$

$$ln(\sigma,\alpha,\beta)=\frac{1}{n+1}\left[\ln F(\theta_1)+\sum_{i=2}^{n}\ln\left(F(\theta_i)-F(\theta_{i-1})\right)+\ln\left(1-F(\theta_n)\right)\right] \quad \dots (30)$$

$$=\left(\begin{array}{l}\frac{1}{n+1}\left(\ln\left(1-\left(1+\frac{\sigma\beta V\tan\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}{\alpha\sigma+\beta}\right)e^{-\sigma V\tan\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}\right)\right)+\sum_{i=2}^{n}\ln\left(1-\left(1+\frac{\sigma\beta V\tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right)}{\alpha\sigma+\beta}\right)e^{-\sigma V\tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right)}\right)\\ \left(1-\left(1+\frac{\sigma\beta V\tan\left(\frac{\theta_{i-1}}{2}\right)}{\alpha\sigma+\beta}\right)e^{-\sigma V\tan\left(\frac{\theta_{i-1}}{2}\right)}\right)+\ln\left(1-\left(1+\frac{\sigma\beta V\tan\left(\frac{\theta_n}{2}\right)}{\alpha\sigma+\beta}\right)e^{-\sigma V\tan\left(\frac{\theta_n}{2}\right)}\right)\end{array}\right)$$

$$=\left(\begin{array}{l}\frac{1}{n+1}\left(Ln\left[1-e^{-v\sigma Tan\left[\frac{\theta_i}{2}\right]}\left(1+\frac{v\beta\sigma Tan\left[\frac{\theta_1}{2}\right]}{\beta+\alpha\sigma}\right)\right]+Ln\left[1-e^{-v\sigma Tan\left[\frac{\theta_n}{2}\right]}\left(1+\frac{v\beta\sigma Tan\left[\frac{\theta_n}{2}\right]}{\beta+\alpha\sigma}\right)\right]\right)\\ +\sum_{i=2}^{n}Ln[e^{-v\sigma Tan[\frac{\theta_{-1+i}}{2}}(1-\frac{v\beta\sigma Tan[\frac{1}{2}-\theta_{-1+i}]}{\beta+\alpha\sigma})-e^{-v\sigma Tan[\frac{\theta_i}{2}]}(1+\frac{v\beta\sigma Tan[\frac{\theta_i}{2}]}{\beta+\alpha\sigma})\end{array}\right) \quad \dots (31)$$

وبالاشتقاق الجزئي لدالة $\boldsymbol{ln}(\sigma,\alpha,\beta)$ بالنسبة الى المعلمات σ ، β، α نحصل على منظومة المعادلات التالية بعد مساواتها للصفر:-

$$\frac{\boldsymbol{ln}(\alpha,\beta,\sigma)}{d\alpha} = \left\{\left(\frac{1}{n+1}\left(Ln\left[1-e^{-v\sigma Tan\left[\frac{\theta_i}{2}\right]}\left(1+\frac{v\beta\sigma Tan\left[\frac{\theta_1}{2}\right]}{\beta+\alpha\sigma}\right)\right]+Ln\left[1-e^{-v\sigma Tan\left[\frac{\theta_n}{2}\right]}\left(1+\frac{v\beta\sigma Tan\left[\frac{\theta_n}{2}\right]}{\beta+\alpha\sigma}\right)\right]\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sum_{i=2}^{n} Ln\left[e^{-v\sigma Tan\left[\frac{\theta_{-1+i}}{2}\right]}\left(1-\frac{v\beta\sigma Tan\left[\frac{1}{2}-\theta_{-1+i}\right]}{\beta+\alpha\sigma}\right)-e^{-v\sigma Tan\left[\frac{\theta_i}{2}\right]}\left(1+\frac{v\beta\sigma Tan\left[\frac{\theta_i}{2}\right]}{\beta+\alpha\sigma}\right)\right]\right)\left[\frac{\partial F(\theta_i)}{\partial\alpha}\right]\right\}$$
$$= 0 \quad \dots (32)$$

$$\frac{\boldsymbol{ln}(\sigma,\alpha,\beta)}{d\beta} = \left\{\left(\frac{1}{n+1}\left(Ln\left[1-e^{-v\sigma Tan\left[\frac{\theta_i}{2}\right]}\left(1+\frac{v\beta\sigma Tan\left[\frac{\theta_1}{2}\right]}{\beta+\alpha\sigma}\right)\right]+Ln\left[1-e^{-v\sigma Tan\left[\frac{\theta_n}{2}\right]}\left(1+\frac{v\beta\sigma Tan\left[\frac{\theta_n}{2}\right]}{\beta+\alpha\sigma}\right)\right]\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sum_{i=2}^{n} Ln\left[e^{-v\sigma Tan\left[\frac{\theta_{-1+i}}{2}\right]}\left(1-\frac{v\beta\sigma Tan\left[\frac{1}{2}-\theta_{-1+i}\right]}{\beta+\alpha\sigma}\right)-e^{-v\sigma Tan\left[\frac{\theta_i}{2}\right]}\left(1+\frac{v\beta\sigma Tan\left[\frac{\theta_i}{2}\right]}{\beta+\alpha\sigma}\right)\right]\right)\left[\frac{\partial F(\theta_i)}{\partial\beta}\right]\right\}$$
$$= 0 \quad \dots (33)$$

$$\frac{\mathbf{ln}(\alpha,\beta,\sigma)}{d\sigma} = \left\{\left(\frac{1}{n+1}\left(Ln\left[1-e^{-v\sigma Tan\left[\frac{\theta_i}{2}\right]}\left(1+\frac{v\beta\sigma Tan\left[\frac{\theta_1}{2}\right]}{\beta+\alpha\sigma}\right)\right]+Ln\left[1-e^{-v\sigma Tan\left[\frac{\theta_n}{2}\right]}\left(1+\frac{v\beta\sigma Tan\left[\frac{\theta_n}{2}\right]}{\beta+\alpha\sigma}\right)\right]\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sum_{i=2}^{n} Ln\left[e^{-v\sigma Tan\left[\frac{\theta_{-1+i}}{2}\right]}\left(1-\frac{v\beta\sigma Tan\left[\frac{1}{2}-\theta_{-1+i}\right]}{\beta+\alpha\sigma}\right)-e^{-v\sigma Tan\left[\frac{\theta_i}{2}\right]}\left(1+\frac{v\beta\sigma Tan\left[\frac{\theta_i}{2}\right]}{\beta+\alpha\sigma}\right)\right]\right)\left[\frac{\partial F(\theta_i)}{\partial\sigma}\right]\right\}$$
$$= 0 \quad \dots (34)$$

المعادلات السابقة لا يمكن حلها بالطرائق التحليلية الاعتيادية لانها معادلات غير خطية ولذلك تم حلها باستعمال الطريقة العددية للحصول على مقدرات طريقة الفترات التجزيئية، وتعويض المقدرات $(\hat{\sigma},\hat{\alpha},\hat{\beta})$ في دالة البقاء نحصل على مقدر طريقة المقدرات التجزيئية لهذه الدالة.

$$\hat{S}_{PC}(\theta,\sigma,\alpha,\beta) = \left(1+\frac{\hat{\sigma}_{mps}\hat{\beta}_{mps}V\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\hat{\alpha}_{mps}\hat{\sigma}_{mps}+\hat{\beta}_{mps}}\right)e^{-\hat{\sigma}_{mps}V\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad \dots (35)$$

19-المحاكاة:

لقد تضمنت تجارب المحاكاة [1]المراحل الاساسية لتطبيق اساليب تقدير دالة البقاء في هذا البحث.

المرحلة الأولى: مرحلة تحديد القيم الافتراضية وتعتبر من المراحل المهمة الذي تعتمد عليها المراحل اللاحق للبرنامج، وتتم اختيار القيم الافتراضية كالاتي:

تحديد قيم افتراضية مختلفة لمعلمات لتوزيع Stereographic Semicircular Lindely معلمات وفق الجدول الآتي:

جدول (1) يبين القيم الافتراضية لمعلمات التوزيع عند قيم افتراضية للثابت V=0.5

Model	α	β	σ
1	3.9	4.5	4
2	0.9	1.9	1.5

2-اختيار حجوم مختلفة للعينة لغرض معرفة مدى تأثير حجم العينة على دقة النتائج حيث كانت (10-25-50-75-100).

3-تكرار كل تجربة كان مساويا الى (L=1000) لغرض الحصول على تجانس عال.

المرحلة الثانية توليد البيات العشوائية : وفي هذه المرحلة يتم توليد بينات عشوائية وفق توزيع ليندلي بالاعتماد [7]على طريقة (مونت- كارلو) يمكن تلخيصها على وفق الصيغة الرياضية التالية: (Lambert W function)

$$\theta = \frac{-v\beta - v\alpha\sigma - \beta \text{ProductLog}[\frac{e^{-\frac{v(\beta+\alpha\sigma)}{\beta}}(-1+u)v(\beta+\alpha\sigma)}{\beta}]}{v^2\beta\sigma} \quad \dots (36)$$

ui: متغير عشوائي مستمر يتبع التوزيع المنتظم.

المرحلة الثالثة إيجاد التقديرات: وفي هذه المرحلة تتم إيجاد المقدرات لمعلمات ودالة البقاء لتوزيع Stereographic Semicircular Lindely باستعمال طراق التقدير والمتمثلة بطريق الامكان الاعظم وطريقة الفترات التجزيئية .

المرحلة الرابعة المقارنة بين طرائق التقدير: وهي المرحلة الأخيرة من مراحل تجارب المحاكات حيث يتم فيها المقارنة بين طريقتي تقدير دالة البقاء لتوزيع Stereographic Semicircular Lindely وذالك بالاعتماد على المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطاء (MSE) التي يعطى بالصيغة الاتية[**11**] :

$$MSE(\hat{\sigma}(\theta i)) = \frac{1}{L}\sum_{j=1}^{n}(\hat{\sigma}i(\theta j) - \sigma(\theta j))^2 \quad \dots (37) \ .$$

إذ إن:

: تمثل عدد مرات تكرار التجربة وهو (1000) مرة.

n : هي معبرة عن حدود المتغير (θ_i) من الحد الادنى الى الحد الاعلى .

$\hat{\sigma}$:القيمة المقدرة للمعلمة وقف طرائق التقدير المستعملة .

جدول (2) متوسط القيم التقديرية للمعلمات لطرائق التقدير كافة واحجام العينات للأنموذج الاول الثاني

n	Ees.par	mle	mps	mle	mps
	σ	3.05959035574237	3.73200784932314	1.46979039633876	1.24398579060749
	MSE	0.884370299012770	0.0718197928244097	0.000912620153369221	0.0655432754108724
	Rank	2	1	1	2
	α	3.61884419710967	4.13631900287751	1.66767440326660	2.08104867037326
	MSE	0.776435548967306	0.132263867668012	0.0539751828975319	0.0327786210439262
30	Rank	2	1	2	1
	β	4.71312538887275	4.28506198444957	1.01080122779460	0.311047577288943
	MSE	0.467134253847	0.148272731868242	0.0122769120807903	0.3468649562172 24
	Rank	2	1	1	2
	$\sum$ **Rank**	6[2]	3[1]	4[1]	5[2]
	σ	3.94276671887949	4.43500678470055	1.59092845698397	1.49230430153950
	MSE	0.00327564846781908	0.0189230902735511	0.000826798428948651	5.9223774794857e-05
	Rank	1	2	2	1
	α	4.44508735920847	4.13634169573542	1.67798651982644	1.65279534393756
	MSE	0.00301539811869950	0.132247362260589	0.0492899853787775	0.0261110141978 9502
50	Rank	1	2	2	1
	β	4.14173988785089	4.28875485317735	0.987247936076136	1.30097915053919
	MSE	0.0584381733781583	0.13113033586894	0.0076122023495 4544	0.1607842791671 27
	Rank	1	2	1	2
	$\sum$ **Rank**	3[1]	6[2]	5[2]	4[1]
	σ	3.96765247064771	3.66472667957145	1.45379346228904	1.82828844156968
	MSE	0.00104636265519733	0.0112408199391188	0.000213504412723 40	e-053.107773300
	Rank	1	2	2	1
	α	4.45719124009441	4.13246613404352	1.69140000705051	0.845574405641564
100	MSE	0.00183258992465437	0.115081142624913	513957058526100.04	0.01118133340314
	Rank	1	2	1	2
	β	3.92402201050109	3.93361752820782	0.838736386712002	1.96078144821379
	MSE	0.000577056988514659	0.0011301382028032 6	53230313101100.0037	0.12525728087455

	Rank	1	2	1	2
	$\sum$ **Rank**	3[1]	6[2]	4[1]	5[2]
	σ	4.02687387799283	3.73201172887435	1.52222142913210	1.49574375929843
	MSE	0.000722205318373592	0.0110177134609134	0.00013791912673017	1.811558490972e-05
	Rank	1	2	2	1
	α	4.49268258629899	4.47151100786894	1.88551389293301	1.83437621324816
	MSE	5.35445432717146e-05	0.000811622672643867	0.000209847297956328	0.00430648138765052
150	Rank	1	2	1	2
	β	3.92402201050109	3.93361752820782	0.829700579541752	1.02733402712088
	MSE	0.0005170569885146	0.0010301382028032626	42008516761040.00562	0.0011621395448221
	Rank	1	2	1	2
	$\sum$ **Rank**	3[1]	6[2]	4[1]	5[2]

20-الاستنتاجات:

مقدر طريقة الامكان الاعظم اكثر كفاءة من بقية الطرق لأنه يمتلك اقل قيمة (MSE)لأغلب حجوم العينات وقيم المعلمات الافتراضية احتل مقدر طريفة الفترات التجزيئية الأفضلية بعد مقدر طريقة الامكان الاعظم.

وجد ان قيم (MSE) تتناقص كلما زاد حجم العينة ولجميع الحالات المدروسة والقيم المعلمات المفترضة وهذا ما يتطابق مع النظرية الإحصائية.

اثبتت مقدر طريقة الامكان الاعظم كفاءتها في تقدير معلمات لأنموذج توزيع ليندلي ذي الثلاث معلمات.

التوصيات:

1-توصي الباحثة بالاعتماد على طريقة الامكان الاعظم لتقدير معلمات توزيع Stereographic Semicircular Lindely.

2- توصي الباحثة بتوسيع نطاق الدراسة لتشمل استخدام بيانات حقيقية بالاعتماد على الطرائق المستعملة في البحث.

3- توصي الباحثة باقتراح توزيعات اخرى على نفس التوسيع المستخدم في هذا البحث.

المصادر:

1- Owaid, Ghazwan Five, (2012), “Comparison of Bayesian estimators for parameter and Titi stopping reliability of Raleigh distribution using balanced and unbalanced loss functions” Master’s thesis, College of Administration and Economics - Al-Mustansiriya University.

2- Han, M.,(2008)."Expected Bayesian estimation and hierarchical Bayesian estimation of failure rate" ,Journal of Chen university ,pp. 339-407.

3- Ghitany, M. E., Alqallaf, F., Al-Mutairi, D. K. & Husain, H. A. A two-parameter weighted Lindley distribution and its applications to survival data. Math. Comput. Simul. 81, 1190–1201 (2011).

4- Han, M.,(2008)."Expected Bayesian estimation and hierarchical Bayesian estimation of failure rate" ,Journal of Chen university ,pp. 339-407.

5-Ibrahim, J. G. & Laud, P. W. On Bayesian analysis of generalized linear models using Jeffreys’s prior. J. Am. Stat. Assoc. 86, 981–986 (1991).

6- Kamakura, W. A., & Wedel, M. (2004). An Empirical Bayes Procedure for lmproving. JOUrnal Of BusineSS & Economic Statistics, 22(1).

7- Kvam, P. H., & Vidakovic, B. (2007). Nonparametric statistics with applications to science and engineering (Vol. 653). John Wiley & Sons.

8- Mesfioui, M. & Abouammoh, A. M. On a multivariate Lindley distribution. Commun. Stat. Methods 46, 8027–8045 (2017).

9- Naser, J. A. Under Different Priors &Two Loss Functions To Compare Bayes Estimators With Some of Classical Estimators For the Parameter of Exponential Distribution. (2017).

10-Reuven, Y. R.,(1981)"Simulation and theMonte Carlo Method " John Wiley & Sons New York Chichester Brisbane Toronto Singapore.

11- Shanker, R., Shukla, K. K., Shanker, R. & Tekie, A. L. A Three-parameter Lindley distribution. Am. J. Math. Stat. 7, 15–26 (2017).

12-Yedlapalli, P., Sastry, K. L. N., & Rao, A. D. (2019). On stereographic semicircular quasi lindley distribution. Journal of New Results in Science, 8(1), 6-13.

13-Yedlapalli, P., Girija, S. V. S., & Rao, A. D. (2013). On construction of stereographic semicircular models. Journal of Applied Probability, 8(1), 75-90.