Warith Scientific Journal

مقارنة بين طريقتين لتقدير معلمات توزيع معكوس ويبل بالفترة الضبابية مع تطبيق عملي

Comparison of two methods for estimating the Parameters of the inverse Weibull distribution with fuzzy interval with practical application

م.م امتنان ستار عيسى
Emtinan Satar Eisaa
جامعة وارث الأنبياء/ كلية الإدارة والاقتصاد
University of Warith Al-Anbiyaa/ College of Administration and Economics
emtinan.satar@uowa.edu.iq

المستخلص

في هذا البحث يتم تقدير معلمات توزيع معكوس ويبل ذي معلمتين معلمة الشكل ومعلمة القياس بطريقة الإمكان الأعظم وطريقة الإمكان الأعظم النسبية في حالة البيانات الحقيقية والضبابية وتمت المقارنة بين الطريقتين باستعمال المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطأ (MSE) وتبينت ان تقدير المعلمات لبيانات الضبابية كانت أدق من تقدير معلمات البيانات الحقيقية وتم تقدير بالفترة للمعلمات بالطريقتين واستخراج طول الفترة وتبينت ان طريقة الإمكان الأعظم لتقدير المعلمات كانت افضل من الطريقة الأخرى لبيانات الضبابية وثم تتم تطبيق على البيانات الضبابية بعد تحويل بيانات الحقيقية الى بيانات ضبابية باستخدام دالة انتماء مثلثية عند معامل القطع ($\alpha = 0.1$) ، وقد تم اجراء دراسة تطبيقية بالطريقتين باستعمال لغة (MATIAB).

الكلمات المفتاحية : توزيع معكوس ويبل ، بيانات ضبابية ، تقدير بالفترة ، طريقة الإمكان الأعظم ، طريقة الإمكان الأعظم النسبية .

Abstract:

In this research, the parameters of the inverse Weibull distribution with two parameters, the shape parameter and the measurement parameter, are estimated by the method of the maximum likelihood and the method of relative maximum likelihood in the case of real and fuzzy data. The parameters of the real data were estimated by the two methods, and the length of the period was extracted. It was found that the greatest possibility method for estimating the parameters was better than the other method for the fuzzy data, and then it is applied to the fuzzy data after transforming the real data into fuzzy data using a trigonometric affiliation function at the cutoff factor (α = 0.1) An applied study was conducted using the two methods using the MATIAB language.

Keywords: inverse Weibull distribution , Fuzzy Data , Interval Estimation , Maximum likelihood Method , Raletive Maximum Likelihood Method .

1- المقدمة (Introduction):

في العالم الحقيقي يوجد العديد من المشاكل التي يواجها الانسان في الحياة قد تكون هناك مجموعات من الأشياء التي لا تحتوي على العضوية الدقيقة لعناصرها لذا فان هذه المجموعات لا تشكل مجموعات بالمعنى الرياضي المعتاد على هذه المصطلحات على سبيل المثال اذا كان لدينا مجموعة من الطلبة في جامعة معينة فيمكننا اخذ مصطلح يمثل " الطلبة " الذين لديهم رخصة قيادة من الطبيعي ان يكون لكل طالب في تلك المجموعة ترخيص ام لا اذا كان الطالب لديه رخصة قيادة وكانت القيمة صفراً فلا يمكن الحصول على رخصة القيادة ولكن اذا اخذنا مجموعة فرعية التي تمثل " الطلبة الذين يقودون بشكل جيد للغاية " فيستمتع كل طالب بدرجة معينة من رخصة القيادة ويتم تمييز الطلبة في المجموعة بوظيفة العضوية التي تعطي قيمة بين الصفر والواحد وهنا جزيئة الانتماء مسموح به من ناحية أخرى تعد الموثوقية واحدة من التقنيات وأكثرها فاعلية في الوقت الحالي لتقييم عمل أي وحدة انها الوظيفة التي تعطي احتمالية عمل أي وحدة لفترة زمنية معينة دون عطل وتفترض العديد من الطرق والنماذج في شكلها التقليدي ان جميع دالة الاحتمال مدى الحياة واضحة في تطبيقات العالم الحقيقي لذلك من الضروري تعميم طرق تقدير الاحصائي الكلاسيكي للأرقام الحقيقية الى ارقام ضبابية هذا بسبب معلمات توزيع الاحتمالات في بعض الأحيان لا يمكن تسجيلها بدقة بسبب أخطاء الخبرة او التقدير وذلك يؤدي الى المعلمات في توزيعات الحياة غير واضحة وقد يصبح الموثوقية صعبة للتعامل مع الموثوقية التقليدية وبالتالي يمكننا التعامل مع مصطلح اكثر شمولا من مصطلح الموثوقية التقليدي الى الموثوقية الضبابية ويتم تعريف على انها الاحتمال الضبابية لاستمرارية عمل أي وحدة بنجاح لفترة زمنية والى درجة انتماء التي يتم تحديدها وفقا لنظرية عضوية معينة وبدا المنطق الضبابي بالنضوج على يد العالم الاذربيجاني (Zadeh) في عام 1965

عندما استخدم مصطلح " المتغيرات الضبابية " وهو اول من وضع أسس نظرية المجموعات الضبابية (Zadeh,1965,p:338-353)ويتم تعريف المجموعة الضبابية على انها مجموعة من الكائنات او العناصر التي لها درجات انتماء مستمرة تتميز بوظيفة لكل كائن في المجموعة غالبا ما تكون درجة الانتماء بين الصفر والواحد (Zadeh,1968, p:95)و بصورة عامة التقدير في الاستدلال الاحصائي يقسم الى قسمين الأول التقدير بالنقطة والثاني التقدير بالفترة التقدير بالنقطة اي الحصول على قيمة واحدة للمعلمة المراد تقديرها والتقدير بالفترة أي الحصول على فترة للمعلمة المراد تقديرها (Hogg&Graig,1978,p:107-122)وقام Wu في عام 2004 بتقديرBayes الضبابية باستخدام نهج في البيئة الضبابية بافتراض معالجة ضبابية للمتغيرات الضبابية مع التوزيعات الضبابية (Wu,2004,p:1-27) وقام Pak واخرون في عام 2013 اذ استخدموا منهجية بيزي لتقدير بيزي للمعلمة للتوزيع رايلي على أساس بيانات أوقات الحياة الضبابية (Park,Ali&Saraj,2013,p1-8) وقام Pak في عام 2016 بتقدير الإمكان الأعظم وبيز والعزوم لمعلمة الشكل للتوزيع اللوغاريتم الطبيعي (Park,2016,p:90-98) وقام Mweleli واخرون في عام 2020 بتقدير بالفترة للتوزيع وبيل استناد على بيانات خاضعة للرقابة من النوع الثاني (Mweleli;Orawo;Tamba&Okenye,2020,p:1043-1045) .

2-المنهجية :

2-1- مشكلة البحث (Problem of the search):

على الرغم من ان التقدير بالفترة يعتمد على دقة البيانات المستعملة في تقدير معالم التوزيع الاحتمالي ولكن توجد الكثير من الظواهر في العالم الحقيقي تعاني من عدم الدقة في قياساتها لذلك ستكون الضبابية (Fuzziness) هي الصفة الملائمة لها ويتم التعبير عنها بالأرقام ضبابية (Fuzzy Numbers) حيث ان ذلك يجعل الأساليب التقليدية في تقدير المعلمات للتوزيع الاحتمالي لتلك البيانات غير مناسبة فلا بد من البحث عن أساليب تستوعب هذه المشكلة وتقودنا الى تقديرات دقيقة ومضبوطة للظواهر قيد الدراسة .

2-2- هدف البحث (Aim of the search):

يهدف البحث الى :

تقدير معلمات توزيع معكوس و ويبل بالفترة الضبابية ومن طرائق التقدير للتوزيع (طريقة الإمكان الأعظم وطريقة الإمكان الأعظم النسبية) في حالة بيانات عبارة عن ارقام ضبابية .

3-الجانب النظري:

3-1- توزيع معكوس ويبل : Inverse Weibull Distribution

يعد توزيع معكوس ويبل من التوزيعات الاحتمالية المستمرة لنماذج ازمنة الحياة Lifetime models و قد قدم هذا التوزيع من قبل عالم الرياضيات الفرنسي Maurice Frechet (1828-1973) والذي يمتاز باستخدامات متعددة (نماذج وتحليل الحوادث الطبيعية مثل الهزات الأرضية والزلازل والفيضانات وسقوط الامطار وسرعة الرياح واختبارات الحياة وتيارات البحار والدراسات البايلوجية والدراسات الطبية) وكذلك يستعمل في نمذجة وفيات ألاطفال الرضع وهو من التوزيعات المناسبة الملائمة لعينات البقاء على قيد الحياة .(Alkarni;Afify;Elbatal&Elgarhy,2020,p:1)

واقترح الباحث (Drapella) عام (1993) تسمية معكوس ويبل وعلى افتراض ان المتغير العشوائي y يتوزع وفقا لتوزيع ويبل (Weibull) فأن معكوس المتغير العشوائي $\left(\frac{1}{y}\right)$يتوزع وفقا لتوزيع معكوس ويبل (Inverse Weibull (Distribution (Drapella,1993,p:383)

وان دالة الكثافة الاحتمالية تكون بالشكل الاتي:

$$f(t,\alpha,\beta)=\theta\gamma^{\theta}t^{-(\theta+1)}\exp\left(-\left(\frac{\gamma}{t}\right)^{\theta}\right) \qquad ،t>0،\theta,\gamma>0 \quad \dots\dots\dots(1)$$

θ : تمثل معلمة الشكل (Shape Parameter)

γ : تمثل معلمة القياس (Scale Parameter)

وان دالة التوزيع التراكمي لمتغير يتبع توزيع معكوس ويبل (Inverse Weibull) تكون بالشكل الاتي:

$$F(t,\theta,\gamma)=p(T\leq t)=\int_0^t f(u)du=\exp\left(-\left(\frac{\gamma}{t}\right)^{\theta}\right) \quad ;t>0\dots\dots\dots(2)$$

3-2- المجموعة الضبابية : (Fuzzy Sets)

تعرف المجموعة الضبابية بأنها المجموعة التي تمتلك عناصرها نسبة انتماء معينة تدعى بدرجة الانتماء او درجة العضوية أي انها تمتلك مدى بين الفترة [0,1] ، لنفترض ان T يمثل مجموعة شاملة يحتوي على جميع العناصر وان$\tilde{A}$ مجموعة جزئية ضبابية من T فدالة الانتماء من $\tilde{A}$هي دالة في T وتكتب دالة الانتماء $\mu_{\tilde{A}}(t)$ ويمكن تمثيلها بالشكل الاتي:

$$\tilde{A} = \left\{\left(t_i , \mu_{\tilde{A}}(t_i)\right), t_i \in T , i = 1,2,3 \dots\dots n , 0 \leq \mu_{\tilde{A}} \leq 1\right\} \quad \dots\dots\dots (3)$$

فاذا افترضنا ان $\mu_{\tilde{A}}(t) = 1$ يكون العنصر t ينتمي تماما الى $\tilde{A}$ واذا $\mu_{\tilde{A}}(t) = 0$ يكون العنصر t لا ينتمي تماما الى $\tilde{A}$ واذا $\mu_{\tilde{A}}(t) = 0.9$ يكون العنصر t ينتمي بدرجة 0.9 $\tilde{A}$ واذا كانت $\mu_{\tilde{A}}(t)$ مساوية الى واحد او صفر سنحصل على مجموعة جزئية غير ضبابية *(Chen&Tat,2000,p:37-42)*

واما الأرقام الضبابية تعرف بانها الارقام التي تستعمل لوصف حالة عدم التأكد التي تصاحب بعض المشاهدات ويتميز بما تسمى دالة الانتماء وتأتي الأرقام الضبابية في اشكال عديدة ولكن الأكثر استخداما لوصف البيانات الضبابية هي الأرقام المثلثية الضبابية (Kwang,2004,p:130-139)

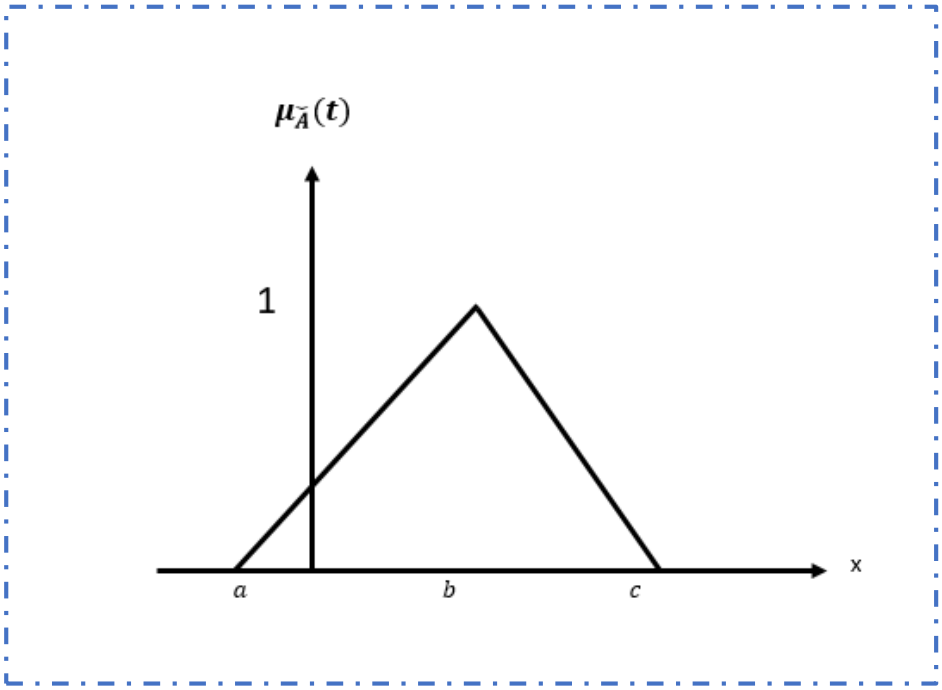
الرقم الضبابي المثلثي ويعد هذا الرقم اكثر شيوعا لسهولة استعماله حيث يتم تمثيله بثلاث نقاط (a , b , c) أي ان $a < b < c$, وقاعدة المثلث الفترة $[a, c]$ وراسه عند t =b و يمكن ان يكتب بالصيغة الاتية

$$\tilde{N} = (a/b\ /c)$$

وان دالة الانتماء المثلثية للرقم الضبابي المثلثي يمكن تمثيلها كالاتي :

$$\mu_{\tilde{A}}(t) = \begin{cases} \dfrac{t-a}{b-a} & a \leq t \leq b \\ \dfrac{c-t}{c-b} & b \leq t \leq c \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

.....(4)



الشكل (1)يمثل الرقم الضبابي المثلثي

ويمثل فضاء العينة الأجزاء الضبابية ($\tilde{t} = (\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{t}_3, \dots\dots., \check{t}_n$ من $T=(T_1, T_2, T_3, \dots\dots T_n)$ بدوال انتماء لها قياس بوريل Borel Measure وتحقق قيد التعامد(Torabi&Mirhosseini,2009,p:1620-1623)

$$\sum \tilde{t} \in T \quad \mu_{\tilde{T}}(t) = 1 \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (5)$$

لكل $t \in T$ ويسمى أيضا نظام المعلومات الضبابية (FIS) .

4-طرائق التقدير بالفترة(Interval Estimation Method):(

(Nájera & Bolívar,2021,p:3-6)

4-1- طريقة الإمكان الأعظم (MLE Method) في حالة بيانات الحقيقة :

اذا توفرت لدينا قياسات عينة عشوائية بحجم n , $t = (t_1, \dots\dots\dots., t_n)$ لها توزيع معكوس ويبل Inverse Weibull Distribution بدالة الكثافة الاحتمالية :

$$f(t, \theta, \gamma) = \theta\gamma^{\theta} t^{-(\theta+1)} \exp\left(-\left(\frac{\gamma}{t}\right)^{\theta}\right) \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (6)$$

وليكن $T = (T_1, \dots\dots, T_n)$ متجه عشوائي يمثل فضاء العينة, فاذا كـان$t = (t_1, \dots., t_n)$ من T متجه البيانات المشاهدة, فانه يمكن الحصول على دالة الامكان الأعظم للبيانات الكاملة $(Crisp\ set)$ كالآتي :

$$L(\theta, \gamma, t) = \prod_{i=1}^{n} f(\theta, \gamma, t) = \theta^n \gamma^{n\theta} \prod_{i=1}^{n} t^{-(\theta+1)} \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\gamma}{t}\right)^{\theta}\right)$$

.....(7)

إذ أن t تكون مشاهدة بصورة واضحة ومتوفرة معلومات كاملة عنها.

فان دالة الامكان الاعظم لتوزيع معكوس ويبل في حالة البيانات الحقيقية يمكن ان تكتب الصيغة الاتية :

$$L^* = \log(L_0(\theta, \gamma, \tilde{t}))$$

$$= nlog(\theta) + n\theta \log(\gamma) + \sum_{i=1}^{n} \log\left(\int_0^{\infty} t^{-(\theta+1)} \exp\left(-\left(\frac{\gamma}{t}\right)^{\theta}\right) dt\right)$$

.....(8)

وان تقديرات الامكان الاعظم للمعلمات θ وγ يمكن ان نحصل عليها بتعظيم L^* والاشتقاق الجزئي بالنسبة للمعلمات θ وγ ومساواة النتيجة بالصفر كالاتي :

$$= \frac{n}{\hat{\theta}} + nlog(\hat{\gamma}) - \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\int_0^{\infty}\left[\left(t^{-(\hat{\theta}+1)}.ln(t)+t^{-2\hat{\theta}-1}(\hat{\gamma})^{\hat{\theta}}.ln\left(\frac{\hat{\gamma}}{t}\right)\right)exp\left(-\left(\frac{\hat{\gamma}}{t}\right)^{\hat{\theta}}\right).dt.\right]}{\int_0^{\infty} t^{-(\theta+1)}\, exp\left(-\left(\frac{\hat{\gamma}}{t}\right)^{\hat{\theta}}\right)dt}\right] = 0 \quad \ldots\ldots\ldots(9)$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial \gamma} = \frac{n\hat{\theta}}{\hat{\gamma}} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\int_0^{\infty} t^{-\theta-1}\left(\frac{\hat{\gamma}}{t}\right)^{\hat{\theta}} \frac{\hat{\theta}}{\hat{\gamma}} exp(-\left(\frac{\hat{\gamma}}{t}\right)^{\hat{\theta}})dt}{\int_0^{\infty} t^{-(\hat{\theta}+1)}\, exp\left(-\left(\frac{\hat{\gamma}}{t}\right)^{\hat{\theta}}\right)dt} = 0$$

.....(10)

ونلحظ من الصيغ (9) و (10) بانه ليس هنالك صيغة مغلقة للحل، لذلك سوف نبحث عن التكرار الرقمي لنحصل على مقدرات الامكان الاعظم وذلك باستخدام طريقة نيوتن رافسون ***Newton– Raphson method*** حتى نحصل على تقديرات الامكان الاعظم الضبابية $\widehat{\theta}_{mle}$ و $\widehat{\gamma}_{mle}$ وكالاتي :

ليكن $\varepsilon = (\theta, \gamma)^T$ متجه المعلمات , فان عند الخطوة $(h+1)$ من عمليات التكرار يمكن الحصول على المعلمات كالاتي :

$$\varepsilon^{h+1} = \varepsilon^{h} - \left[\frac{\partial^2 L^*(\theta,\gamma,t)}{\partial\varepsilon\partial\varepsilon^T}\Big|_{\varepsilon=\varepsilon^h}\right]^{-1} . \left[\frac{\partial L^*(\theta,\gamma,t)}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=\varepsilon^h}\right]$$

إذ أن :-

$$\frac{\partial L^*(\theta,\gamma,t)}{\partial\varepsilon} = \begin{pmatrix} \frac{\partial L^*(\theta,\gamma,t)}{\partial\theta} \\ \frac{\partial L^*(\theta,\gamma,t)}{\partial\beta} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 L^*(\theta,\gamma,t)}{\partial\varepsilon\partial\varepsilon^T} = \begin{pmatrix} \frac{\partial L^*(\theta,\gamma,t)}{\partial\theta^2} & \frac{\partial L^*(\theta,\gamma,t)}{\partial\theta\partial\gamma} \\ \frac{\partial L^*(\theta,\gamma,t)}{\partial\theta\partial\gamma} & \frac{\partial L^*(\theta,\gamma,t)}{\partial\gamma^2} \end{pmatrix})$$

ونستمر بعملية التكرار ***Replication*** حتى التقارب , اي حتى يكون $||\varepsilon^{h+1} - \varepsilon^h||$ اقل من ω بحيث ان $\omega > 0$ وهو عدد صغير جدا .

ولإيجاد التقدير بالفترة لمعلمات توزيع معكوس ويبل باستعمال طريقة الامكان الأعظم , وتسمى طريقة Wald (Technique)نجد اولاً مصفوفة التباين والتباين المشترك للمعلمات المراد تقدير فترة الثقة لها باستعمال خاصية $(Gramer - Roa\ lower\ Bound)$ والذي يساوي معكوس محدد مصفوفة معلومات فيشر المشاهدة وكالآتي:

$$\Sigma = -\frac{1}{I(\hat{\theta}\ \hat{\gamma})}$$

مصفوفة معلومات فيشر يمكن ان تستخرج كالآتي:

$$I(\hat{\theta},\hat{\gamma}) = -E\begin{pmatrix} S_1 & S_3 \\ S_3 & S_2 \end{pmatrix}$$

اي ان مصفوفة التباين والتباين المشترك للمعلمات المراد تقدير فترة الثقة لها يكون كالآتي:

$$\Sigma = \frac{1}{E\begin{pmatrix} -S_1 & -S_3 \\ -S_3 & -S_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \widehat{\sigma}^2(\hat{\theta}) & \widehat{\sigma}(\hat{\theta},\hat{\gamma}) \\ \widehat{\sigma}(\hat{\theta},\hat{\gamma}) & \widehat{\sigma}^2(\hat{\gamma}) \end{pmatrix}$$

فان فترات الثقة للمعلمات المراد تقديرها يمكن ان يستخرج وفقًا لنظرية المقاربة لـ MLE ، فإن توزيع المعاينة :

$$z = \frac{\hat{\theta} - \theta}{\sqrt{\widehat{\sigma}^2(\hat{\theta})}}$$

$$z = \frac{\hat{\gamma} - \gamma}{\sqrt{\widehat{\sigma}^2(\hat{\gamma})}}$$

يمكن أن يقرب باستعمال التوزيع الطبيعي القياسي بفترة ثقة 95%فان فترة الثقة لكل معلمة من المعلمات تستخرج كالآتي:

$$\hat{\theta} - Z_{1-\frac{\psi}{2}}\sqrt{\widehat{\sigma}^2(\hat{\theta})} < \theta < \hat{\theta} + Z_{1-\frac{\psi}{2}}\sqrt{\widehat{\sigma}^2(\hat{\theta})} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (11)$$

$$\hat{\gamma} - Z_{1-\frac{\psi}{2}}\sqrt{\widehat{\sigma}^2(\hat{\gamma})} < \gamma < \hat{\gamma} + Z_{1-\frac{\psi}{2}}\sqrt{\widehat{\sigma}^2(\hat{\gamma})} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (12)$$

2-4- طريقة الإمكان الأعظم (MLE Method) في حالة بيانات الضبابية :

اذا توفرت لدينا قياسات عينة عشوائية بحجم n , $t = (t_1, \dots\dots\dots, t_n)$ لها توزيع معكوس ويبل Inverse Weibull Distribution بدالة الكثافة الاحتمالية :

$$f(t,\theta,\gamma) = \theta\gamma^{\theta}t^{-(\theta+1)}\exp\left(-\left(\frac{\gamma}{t}\right)^{\theta}\right) \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (13)$$

وليكن $T = (T_1, \dots\dots, T_n)$ متجه عشوائي يمثل فضاء العينة, فاذا كـان$t = (t_1, \dots., t)$ من T متجه البيانات المشاهدة, فانه يمكن الحصول على دالة الامكان الأعظم للبيانات الكاملة $(Crisp\ set)$ كالآتي :

$$L(\theta,\gamma,t) = \prod_{i=1}^{n} f(\theta,\gamma,t) = \theta^n\gamma^{n\theta}\prod\nolimits_{i=1}^{n} t^{-(\theta+1)}\exp\left(-\sum\nolimits_{i=1}^{n}\left(\frac{\gamma}{t}\right)^{\theta}\right)$$

.....(14)

إذ أن t تكون مشاهدة بصورة واضحة ومتوفرة معلومات كاملة عنها.

اما اذا كانت t غير مشاهدة بصورة واضحة ودقيقة وتتوفر معلومات جزئية عنها في صيغة مجموعة ضبابية جزئية $(\boldsymbol{Fuzzy\ subset})$ بدالة انتماء $\mu_{\tilde{A}}(t)$ لها قياس بوريل, فان المشاهدة الضبابية $\tilde{t}$ يمكن ان تعبر عن المشاهدة الجزئية عن x من المتجه العشوائيT وان دالة الانتماء $\mu_{\tilde{A}}$ تعد كتوزيع احتمالي يفسر القيود عن تلك المشاهدة الجزئية $\tilde{t}$.

ان المجموعة الضبابية $\tilde{t}$ يمكن وصفها بانها ناتجة عن خطوتين :

- ✓ t مسحوب من T
- ✓ المتجه المشاهد t بمثابة معلومات جزئية يمثل المشاهدة وانتماء كل مشاهدة $\mu_{\tilde{t}}(t)$

ويجب ان نلحظ في هذا النموذج ان الخطوة الاولى فقط تعد تجربة عشوائية ، اما الخطوة الثانية فتتضمن تجميع معلومات عن x ونمذجة تلك المعلومات كتوزيع احتمالي ضبابي .

وان المعلومات عن t يمكن ان تتمثل بالتوزيع الاحتمالي الاتي :

$$\mu_{\tilde{t}}(t) = \mu_{\tilde{t}_1}(t)x \dots\dots\dots\dots x\mu_{\tilde{t}_n}(t) \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (15)$$

فاذا كانت t معطاة ويفترض ان دالة انتماءها لها قياس بوريل فاننا يمكن ان نحسب احتمالها وفقاً الى تعريف الاحتمال الضبابي فيمكن الحصول على دالة الامكان الاعظم للبيانات الضبابية كالاتي:

$$L(\theta,\gamma,\tilde{t}) = p(\tilde{t},\theta,\gamma) = \int f(\tilde{t};\theta,\gamma)\,\mu_{\tilde{t}}(t)dt \quad \dots\dots\dots\dots (16)$$

وطالما ان متجه البيانات t هو تحويل من متجه عشوائي متماثل التوزيع ومستقل T , ونفترض ان دالة الانتماء المشتركة قابلة للتحليل , فان دالة الامكان الاعظم الضبابية لتوزيع معكوس ويبل الضبابي يمكن ان تكتب الصيغة الاتية :

$$L^* = \log(L_0(\theta,\gamma,\tilde{t}))$$

$$= nlog(\theta) + n\theta\log(\gamma) + \sum_{i=1}^{n}\log\left(\int_0^{\infty} t^{-(\theta+1)}\exp\left(-\left(\frac{\gamma}{t}\right)^{\theta}\right)\mu_{\tilde{t}_i}(t)dt\right)$$

.....(17)

وان تقديرات الامكان الاعظم للمعلمات θ وγ يمكن ان نحصل عليها بتعظيم L^* والاشتقاق الجزئي بالنسبة للمعلمات θ وγ ومساواة النتيجة بالصفر كالاتي :

$$= \frac{n}{\hat{\theta}} + nlog(\hat{\gamma}) - \left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\int_0^{\infty}\left[\left(t^{-(\hat{\theta}+1)}.ln(t)+t^{-2\hat{\theta}-1}(\hat{\gamma})^{\hat{\alpha}}.ln\left(\frac{\hat{\gamma}}{t}\right)\right)exp\left(-\left(\frac{\hat{\gamma}}{t}\right)^{\hat{\theta}}\right).\mu_{\tilde{t}_i}(t)dt.\right]}{\int_0^{\infty} t^{-(\hat{\theta}+1)}exp\left(-\left(\frac{\hat{\gamma}}{t}\right)^{\hat{\theta}}\right)\mu_{\tilde{t}_i}(t)dt}\right] = 0 \quad \dots\dots (18)$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial\gamma} = \frac{n\hat{\theta}}{\hat{\gamma}} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\int_0^{\infty} t^{-\alpha-1}\left(\frac{\hat{\gamma}}{t}\right)^{\hat{\alpha}}\frac{\hat{\theta}}{\hat{\gamma}}exp(-\left(\frac{\hat{\gamma}}{t}\right)^{\hat{\theta}})\mu_{\tilde{t}_i}(t)dt}{\int_0^{\infty} t^{-(\hat{\theta}+1)}exp\left(-\left(\frac{\hat{\gamma}}{t}\right)^{\hat{\theta}}\right)\mu_{\tilde{t}_i}(t)dt} = 0$$

.....(19)

ونلحظ من الصيغ (18) و (19) بانه ليس هنالك صيغة مغلقة للحل، لذلك سوف نبحث عن التكرار الرقمي لنحصل على مقدرات الامكان الاعظم وذلك باستخدام طريقة نيوتن رافسون ***Newton–Raphson method*** حتى نحصل على تقديرات الامكان الاعظم الضبابية $\widehat{\theta}_{fmle}$ و $\widehat{\gamma}_{fmle}$ وكالاتي :

ليكن $\varepsilon = (\theta, \gamma)^T$ متجه المعلمات , فان عند الخطوة $(h+1)$ من عمليات التكرار يمكن الحصول على المعلمات كالاتي :

$$\varepsilon^{h+1} = \varepsilon^{h} - \left[\frac{\partial^2 L^*(\theta,\gamma,\tilde{t})}{\partial\theta\partial\theta^T}\Big|_{\varepsilon=\varepsilon^h}\right]^{-1} \cdot \left[\frac{\partial L^*(\theta,\gamma,\tilde{t})}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=\varepsilon^h}\right]$$

إذ أن :-

$$\frac{\partial L^*(\theta,\gamma,\tilde{t})}{\partial\varepsilon} = \begin{pmatrix} \frac{\partial L^*(\theta,\gamma,\tilde{t})}{\partial\theta} \\ \frac{\partial L^*(\theta,\gamma,\tilde{t})}{\partial\gamma} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 L^*(\theta,\gamma,\tilde{t})}{\partial\varepsilon\partial\varepsilon^T} = \begin{pmatrix} \frac{\partial L^*(\theta,\gamma,\tilde{t})}{\partial\theta^2} & \frac{\partial L^*(\theta,\gamma,\tilde{t})}{\partial\theta\partial\gamma} \\ \frac{\partial L^*(\theta,\gamma,\tilde{t})}{\partial\theta\partial\gamma} & \frac{\partial L^*(\theta,\gamma\tilde{t})}{\partial\gamma^2} \end{pmatrix})$$

ونستمر بعملية التكرار ***Replication*** حتى التقارب , اي حتى يكون $\left|\left|\varepsilon^{h+1} - \varepsilon^{h}\right|\right|$ اقل من ω بحيث ان $\omega >$ 0 وهو عدد صغير جدا .

ولإيجاد التقدير بالفترة لمعلمات توزيع معكوس ويبل باستعمال طريقة الامكان الأعظم الضبابية, وتسمى طريقة Wald (Technique)نجد اولاً مصفوفة التباين والتباين المشترك للمعلمات المراد تقدير فترة الثقة لها باستعمال خاصية $(Gramer - Roa\ lower\ Bound)$ والذي يساوي معكوس محدد مصفوفة معلومات فيشر المشاهدة وكالآتي:

$$\Sigma = -\frac{1}{I(\hat{\theta},\hat{\gamma})}$$

مصفوفة معلومات فيشر يمكن ان تستخرج كالآتي:

$$I(\hat{\theta},\hat{\gamma}) = -E\begin{pmatrix} S_1 & S_3 \\ S_3 & S_2 \end{pmatrix}$$

اي ان مصفوفة التباين والتباين المشترك للمعلمات المراد تقدير فترة الثقة لها يكون كالآتي:

$$\Sigma = \frac{1}{E\begin{pmatrix} -S_1 & -S_3 \\ -S_3 & -S_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \widehat{\sigma}^2(\hat{\theta}) & \widehat{\sigma}(\hat{\theta},\hat{\gamma}) \\ \widehat{\sigma}(\hat{\theta},\hat{\gamma}) & \widehat{\sigma}^2(\hat{\gamma}) \end{pmatrix}$$

فان فترات الثقة للمعلمات المراد تقديرها يمكن ان يستخرج وفقًا لنظرية المقاربة لـ MLE ، فإن توزيع المعاينة :

$$z = \frac{\hat{\theta} - \theta}{\sqrt{\widehat{\sigma}^2(\hat{\theta})}}$$

$$z = \frac{\hat{\gamma} - \gamma}{\sqrt{\hat{\sigma}^2(\hat{\gamma})}}$$

يمكن أن يقرب باستعمال التوزيع الطبيعي القياسي بفترة ثقة 95%فان فترة الثقة لكل معلمة من المعلمات تستخرج كالآتي:

$$\hat{\theta} - Z_{1-\frac{\psi}{2}}\sqrt{\widehat{\sigma}^2(\hat{\theta})} < \theta < \hat{\theta} + Z_{1-\frac{\psi}{2}}\sqrt{\widehat{\sigma}^2(\hat{\theta})} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (20)$$

$$\hat{\gamma} - Z_{1-\frac{\psi}{2}}\sqrt{\widehat{\sigma}^2(\hat{\gamma})} < \gamma < \hat{\gamma} + Z_{1-\frac{\psi}{2}}\sqrt{\widehat{\sigma}^2(\hat{\gamma})} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (21)$$

3-4- طريقة الإمكان الأعظم النسبية (RMLE Method) في حالة بيانات الحقيقة :

ان دالة الإمكان الأعظم لتوزيع معكوس ويبل يمكن ان تكتب الصيغة الاتية .

$$L^* = \log(L_0(\theta, \gamma, t))$$

$$= nlog(\theta) + n\theta \log(\gamma) + \sum_{i=1}^{n} \log(\int_0^{\infty} t^{-(\theta+1)} \exp(-\left(\frac{\gamma}{t}\right)^{\theta}) dt \dots\dots\dots (22)$$

واذا تم تعويض المعلمات المقدرة بطريقة الامكان الأعظم $\widehat{\theta}_{mle}$ و $\widehat{\gamma}_{mle}$ في معادلة (22) نحصل على الآتي:

$$\boldsymbol{L}^*\left(\widehat{\theta}_{mle}, \widehat{\gamma}_{mle}, t\right) = nlog\left(\widehat{\theta}_{mle}\right) + n\,\widehat{\theta}_{mle} \log(\widehat{\gamma}_{mle}) +$$

$$\sum_{i=1}^{n} \log(\int_0^{\infty} t^{-(\widehat{\theta}_{mle}+1)} \exp(-\left(\frac{\widehat{\gamma}_{mle}}{t}\right)^{\widehat{\theta}_{mle}}) dt \quad \dots\dots\dots (23)$$

فان دالة الامكان النسبية (Relative Likelihood Function) نحصل عليها بقسمة معادلة (22) على معادلة(23) ونحصل على الآتي:

$$R(\theta, \gamma, t) = \frac{\boldsymbol{L}^*(\theta, \gamma, \tilde{t})}{\boldsymbol{L}^*(\widehat{\theta}_{mle}, \widehat{\gamma}_{mle}, \tilde{t})} =$$

$$\frac{nlog(\theta) + n\theta \log(\gamma) + \sum_{i=1}^{n} \log(\int_0^{\infty} t^{-(\theta+1)} \exp(-\left(\frac{\gamma}{t}\right)^{\theta}) dt}{log\left(\widehat{\theta}_{mle}\right) + n\,\widehat{\theta}_{mle} \log(\widehat{\gamma}_{mle}) + \sum_{i=1}^{n} \log(\int_0^{\infty} t^{-(\widehat{\theta}_{mle}+1)} \exp(-\left(\frac{\widehat{\gamma}_{mle}}{t}\right)^{\widehat{\theta}_{mle}}) dt)}$$

.....(24)

اذا رمزنا الى مقدر الامكان الاعظم للمعلمة θ بمعلومية المعلمة γ بالرمز $\hat{\theta}(\gamma)$ فان مقدر الامكان الاعظم النسبي للمعلمة γيمكن الحصول عليها بتعظيم دالة الامكان للتوزيع وكالآتي:

$$L_p(\gamma) = max_\theta \boldsymbol{L}^*(\theta,\gamma,t) = \boldsymbol{L}^*\left(\hat{\theta}(\gamma),\gamma,t\right)$$

$$= max_\theta Log\left(\hat{\theta}(\gamma)\right) + n\hat{\theta}(\gamma)\log(\gamma) + \sum_{i=1}^{n}\log\left(\int_0^\infty t^{-(\hat{\theta}(\gamma)+1)}\exp\left(-\left(\frac{\gamma}{t}\right)^{\hat{\theta}(\gamma)}\right)dt \quad \ldots\ldots(25)$$

ونقوم بتعظيم الدالة $L_p(\gamma)$ وذلك بالاشتقاق بالنسبة للمعلمة γ ومساواة المشتقة بالصفر وكالآتي:

$$R_P(\gamma) = \frac{\partial L_p(\gamma)}{\partial\gamma} = \frac{n\hat{\theta}(\hat{\gamma})}{\hat{\gamma}} + \sum_{i=1}^{n}\frac{t^{-(\hat{\theta}(\hat{\gamma})+1)}\hat{\theta}(\gamma)\left(\frac{\hat{\gamma}}{t}\right)^{\hat{\theta}(\hat{\gamma})-1}\exp(-\left(\frac{\gamma}{t}\right)^{\hat{\theta}(\hat{\gamma})})}{\int_0^\infty t^{-(\hat{\theta}(\hat{\gamma})+1)}\exp(-\left(\frac{\hat{\gamma}}{t}\right)^{\hat{\theta}(\hat{\gamma})})dt} = 0$$

.....(26)

لايجاد مقدر الامكان الاعظم النسبي للمعلمة θ يمكن الحصول عليه كالآتي:

$$L_p(\theta) = max_\theta \boldsymbol{L}^*(\theta,\gamma,t) = \boldsymbol{L}^*(\theta,\hat{\gamma}(\theta);t)$$

$$= max_\theta Log(\theta) + n\theta\log(\hat{\gamma}(\theta)) +$$

$$\sum_{i=1}^{n}\log(\int_0^\infty t^{-(\theta+1)}\exp(-\left(\frac{\hat{\gamma}(\theta)}{t}\right)^{\theta})dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(27)$$

ونقوم بتعظيم الدالة $L_p(\theta)$ وذلك بالاشتقاق بالنسبة للمعلمة θ ومساواة المشتقة بالصفر وكالآتي:

$$R_P(\theta) = \frac{\partial L_p(\theta)}{\partial\theta} = \frac{1}{\hat{\theta}} + n\log(\hat{\gamma}(\theta)) +$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{t^{-(\alpha+1)}\exp\left(-\left(\frac{\hat{\gamma}(\theta)}{t}\right)^{\theta}\left(\frac{\hat{\gamma}(\theta)}{t}\right)^{\theta}\right)lOG\left(\frac{\hat{\gamma}(\theta)}{t}\right)-(\theta+2)t^{-(\theta+2)}\exp(-\left(\frac{\hat{\gamma}(\theta)}{t}\right)^{\theta})}{\int_0^\infty t^{-(\theta+1)}\exp(-\left(\frac{\hat{\gamma}(\theta)}{t}\right)^{\theta})dt} = 0$$

.....(28)

فان فترة الثقة 100ψ% حسب مقدرات الامكان الاعظم النسبية للمعلمة γ هي مجموعة كل القيم التي تحقق:

$$R_P(\gamma)\geq\psi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(29)$$

اذ ان $r_P(\gamma)$ هي اللوغاريتم الطبيعي لدالة الامكان النسبية الجزئية للمعلمة β

فان فترة الثقة الإمكان الاعظم النسبية يمكن الحصول عليها بحل المعادلتين الآتيتين:

$$r_P(\gamma) - \mathrm{Log}(\psi) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(30)$$

$$r_P(\gamma) - \mathrm{Log}(0.147) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(31)$$

والمعادلتين (30) و (31) يمكن حلهما باستعمال طريقة القاطع (Bisection Method) وان فترة الثقة 100ψ% حسب مقدرات الامكان الاعظم النسبية للمعلمة θ هي مجموعة كل القيم التي تحقق:

$$R_P(\theta)\geq\psi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(32)$$

اذ ان $r_P(\theta)$ هي اللوغاريتم الطبيعي لدالة الامكان النسبية الجزئية للمعلمة θ

فان فترة الثقة الإمكان الاعظم النسبية يمكن الحصول عليها بحل المعادلتين الآتيتين:

$$r_P(\theta) - \text{Log}(\psi) = 0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (33)$$

$$r_P(\theta) - \text{Log}(0.147) = 0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (34)$$

والمعادلتين (33) و (34) يمكن حلهما باستعمال طريقة القاطع (Bisection Method)

4-4- طريقة الإمكان الأعظم النسبية (RMLE Method) في حالة بيانات الضبابية :

ان دالة الإمكان الأعظم الضبابية لتوزيع معكوس ويبل الضبابي يمكن ان تكتب الصيغة الاتية .

$$L^* = \log(L_0(\theta, \gamma, \tilde{t}))$$

$$= nlog(\theta) + n\theta \log(\gamma) + \sum_{i=1}^{n} \log(\int_0^{\infty} t^{-(\theta+1)} \exp(-\left(\frac{\gamma}{t}\right)^{\theta}) \mu_{\tilde{t}_i}(t)dt) \dots\dots\dots (35)$$

واذا تم تعويض المعلمات المقدرة بطريقة الامكان الأعظم الضبابية $\widehat{\theta}_{fmle}$ و $\widehat{\gamma}_{fmle}$ في معادلة (35) نحصل على الآتي:

$$\boldsymbol{L}^*\left(\widehat{\theta}_{fmle}, \widehat{\gamma}_{fmle}, \tilde{t}\right) = nlog\left(\widehat{\theta}_{fmle}\right) + n\,\widehat{\theta}_{fmle} \log\left(\widehat{\gamma}_{fmle}\right) +$$

$$\sum_{i=1}^{n} \log(\int_0^{\infty} t^{-(\widehat{\theta}_{fmle}+1)} \exp(-\left(\frac{\widehat{\gamma}_{fmle}}{t}\right)^{\widehat{\theta}_{fmle}}) \mu_{\tilde{t}_i}(t)dt) \quad \dots\dots\dots (36)$$

فان دالة الامكان النسبية (Relative Likelihood Function) نحصل عليها بقسمة معادلة (35) على معادلة(36) ونحصل على الآتي:

$$R(\theta, \gamma, \tilde{t}) = \frac{\boldsymbol{L}^*(\theta,\gamma,\tilde{t})}{\boldsymbol{L}^*(\widehat{\theta}_{fmle},\widehat{\gamma}_{fmle},\tilde{t})} =$$

$$\frac{log(\theta)+n\theta \log(\gamma)+\sum_{i=1}^{n} \log(\int_0^{\infty} t^{-(\theta+1)} \exp(-\left(\frac{\gamma}{t}\right)^{\theta}) \mu_{\tilde{t}_i}(t)dt)}{log(\widehat{\theta}_{fmle})+n\,\widehat{\theta}_{fmle} \log(\widehat{\gamma}_{fmle})+\sum_{i=1}^{n} \log(\int_0^{\infty} t^{-(\widehat{\theta}_{fmle}+1)} \exp(-\left(\frac{\widehat{\gamma}_{fmle}}{t}\right)^{\widehat{\theta}_{fmle}}) \mu_{\tilde{t}_i}(t)dt)}$$

.....(37)

اذا رمزنا الى مقدر الامكان الاعظم للمعلمة θ بمعلومية المعلمة γ بالرمز $\hat{\theta}(\gamma)$ فان مقدر الامكان الاعظم النسبي للمعلمة γ يمكن الحصول عليها بتعظيم دالة الامكان للتوزيع وكالآتي:

$$L_p(\gamma) = max_{\theta} \boldsymbol{L}^*(\theta, \gamma, \tilde{t}) = \boldsymbol{L}^*\left(\hat{\theta}(\gamma), \gamma, \tilde{t}\right)$$

$$= max_{\theta} Log\left(\hat{\theta}(\gamma)\right) + n\hat{\theta}(\gamma) \log(\gamma)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \log\left(\int_0^{\infty} t^{-(\hat{\theta}(\gamma)+1)} \exp\left(-\left(\frac{\gamma}{t}\right)^{\hat{\theta}(\gamma)}\right) \mu_{\tilde{t}_i}(t)dt \quad \dots\dots (38)$$

ونقوم بتعظيم الدالة $L_p(\gamma)$ وذلك بالاشتقاق بالنسبة للمعلمة γ ومساواة المشتقة بالصفر وكالآتي:

$$R_P(\gamma)=\frac{\partial L_p(\gamma)}{\partial\gamma}=\frac{n\hat{\theta}(\hat{\gamma})}{\hat{\gamma}}+\sum_{i=1}^{n}\frac{t^{-(\hat{\theta}(\hat{\gamma})+1)}\hat{\theta}(\gamma)\left(\frac{\hat{\gamma}}{t}\right)^{\hat{\theta}(\hat{\gamma})-1}\exp(-\left(\frac{\gamma}{t}\right)^{\hat{\theta}(\hat{\gamma})})\mu_{\tilde{t}_i}(t)}{\int_0^{\infty}t^{-(\hat{\theta}(\hat{\gamma})+1)}\exp(-\left(\frac{\hat{\gamma}}{t}\right)^{\hat{\theta}(\hat{\gamma})})\mu_{\tilde{t}_i}(t)dt}=0$$

.....(39)

لايجاد مقدر الامكان الاعظم النسبي للمعلمة θ يمكن الحصول عليه كالآتي:

$$L_p(\theta)=\ max_\theta \boldsymbol{L}^*(\theta,\gamma,\tilde{t})=\boldsymbol{L}^*(\theta,\hat{\gamma}(\theta),\tilde{t})$$

$$=max_\theta Log(\theta)+n\theta\log(\hat{\gamma}(\theta))+$$

$$\sum_{i=1}^{n}\log(\int_0^{\infty}t^{-(\theta+1)}\exp(-\left(\frac{\hat{\gamma}(\theta)}{t}\right)^{\theta})\mu_{\tilde{t}_i}(t)dt \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots(40)$$

ونقوم بتعظيم الدالة $L_p(\theta)$ وذلك بالاشتقاق بالنسبة للمعلمة θ ومساواة المشتقة بالصفر وكالآتي:

$$R_P(\theta)=\frac{\partial L_p(\theta)}{\partial\theta}=\frac{1}{\hat{\theta}}+n\log(\hat{\gamma}(\theta))+$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{t^{-(\theta+1)}\exp\left(-\left(\frac{\hat{\gamma}(\theta)}{t}\right)^{\theta}\left(\frac{\hat{\gamma}(\theta)}{t}\right)^{\theta}\right)log\left(\frac{\hat{\gamma}(\theta)}{t}\right)\mu_{\tilde{t}_i}(t)-(\theta+2)t^{-(\theta+2)}\exp(-\left(\frac{\hat{\gamma}(\theta)}{t}\right)^{\theta})\mu_{\tilde{t}_i}(t)}{\int_0^{\infty}t^{-(\theta+1)}\exp(-\left(\frac{\hat{\gamma}(\theta)}{t}\right)^{\theta})\mu_{\tilde{t}_i}(t)dt}=0$$

.....(41)

فان فترة الثقة 100ψ% حسب مقدرات الامكان الاعظم النسبية للمعلمة γ هي مجموعة كل القيم التي تحقق:

$$R_P(\gamma)\geq\psi \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(42)$$

اذ ان $r_P(\gamma)$ هي اللوغاريتم الطبيعي لدالة الامكان النسبية الجزئية للمعلمة γ

فان فترة الثقة الإمكان الاعظم النسبية يمكن الحصول عليها بحل المعادلتين الآتيتين:

$$r_P(\gamma)-\text{Log}(\psi)=0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(43)$$

$$r_P(\gamma)-\text{Log}(0.147)=0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(44)$$

والمعادلتين (43) و (44) يمكن حلهما باستعمال طريقة القاطع (Bisection Method) وان فترة الثقة 100ψ% حسب مقدرات الامكان الاعظم النسبية للمعلمة θ هي مجموعة كل القيم التي تحقق:

$$R_P(\theta)\geq\psi \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(45)$$

اذ ان $r_P(\theta)$ هي اللوغاريتم الطبيعي لدالة الامكان النسبية الجزئية للمعلمة θ

فان فترة الثقة الإمكان الاعظم النسبية يمكن الحصول عليها بحل المعادلتين الآتيتين:

$$r_P(\theta)-\text{Log}(\psi)=0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots(46)$$

$$r_P(\theta) - \text{Log}(0.147) = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (47)$$

والمعادلتين (46) و (47) يمكن حلهما باستعمال طريقة القاطع (Bisection Method)

5-الجانب التطبيقي (The application aspect):

5-1-عينة البحث للبيانات غير المضببة (البيانات الحقيقية):

تم اخذ بيانات هذا البحث من (from article:: The Long Term Fréchet distribution: Estimation, Properties and its Application)

(Remos;Nascimento&Louzada,2017,p:8-9)

الجدول (1) يمثل البيانات الحقيقية التي تمثل أوقات البقاء على قيد الحياة في سرطان الدم بالسنوات لعمليات الزرع الذاتي ال 46 المرضى (حيث يشير + الى الملاحظات الخاضعة للرقابة)

.03010	0.0384	0.0630	0.0849	0.0877	0.0959	0.1397	0.1616
0.1699	0.2137	0.2137	0.2164	0.2384	0.2712	0.2740	0.3863
0.4384	0.4548	0.5918	0.6000	0.6438	0.6849	0.7397	0.8575
0.9096	0.9644	1.0082	1.2822	1.3452	1.4000	1.5260	+1.7205
+1.9890	2.2438	+2.5068	+2.6466	3.0384	+3.1726	3.4411	+4.4219
+4.4356	+4.5863	+4.6904	+4.7808	+4.9863	+5.0000		

بعد تطبيق هذا البحث لبيانات الحقيقية وسوف يتم تحويلها هذه البيانات الى البيانات الضبابية باستخدام دالة الانتماء المثلثية حسب الصيغة (2) وباستخدام $(\alpha - Cut)$ 0.1 ونحصل على بيانات ضبابية لأجراء مقارنة بين الطرق التقدير في حالة البيانات الحقيقة والضبابية وايهما افضل من ناحية التقدير كما في الجدول (2)

real data	membership	fuzzy data	real data	membership	real fuzzy
0.0301	0	0.5918	0.8575	0.166482223	1.989
0.0384	0.001670054	0.6	0.9096	0.176965331	1.989
0.063	0.006619852	0.6438	0.9644	0.18799171	2.5068
0.0849	0.011026379	0.6849	1.0082	0.196804765	2.6466
0.0877	0.01158977	0.7397	1.2822	0.251936659	3.0384
0.0959	0.013239703	0.8575	1.3452	0.26461297	3.1726
0.1397	0.022052758	0.9096	1.4	0.275639349	3.4411
0.1616	0.026459285	0.9644	1.526	0.300991972	4.4219
0.1699	0.028129339	1.0082	1.7205	0.340127568	4.4356

0.2137	0.036942393	1.2822	1.989	0.3941528	4.5863
0.2137	0.036942393	1.3452	2.2438	0.445421437	4.6904
0.2164	0.037485664	1.4	2.5068	0.498340007	4.7808
0.2384	0.041912312	1.526	2.6466	0.526469345	4.9863
0.2712	0.048512042	1.7205	3.0384	0.60530393	5
0.274	0.049075434		3.1726	0.632306485	
0.3863	0.071671462		3.4411	0.686331717	
0.4384	0.082154571		4.4219	0.883679752	
0.4548	0.085454436		4.4356	0.886436347	
0.5918	0.113020383		4.5863	0.916758889	
0.6	0.114670315		4.6904	0.937704984	
0.6438	0.12348337		4.7808	0.955894485	
0.6849	0.131753154		4.9863	0.997243405	
0.7397	0.142779533		5	1	

Point estimation of the parameters α and β for the fuzzy and real data with error parentheses

كما في الجدول (3)

Parameters	Par. of MLE	Par. of Relative MLE	K-s
(fuzzy) θ=**4**	4.4501 (. 4501)	**4.4753** **(.4753)**	1.5682
(real)	0.6459 (3.3541)	1.8549 (2.1451)	0.0945
(fuzzy) γ=**0.9**	0.9072 (.0072)	0.9079 (0.0079)	
(real)	0.1728 (0.7272)	0.1300 (0.7700)	

تم اختبار البيانات في الجدول (2) باستعمال اختبار حسن المطابقة (كولمروف – سميرنوف) عن طريق برنامج كتب بلغة ماتلاب للتاكد من كون البيانات تتبع توزيع معكوس ويبل ام لا حسب الفرضية الاتية

H_0 : البيانات تتبع توزيع معكوس ويبل

H_1 : البيانات لا تتبع توزيع معكوس ويبل

وكانت نتيجة الاختبار في جدول (3) في حالة بيانات ضبابية وحقيقية هي (1.5682, 0.0945) اكبر من مستوى معنوية 0.05 وعليه لا نرفض فرضية العدم لذلك بان البيانات الضبابية والحقيقية تتبع توزيع معكوس ويبل

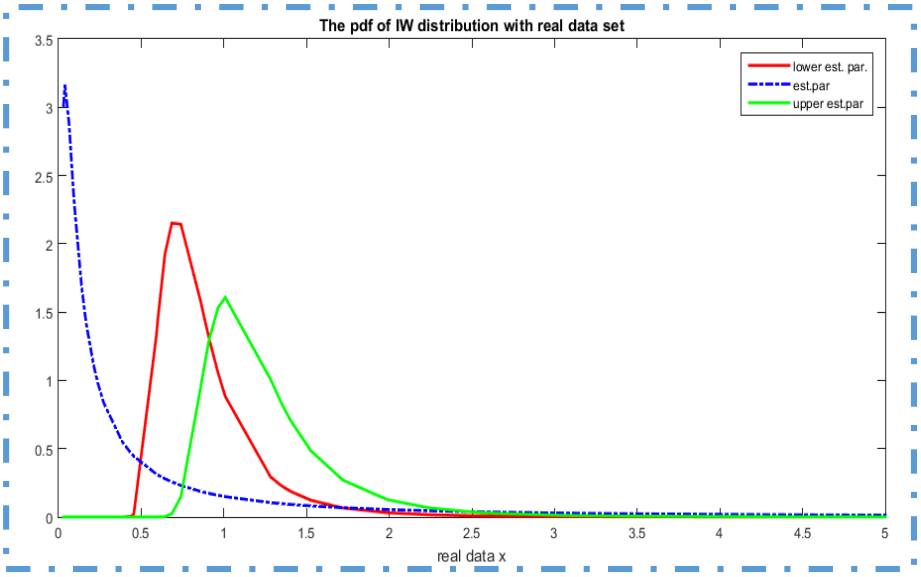
نلاحظ بان تقدير المعلمات بالنقطة في حالة البيانات الضبابية تمتلك اقل خطأ من البيانات الحقيقية هذا يعني بانه البيانات الضبابية كانت افضل في تقدير معلمات من البيانات الحقيقية

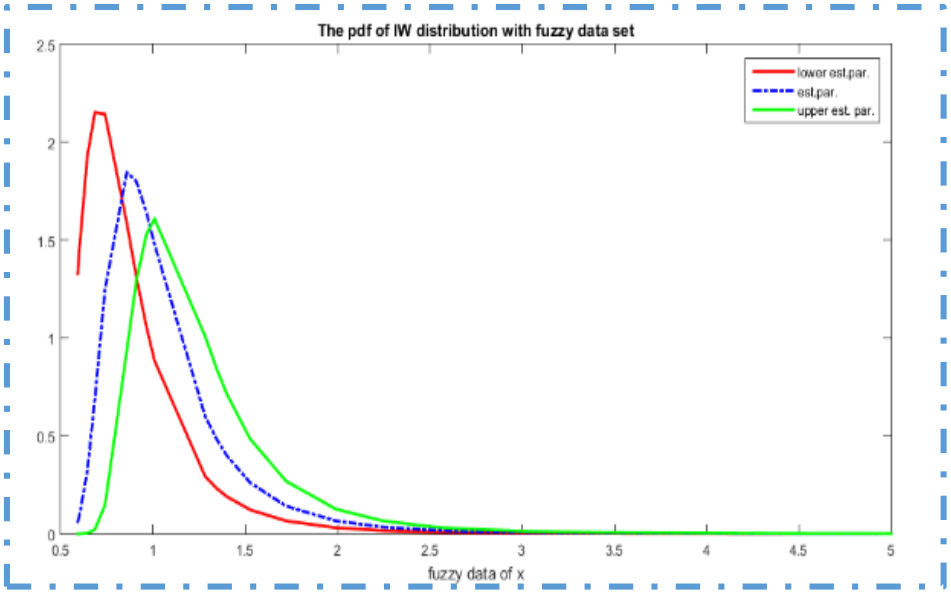
و نلاحظ ان الخطأ عند معلمة $\alpha = 4$ بطريقة الإمكان الأعظم (0.4501) هي اقل من الخطأ بطريقة الإمكان الأعظم النسبية (0.4753) اما عند المعلمة $\beta = 0.9$ نلاحظ بان الخطأ بطريقة الإمكان الأعظم (0.0072) اقل من الخطأ بطريقة الإمكان الأعظم النسبية (0.0079) لذلك تكون طريقة الإمكان الأعظم هي افضل من طريقة الإمكان الأعظم النسبية.

Interval estimations of the parameters α and β for the fuzzy data كما في الجدول (4)

Fuzzy data	MLE	CL for mle	Relative Mle	CL for r-mle
Interval length Of θh	**(4.3119 , 4.5883)**	**0.2764**	**(4.3370 , 4.6136)**	**0.2766**
Of γh	**(0.7446 , 1.0699)**	**0.3253**	**(0.7443 - 1.0715)**	**0.3272**

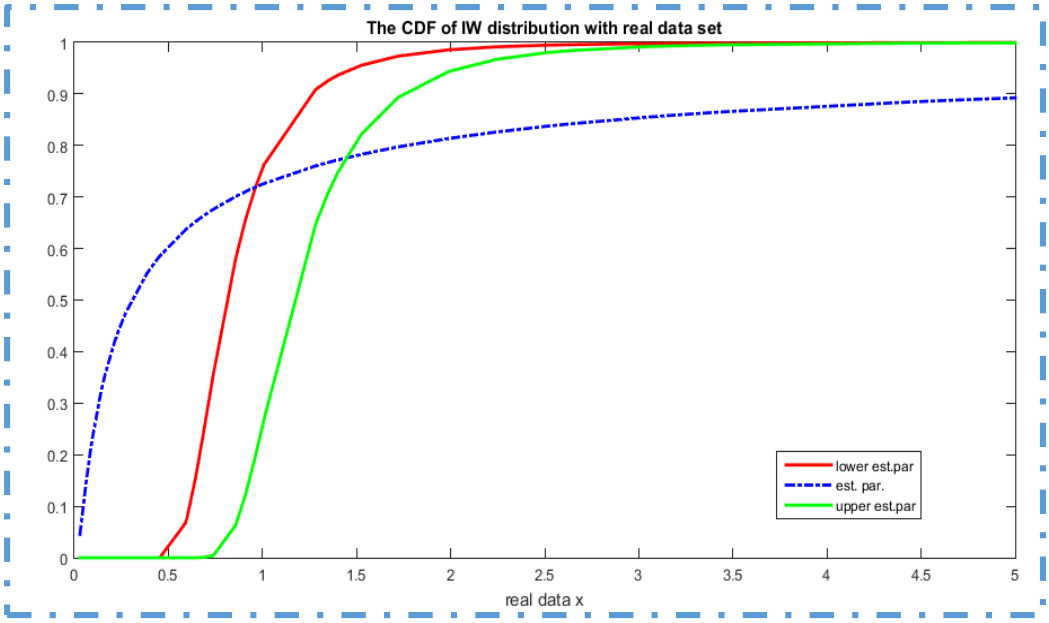
نلاحظ ان تقدير المعلمات بالفترة في الجدول (4) باستخدام بيانات ضبابية بطريقة الإمكان الأعظم للمعلمات α وβ في توزيع معكوس ويبل للبيانات ضبابية (4.4501, 0.9071) على التوالي في طريقة الإمكان الأعظم بالفترة الثقة عند معلمتين α وβ [4.3119 , 4.5883] و[0.7446 ,1.0699] على التوالي اما طريقة الإمكان الأعظم النسبية عند معلمتين α وβ (4.4753 , 0.9079) على التوالي في طريقة الإمكان الأعظم النسبية بالفترة الثقة [4.6136 , 4.3370] و [1.0715 , 0.7443] على التوالي ولاحظنا من النتائج بان طريقة الإمكان الأعظم للتقدير بالفترة الثقة تكون اضيق مقارنة من طريقة الإمكان الأعظم النسبية بالفترة الثقة أي ان طول فترة الثقة بطريقة الإمكان الأعظم اقل من طول فترة الثقة بطريقة الإمكان الأعظم النسبية .

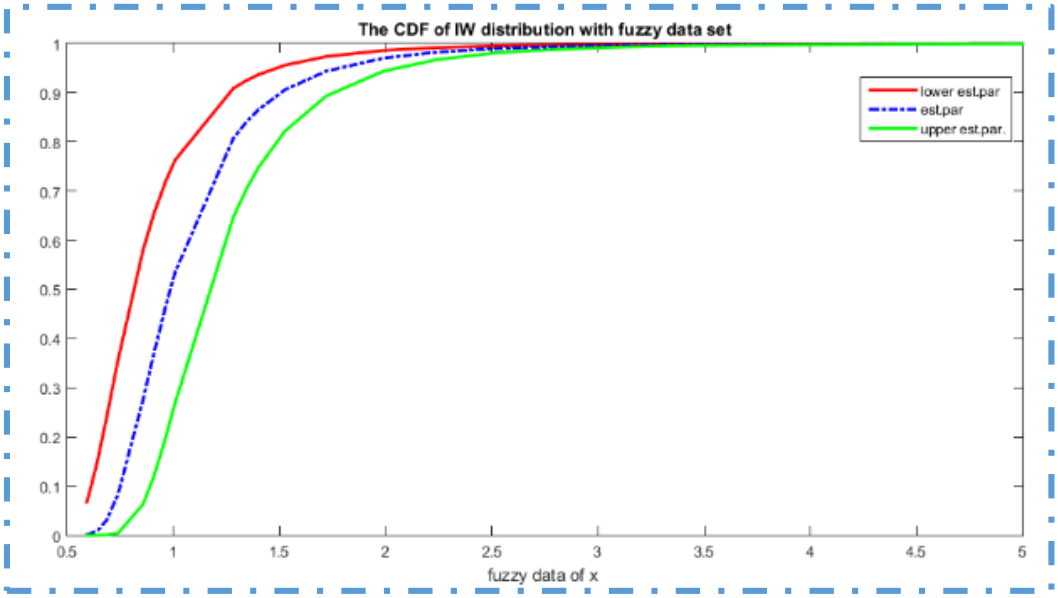




الشكل (2) والشكل (3) دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع معكوس ويبل للبيانات الضبابية والحقيقية

نلاحظ من الشكل أعلاه بان تقدير معلمات توزيع معكوس ويبل للبيانات الضبابية في دالة الاحتمالية تقع بين فترات الثقة للمعلمات المراد تقديرها اما في حالة بيانات حقيقية تقع خارج فترات الثقة للمعلمات المراد تقديرها.





الشكل (4) والشكل (5) دالة التوزيعية التراكمية لتوزيع معكوس ويبل للبيانات الضبابية والحقيقية

نلاحظ من الشكل أعلاه بان تقدير معلمات توزيع معكوس ويبل للبيانات الضبابية في دالة التوزيعية التراكمية تقع بين فترات الثقة للمعلمات المراد تقديرها اما في حالة بيانات حقيقية تقع خارج فترات الثقة للمعلمات المراد تقديرها .

6- الاستنتاجات:

أظهرت نتائج الجانب التطبيقي في هذا البحث ما يلي

1- من الجدول (3) نلاحظ ان معلمات المقدرة لتوزيع معكوس ويبل لبيانات الضبابية كانت أدق من معلمات المقدرة للبيانات الحقيقية .

2- من الجدول (3) نلاحظ ان معلمات المقدرة بالطريقة الإمكان الأعظم افضل من طريقة الإمكان الأعظم النسبية لبيانات الضبابية .

3- من الجدول (4) نلاحظ ان معلمات المقدرة بالفترة بالطريقة الإمكان الأعظم افضل من طريقة الإمكان الأعظم النسبية لبيانات الضبابية .

4- لاحظنا ان الدالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيعية التراكمية لبيانات الضبابية تقع ضمن تقدير بالفترة أي بين حدين اعلى وادنى اما في حالة بيانات الحقيقية تقع خارج تقدير بالفترة .

7- التوصيات:

1-نوصي الباحثين باستخدام توزيعات أخرى وتطبيق على البيانات الضبابية واختيار دوال انتماء ضبابية أخرى .

2-نوصي الباحثين باستعمال طرائق تقدير بالفترة الحديثة والمقترحة لتقدير معلمات بالفترة للتوزيعات الاحتمالية المقترحة.

المصادر:

1- Alkarni, S; Afify, A.Z; Elbatal, l & Elgarhy, M, (2020),” The extended inverse Weibull distribution: properties and applications “, Complexity, page (1-11)

2- Chen, Guanrong & Tat, Trung, (2000),” Introduction to Fuzzy sets, Fuzzy Logis and Fuzzy Control Systems”, Boca Raton London New York Washington, D.C CRC Press

3- Drapella, A, (1993),” The complementary Weibull distribution: unknown or just forgotten ”, Quality and reliability engineering international, 9.4:383-385

4- Hogg, R.V; Mckean, J.W & Graig, A.T, (1978),” Introduction to Mathematical Statistics “, Eighth Edition, Macmillan Publishing Co.In, New

5- Kwang, H.Lee, (2004),” Frist Course on Fuzzy Theory and Applications “, ISSN 16-15-3871, ISBN 3-540-22988-4 Springer, Berlin Heidelberg New York, ppt:1-20

6- Mweleli, R.M; Orawo, L.A; Tamba, C.L & Okenye, J.O, (2020),” Interval Estimation in a Parameter Weibull Distribution Based on Type-2 Censored Data “, Open Journal of Statistics, 10(06), 1039-1056

7- Nájera, E & Bolívar-Cimé, A, (2021),” Comparison of same interval estimation methods for the parameters of the gamma distribution “, Communication in Statistics – Simulation and Computation, 1-17

8- Pak, Abbas, (2016),’’ Inference for the Shape Parameter of Lognormal Distribution in Presence of Fuzzy Data “, Pak.j.stat.oper.res, Vol.XII, No.1, pp.89-99

9- Pak, Abbas; Ali, Gholam & Saraj, Mansour, (2013),” Reliability estimation in Rayleigh distribution based on fuzzy life time data “, Int J Syst Assur Eng Mang, springer, DOI 10.1007/s13198-013-0190-5

10- Remos, P. L; Nascimento, D & Louzada, F, (2017),” The Long Term Fréchet distribution: Estimation, Properties, and its Application “, arXiv preprint arXiv: 1709.07593

11- Torabi, H & Mirhosseini, S.M, (2009),” The Most Powerful Tests for Fuzzy Hypotheses Testing with Vague Data “, Applied Mathematical Sciences, Vol.3, No.33, page (1619-1633)

12- Wu, Hsien-Chung, (2004), ” Fuzzy reliability estimation using Bayesian approach “, Computers & Industrial Engineering, 46, pp 467-493

13- Zadeh, L.A, (1968),” Fuzzy Algorithms“, Information and control, 12, 94, 102

14- Zadeh, L.A, (1965),” Fuzzy Sets “, Information and Control, Department of Electrical Engineering and Electronics Research Laboratory, University of California, Berkeley, California, 8, 338-353