# تقديرات اسلوب (PERT) المعدل
# (مع تطبيق عملي)

أ.م.د. سلمى ثابت
ذاكر الالوسي*

## المقدمة

ان توزيع Beta مفيد ويستخدم لمساحة واسعة للعديد من التطبيقات لانه يزود بعائلة وفيرة من اشكال التوزيع وذلك عندما يكون التوزيع مطلوباً ولفترة محددة، وكذلك فانه قد تم تطبيقه في المحاكاة، كما تم تطبيقه وبشكل واسع في تحليل (PERT) لنموذج متغير فترة النشاط ( Model Variable activity Time) وذلك عندما تكون المعلومات المتوفرة قليلة لتوفيق التوزيع حيث يستعاض عنها بالمعرفة او الخبرة الشخصية للعملية التي هي قيد الدراسة.

بشكل عام في تطبيقات (PERT) فان فترات الانجاز التفاؤلية (Optimistic)، والاكثر احتمالاً (Most Likely)، والتشاؤمية (Pessimistic) [a,m,b] على التوالي تحدد بصورة ذاتية او شخصية وان المقدار $\left(\frac{a+4m+b}{6}\right)$ قد استخدم في تقدير متوسط فترة النشاط.

ان التبرير لأستخدام هذا التقدير كان في الاصل تجريبي او اجرائي (عملي)، حيث ان هذا التبرير قد قام على اساس الاستشهاد البديهي للبرهنة على ان الوزن المضاعف لمركز المدى $\left(\frac{a+b}{2}\right)$، يجب ان يعطى إلى القيمة الاكثر احتمالاً (m) في الشكل او التوزيع والذي ادى إلى الحصول على المتوسط الموزون اعلاه.

ان العجز او النقص في التبرير النظري لعملية التقدير قد انتقدت تماماً من قبل بعض المؤلفين وعلى الاخص (Grubbs)[3]، بالاضافة إلى ذلك وبسبب العجز النظري فانه لم تتم معرفة

* استاذ مساعد / الجامعة المستنصرية / كلية الادارة والاقتصاد / قسم الاحصاء
مقبول للنشر بتاريخ 2006/4/11

ما هي مديات القيم الخاصة بكل من [m,b,a] التي تجعل التقدير ملائماً وصالحاً، وعليه وبالنظر لاهمية هذا الموضوع في المجال (العملي) فقد استهدف هذا البحث عرض ما قام به كلاً من الباحثين (FARNUM) [1] و (STANTON) من ان هنالك اسس او ارضية نظرية لاستخدام هنا التقدير وذلك بالاستناد إلى خصائص توزيع (Beta) ولمدى معين واسع من قيم الشكل أو التوزيع، وعندما تخرج القيم عن هذا المدى فأن هنالك صيغ معدلة مقترحة لوضع التقديرات، مما ينعكس بالتالي في الحصول على نتائج أفضل. وبغية ارساء المضامين المطروحة في هذا البحث عملياً فقد تضمن هذا البحث جانباً تطبيقياً وفق معطيات المنظور الجديد لاسلوب (PERT)حيث تم وضع خطة إنجاز مشروع (العمارات التكميلية للعمارات السكنية في شارع حيفا) والذي ينفد من قبل شركة المنصور للمقاولات الانشائية.

## 1- هدف البحث :

بالنظر لأهمية تحليل (PERT) واستخداماته العملية الواسعة وبغية ارساء منهجية صحيحة لاستخدام هذا التحليل فقد استهدف هذا البحث تسليط الضوء على المنظور المحدث لاسلوب (PERT) والاطار النظري الموضوع له والذي قام به كلا من الباحثين (FARNUM) و (STANTON) سنة (1987)، حيث سيتم بيان أن هنالك ارضية أو اسس نظرية لاستخدام الطريقة العامة لتحليل PERT ولمدى معين من قيم الشكل أو التوزيع حيث سيتم عرض هذا الاثبات أو التبرير الرياضي، الأمر الذي ترتب عليه إمكانية اعطاء قيم تكون بمثابة دليل أو مرشد للاستخدام الملائم للتقدير، كما سيتم عرض الاقتراح في أجراء تعديل في صيغ التقدير والتي من شانها تذليل الصعوبات التي يمكن مواجهتها عندما تكون قيمة الشكل أو التوزيع خارج مدى القيم المعطاة والمشار إليها أعلاه. وبغية ارساء وتعزيز مضامين الإطار النظري المحدث لاسلوب PERT والمنهجية الخاصة به المطروحة في هذا البحث عملياً، فقد اشتمل هذا البحث جانباً تطبيقياً في شركة المنصور للمقاولات لوضع خطة إنجاز المشروع (الأعمال التكميلية للعمارات السكنية في شارع حيفا).

## 2- الطريقة العامة لتحليل بيرت (Common Procedure)

في هذا المبحث سوف نعرض نبذة موجزة عن الطريقة الشائعة المالوفة لاستخدام تحليل PERT وكما يلي :

عادة ما تكون هنالك شكوك تستحق الاهتمام حول الفترة المطلوبة لانجاز كل نشاط في المشروع، وفي الحقيقة إنها متغير (عشوائي) ذو توزيع احتمالي معين، وان التسليم بهذا يتطلب وضع ثلاثة اشكال مختلفة من التقديرات (لفترة) إنجاز النشاط وذلك للحصول على المعلومات الأساسية حول توزيعها الاحتمالي، حيث أن توفر مثل هذه المعلومات بالنسبة لكافة فترات إنجاز الانشطة التي يشتمل عليها المشروع يعمل على إمكانية وضع تقدير لاحتمال إنجاز المشروع وفق البيانات المجدولة. أن التقديرات الثلاثة التي تستخدم في PERT لكل نشاط هي التقدير (التفاؤلي) والتي هي فترة محتملة ولكن ليست الأكثر احتمالاً وذلك عندما يكون كل شيء على ما يرام واحصائياً فانه يمثل تقدير الحد الأدنى (Lower Bound) للتوزيع الاحتمالي لفترة إنجاز النشاط وليكن (a) ، والتقدير (الأكثر احتمالاً) والذي يعني التقدير الأكثر واقعية لفترة إنجاز النشاط احصائيا فانه يمثل تقدير المنوال (أعلى نقطة) للتوزيع الاحتمالي لفترة إنجاز النشاط وليكن (m) ، أما التقدير التشاؤمي فهي فترة محتملة وكل ليست الاكثر احتمالاً إذا كان كل شيء يسير بشكل سيء واحصائياً فانه يمثل تقدير الحد الاعلى في التوزيع الاحتمالي وليكن (b). ولايجاد تقديرات القيمة المتوقعة والتباين في ضوء (b,m,a) وضعت فرضيتان الأولى هي أن الانحراف المعياري $(\sigma)$ يمثل $\frac{1}{6}$ قيمة المدى للفترة المنطقية اللازمة لانجاز النشاط أي أن:

$$\sigma^2 = \left[\frac{1}{6}(b-a)\right]^2$$

حيث أن $\sigma^2$ يمثل التقدير المطلوب للتباين، أن التفسير الموضوع لهذه الفرضية هو أن اطراف (tails) الكثير من التوزيعات الاحتمالية (مثل التوزيع الطبيعي) قد اعتبرت على إنها تقع بحوالي (3) انحرافات معيارية عن المتوسط وعليه سيكون هنالك امتداد بحوالي (6) انحرافات معيارية ما بين طرفي التوزيع.

وللحصول على تقدير للقيمة المتوقعة فقد تم افتراض أن التوزيع الاحتمالي لفترة إنجاز النشاط يكون تقريباً (Beta) حيث أن المنوال هو (m) والطرف الأدنى (a) والطرف الاعلى (b) وان الانحراف المعياري يساوي $\frac{b-a}{6}$ ، وعليه يمكن الاستنتاج بان القيمة المتوقعة للتوزيع $(\hat{\mu})$ تكون تقريباً وفق الصيغة آلاتية:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{3}\left[2m + \frac{1}{2}(a+b)\right]$$

والتي تمثل تقدير القيمة المتوقعة لفترة إنجاز النشاط المطلوبة، ويلاحظ أن مركز المدى $\left(\frac{a+b}{2}\right)$ يقع في منتصف المسافة بين a و b ولكي يكون $(\hat{\mu})$ الوسط الحسابي الموزون (للمنوال، ومركز المدى) فان المنوال قد اعطي $\frac{2}{3}$ من الوزن الصحيح.

بعد احتساب التقدير للقيمة المتوقعة والتباين لفترة إنجاز النشاط في المشروع تكون هنالك حاجة لثلاثة فرضيات اضافية حتى يكون بالامكان احتساب الاحتمال الخاص بانجاز المشروع وفق الجدولة الموضوعة.

الأولى هي أن فترات إنجاز الانشطة مستقلة احصائياً، والثانية أن المسار الحرج (بدلالة الفترات المتوقعة) يتطلب دائماً اطول مجموع لفترات الانجاز من أي مسار آخر، والنتيجة الضمنية لهذه الفرضيات هي أن القيمة المتوقعة والتباين (لفترة المشروع) ما هي إلا مجموع القيم المتوقعة، والتباينات (على التوالي) لفترات إنجاز انشطة المشروع على المسار الحرج.

أما الفرضية الثالثة فهي أن (فترة المشروع) تكون ذات توزيع طبيعي والتفسير المنطقي لهذه الفرضية هي أن (فترة المشروع) ما هي إلا مجموع للعديد من المتغيرات العشوائية المستقلة، وفي ضوء المفهوم الخاص بنظرية الحد المركز (C.L.T) فان هذا المجموع يكون تقريباً ذو توزيع طبيعي.

## 3- الأسس النظرية لتحليل PERT بالاثبات الرياضي

في هذا المبحث سوف يتم عرض التبرير أو الاثبات الرياضي على أن هنالك ارضية أو اسس نظرية لاستخدام الطريقة العامة لتحليل PERT وذلك بالاستناد على توزيع Beta ولمدى معين من قيم الشكل أو التوزيع، كما سيتم اعطاء قيم تكون بمثابة دليل أو مرشد للاستخدام الملائم للتقدير، كما سيتم عرض صيغ معدلة مقترحة لوضع التقديرات وذلك عندما تكون قيمة التوزيع أو الشكل خارج مدى القيم المعطاة مع بيان الاجراء الرياضي لعملية التعديل هذه، كل ذلك سيتم بيانه في آلاتي:

أن الصيغة العامة لدالة الكثافة لتوزيع Beta هي:

$$f_Y(Y) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma_{(\alpha)} \cdot \Gamma_{(\beta)}} \cdot \frac{(Y-a)^{\alpha-1}(b-Y)^{\beta-1}}{(b-a)^{\alpha+\beta-1}} \qquad \ldots(1)$$

$$a < Y < b \ , \ \alpha, \beta > 0$$

وفي اغلب التطبيقات عندما تكون (a) و (b) معروفة (أو محدد بصورة ذاتية أو باجتهاد شخصي)، هنالك تحويل خطي بسيط هو:

$$X = \frac{Y - a}{b - a} \qquad \ldots(2)$$

والذي يعطي صيغة قياسية أكثر وكما مبينة في ادناه:

$$f_x(x) = \frac{\mathrm{M}(\alpha + \beta)}{\mathrm{M}_{(\alpha)}.\mathrm{M}_{(\beta)}} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \qquad \ldots(3)$$

$$0 < x < 1 \ , \ \alpha, \beta > 0$$

حيث سيتم اعتماد هذه الصيغة في هذا البحث.

ولابد من الإشارة إلى انه عندما تتم عملية التحويل فان القيم $a, b, m_Y, \mu_Y, \sigma_Y^2, m_x, \mu_x, \sigma_x^2$ تكون مترابطة بالشكل آلاتي :

$$m_x = \frac{(m_Y - a)}{b - a}$$

$$\mu_x = \frac{(\mu_Y - a)}{b - a}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{\sigma_Y^2}{(b-a)^2}$$

وعليه فان:

$$m_Y = a + m_x(b - a)$$

$$\mu_Y = a + \mu_x(b - a)$$

$$\sigma_Y^2 = (b-a)^2.\sigma_x^2$$

كما أن الوسط الحسابي، والتباين، والمنوال للتوزيع القياسي معادلة (3) كما مبين ادناه:

$$\mu_x = \mu_x(\alpha, \beta) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \qquad \ldots(4)$$

$$\sigma_x^2 = \sigma_x^2(\alpha, \beta) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} \qquad \ldots(5)$$

$$m_x = m_x(\alpha, \beta) = \frac{\alpha - 1}{\alpha + \beta - 2} \quad if \ \alpha, \beta > 2 \qquad \ldots(6)$$

في تحليل PERT وفي ضوء الصيغة القياسية (3) فان القيمة الأكثر احتمالاً في التوزيع $\hat{m}_x$ تؤخذ من الخبرة الشخصية للمحلل حيث يتم تحويلها إلى $\hat{\mu}_x$ الذي يمثل تقدير المتوسط وذلك باستخدام العلاقة المبينة ادناه:

$$\hat{\mu}_x = \frac{4\,\hat{m}_x + 1}{6} \qquad \ldots(7)$$

أن هذه العلاقة التي تم تحديدها وفق أسلوب (بيرت) يكتنفها شيء من الغموض حيث أن الأساس النظري لها غير واضح. أما الانحراف المعياري $\sigma_x$ فانه وبالمشابهة مع التوزيع الطبيعي قد افترض على انه $\frac{1}{6}$ من المدى وعليه فان:

$$\hat{\sigma}_x = \frac{1}{6} \qquad \ldots(8)$$

أن هذه التقديرات تحول إلى $\hat{\mu}_Y$ و $\hat{\sigma}_Y$ تم تستخدم فيما بعد في إنجاز تحليل بيرت.

في الواقع أن كلا هذين التقديرين هما تقديران خام (Rough) وكانا عرضة لانتقادات كبيرة. أن معادلة (8) يمكن أن تبرر إذا كان من المعقول الاعتقاد بان a و b فترتي النشاط التفاؤلية والتشاؤمية لاتكون بمواضع بعيدة جداً إلى الخارج في اطراف التوزيع.

ولبيان أن معادلة (7) قد نتجت بصورة تقريبية من معادلة (8) و (4) ولمدى واسع من قيم $(m_x)$ لابد من الإشارة إلى ما يلي:

1- في ضوء معادلة (8) فان $\sigma_x$ لايتاثر كثيراً بقيمة $\alpha$ و $\beta$ وعليه فان:

$$\sigma_x(\alpha,\beta) \cong \sigma_x(\alpha-1,\beta-1)$$

وهذا يعني :

$$\sigma_x(\alpha-1,\beta-1) \cong \sigma_x(\alpha,\beta) \cong \frac{1}{6} \qquad \ldots(9)$$

2- بالإضافة إلى ذلك، من معادلة (4) ومعادلة (6) ، متوسط توزيع Beta بالمعلمات $(\alpha-1)$ و $(\beta-1)$ هو مماثل إلى المنوال للتوزيع بالمعلمات $\alpha$ و $\beta$ وهذا يعني:

$$\mu_x(\alpha-1,\beta-1) = m_x(\alpha,\beta) \qquad ;\alpha,\beta > 2 \qquad \ldots(10)$$

3- ومن الممكن ايضاً بيان أن:

$$\alpha = \left[\frac{\mu_x(1-\mu_x)}{\sigma_x^2} - 1\right]\mu_x \qquad \ldots(11)$$

$$\beta = \left[\frac{\mu_x(1-\mu_x)}{\sigma_x^2} - 1\right](1-\mu_x) \qquad \ldots(12)$$

ومن معادلة (10) و (11) و (12) فان :

$$(\alpha - 1) = \left[\frac{m_x(1-m_x)}{\sigma_x^2(\alpha-1,\beta-1)} - 1\right](m_x) \qquad \ldots(13)$$

$$(\beta - 1) = \left[\frac{m_x(1-m_x)}{\sigma_x^2(\alpha-1,\beta-1)}\right](1-m_x) \qquad \ldots(14)$$

وفي ضوء معادلة (9) حيث أن $\sigma_x(\alpha-1,\beta-1) \cong \frac{1}{6}$ فان معادلة (13) و (14) قد تم حلها بالنسبة إلى $\alpha$ و $\beta$ ثم عوضت في معادلة (4) حيث تم الحصول على:

$$\mu_x = \frac{(36m_x^2+1)(1-m_x)}{(36m_x+1)(1-m_x)+m_x} \qquad \ldots(15)$$

وبهدف مقارنة المعادلة (15) التي تم استخراجها أعلاه مع المعادلة (7) الموضوعة وفق مفهوم تحليل PERT، تم تنفيذ العرض البياني شكل (1) وذلك باعتماد المعادلتين (15) و (7) في استخراج قيمة $\mu_x$ .

ومن ملاحظة الشكل (1) نجد أن معادلة (7) متطابقة تقريباً مع معادلة (15) وذلك عندما تكون قيمة المنوال $(m_x)$ ما بين 0.13 و 0.87 أو بصورة عامة عندما:

$$a+0.13(b-a)<\mu_Y<b-0.13(b-a)$$

أن وقوع المنوالات خارج هذا المدى يحدث عندما تكون فترة النشاط الاكثر احتمالاً قريبة جداً إلى واحد من فترتي النشاط المتطرفة (التشاؤمية أو التفاؤلية) ، وهذا يحدث عملياً وعلى سبيل المثال عندما يكون من الصعب تحديد فترة النشاط التشاؤمية حيث توضع بشكل كبير. في مثل هذه الحالات أو الظروف فان التقدير وفق الطريقة التقليدية لتحليل PERT يصبح ضعيف وذلك لان الانحراف المعياري الحقيقي سوق يكون ولدرجة كبيرة اصغر من $\frac{1}{6}$ وعل هذا الأساس فان التقدير للانحراف المعياري وفق معادلة (9) سيكون ضعيف ولايمكن اعتماده، ولابد من تعديله بغية الحصول على تقديرات أفضل.

أن عملية التعديل يمكن الحصول عليها إذا ما سلمنا بان حجم $\sigma_x(\alpha-1,\beta-1)$ مقيد بقيمة المنوال وهذا يعني [ وفي ضوء معادلة 13 و 14] أن:

$$\sigma_x^2(\alpha-1,\beta-1)=\frac{m_x^2(1-m_x)}{(\alpha-1)+m_x}=\frac{m_x(1-m_x)^2}{(\beta-1)+(1-m_x)} \qquad \ldots(16)$$

$$\alpha,\beta>2$$

وعليه فان الحد الاعلى لـ $\sigma^2{}_x(\alpha-1,\beta-1)$ يمكن ايجاده بتعويض $\alpha=2$ في الجزء الوسطي من معادلة (16) أو $\beta=2$ في الجزء الايمن من هذه المعادلة، حيث يتم الحصول على آلاتي:

$$\sigma_x^2(\alpha-1,\beta-1)\le\min\left[\frac{m_x^2(1-m_x)}{(1+m_x)},\frac{m_x(1-m_x)^2}{(2-m_x)}\right]\le\min[\beta_L,\beta_U] \quad \ldots(17)$$

فعندما تكون $m_x<0.5$ فان $B_L$ تكون هي الأقل في معادلة (17).

وعندما تكون $m_x>0.5$ فان $B_U$ تكون هي الأقل في معادلة (17).

فاذا ما عوضت $(\hat{m}_x)$ في معادلة (17) يمكن الحصول على المقدار $\hat{\sigma}_x(\alpha-1,\beta-1)$ الذي يعوض في معادلة (13) و (14) ، حيث يتم الحصول على تقديرات $\alpha$ و $\beta$ والتي تعوض هي الأخرى في معادلة (4) والتي تعطي تقديرات أفضل إلى $\mu_X$ و $\sigma_X$ وذلك ضمن المدى $\hat{\mu}_x<0.13$ و $\hat{\mu}_x>0.87$ .

مما تقدم أعلاه يمكن وضع الجدول آلاتي الذي يعتبر مرشد أو دليل إلى كيفية الاستخدام الافضل لاسلوب PERT في ضوء المديات الموضوعة، والمعادلات المقترحة للتقدير في حالة الخروج عن هذه المديات:

* if $0.13 \le \hat{m}_x \le 0.87$ , $\hat{\mu}_x = \dfrac{(4\hat{m}_x + 1)}{6}$ …(18)

$$\hat{\sigma}_x = \frac{1}{6}$$

* if $\hat{m}_x < 0.13$ , $\hat{\mu}_x = 2 \Big/ \left( 2 + \dfrac{1}{\hat{m}_x} \right)$ …(19)

$$\hat{\sigma}_x = \left[ \hat{m}_x^2 (1 - \hat{m}_x) \big/ (1 + \hat{m}_x) \right]^{\frac{1}{2}}$$

* if $\hat{m}_x > 0.87$ , $\hat{\mu}_x = \dfrac{1}{(3 - 2\hat{m}_x)}$

$$\hat{\sigma}_x = \left[ \hat{m}_x (1 - \hat{m}_x)^2 \big/ (2 - \hat{m}_x) \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{…(20)}$$

فعندما تكون قيمة المنوال ضمن المدى $0.13 \le m_x \le 0.87$ فان أسلوب PERT التقليدي المألوف لتقدير $\hat{\mu}_x$ و $\sigma_x$ والممثلة في معادلات (18) تكون مناسبة وملائمة ويمكن الاعتماد عليها، وذلك لان العلاقة المقترحة في هذا الأسلوب بين المنوال والوسط الحسابي تكون قريبة جداً للعلاقة الحقيقية بينهما في توزيع Beta.

ويصبح أسلوب PERT التقليدي في تقدير $\hat{\mu}_x$ و $\hat{\sigma}_x$ عبر المعادلات (18) غير مناسب وضعيف ولايعتمد، عندما تخرج قيمة المنوال عن المدى حيث تكون أما $m_x < 0.13$ أو تكون $m_x > 0.87$ وعليه فان المعادلات (19)، (20) قد تم اشتقاقها واقتراحها كأسلوب بديل للتقدير يمكن أن يعطي نتائج أفضل واكثر ملائمة من أسلوب PERT التقليدي.

## الجانب العملي

لقد تم تطبيق أسلوب PERT المعدل لتقدير القيمة المتوقعة والانحراف المعياري ، لفترة إنجاز كل مرحلة من مراحل المشروع الخاص "بالاعمال التكميلية للعمارات السكنية لشارع حيفا" من قبل شركة المنصور للمقاولات، حيث تضمن هذا المشروع (13) مرحلة تم وضع التقديرات الشخصية الثلاثة (التفاؤلية، الأكثر احتمالاً، التشاؤمية) لكل منها وكما هي موضحة في جدول (1).

جدول (1)

مراحل "مشروع الأعمال التكميلية للعمارات السكنية في شارع حيفا" مع التقديرات الشخصية الثلاثة (وبالأشهر)

| المرحلة | التقديرات | | |
|---|---|---|---|
| | الأكثر احتمالاً | التشاؤمية | التفاؤلية |
| 1-البناء بالطابوق للطوابق | 4.5 | 8 | 4.05 |
| 2-اعمال التكسير | 1.5 | 1.575 | 1.425 |
| 3-صب البيجات | 1 | 2 | 0.9 |
| 4-زرع قضبان التسليح | 0.75 | 1.25 | 0.675 |
| 5-تركيب القطع الجاهزة | 2 | 4 | 1.8 |
| 6-اعمال كونكريت الأعمدة والجدران | 2 | 4 | 1.8 |
| 7-اعمال كونكريت السقف الاخير | 2 | 2.4 | 1.8 |
| 8-اعمال كونكريت البيتونة | 1 | 1.2 | 0.9 |
| 9-اعمال كونكريت السلالم | 1 | 1.2 | 0.9 |
| 10-الأعمال الكهربائية والصحية | 12 | 16 | 8.4 |
| 11-الصبغ الداخلي | 2.5 | 3.5 | 2 |
| 12-اللبخ الخارجي والطلي | 3 | 4.5 | 2.4 |
| 13-تراكيب كهربائية وصحية | 1.5 | 1.65 | 1.35 |

وقد تم تطبيق أسلوب (PERT) المعدل، وأسلوب (PERT) التقليدي لتقدير القيمة المتوقعة لفترة إنجاز كل مرحلة $(\hat{\mu}_Y)$ والانحراف المعياري لها $\hat{\sigma}_Y$ ، وكما مبين في جدول (2).

وفي ضوء قيم جدول (2) نرى أن تقديرات (PERT) المعدل، والتقليدي متطابقة تماماً عندما تكون $\hat{m}_x$ ضمن المدى $0.13 \le \hat{m}_x \le 0.87$ وذلك بالنسبة $\hat{\mu}_y$ ، $\hat{\sigma}_Y$، ولكن نجد أن أسلوب PERT المعدل لايتطابق مع أسلوب PERT التقليدي عندما تخرج $\hat{m}_x$ عن المدى المذكور أعلاه حيث نجد أن الأسلوب التقليدي يعطي تقديرات (أعلى) من تقديرات الأسلوب المعدل

**وخاصة بالنسبة $\hat{\sigma}_Y$ حيث نجد إنها اكبر وبشكل واضح بالنسبة للمراحل (1) ، (3) ، (5) ، (6) وهذا ما يشير وبوضوح إلى أن ما ورد نظرياً بالنسبة لأسلوب PERT المعدل قد انعكس تماماً عملياً وهذا ما يؤكد ملائمة أسلوب PERT المعدل إمكانية اعتماده.**

**جدول (2)**

**تقدير القيمة المتوقعة $\hat{\mu}_Y$ والانحراف المعياري $\hat{\sigma}_Y$ لكل مرحلة باستخدام PERT المعدل والتقليدي**

| المـ . . . رحلة | $\hat{m}_X$ | $\hat{\mu}_X$ | تقدير . رات PERT المعدل | | تقدير . رات PERT التقليدي | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $\hat{\mu}_Y$ | $\hat{\sigma}_Y$ | $\hat{\mu}_Y$ | $\hat{\sigma}_Y$ |
| 1-البناء بالطابوق للطوابق * | 0.113924 | 0.1855669 | 4.7829892 | 0.4013421 | 5.00833 | 0.658333 |
| 2-اعمال التكسير | 0.5 | 0.5 | 1.5 | 0.025 | 1.5 | 0.025 |
| 3-صب البيجات * | 0.0909 | 0.1538331 | 1.0692164 | 0.091278 | 1.15 | 0.183333 |
| 4-زرع قضبان التسليح | 0.13043 | 0.2536231 | 0.820833 | 0.095833 | 0.8208333 | 0.095833 |
| 5-تركيب القطع الجاهزة * | 0.0909 | 0.1538331 | 2.1384328 | 0.1825562 | 2.3 | 0.36666 |
| 6-اعمال كونكريت الأعمدة والجدران * | 0.0909 | 0.1538331 | 2.1384328 | 0.1825562 | 2.3 | 0.36666 |
| 7-اعمال كونكريت السقف الاخير | 0.3333 | 0.388888 | 2.03333 | 0.1 | 2.03333 | 0.1 |
| 8-اعمال كونكريت البيتونة | 0.3333 | 0.388888 | 1.016666 | 0.05 | 1.016666 | 0.05 |
| 9-اعمال كونكريت السلالم | 0.3333 | 0.388888 | 1.016666 | 0.05 | 1.016666 | 0.05 |
| 10-الأعمال الكهربائية والصحية | 0.4736 | 0.4824561 | 12.06666 | 1.26666 | 12.06666 | 1.26666 |
| 11-الصبغ الداخلي | 0.3333 | 0.388888 | 2.583333 | 0.25 | 2.583333 | 0.25 |
| 12-اللبخ الخارجي والطلي | 0.2857142 | 0.3571428 | 3.1499999 | 0.35 | 3.15 | 0.35 |
| 13-تراكيب كهربائية وصحية | 0.5 | 0.5 | 1.5 | 0.05 | 1.5 | 0.05 |

## الاستنتاجات والتوصيات

**1- أن الطريقة الشائعة في استخدام التقدير الشخصي لمتوسط توزيع Beta والمتمثلة في أسلوب PERT التقليدي المعروف، تكون صائبة وملائمة ولمدى واسع من قيم التوزيع أو الشكل، وذلك لانه ضمن هذا المدى يكون المتوسط الموزون والممثل بالمعادلة $\mu_Y = (a + 4m + b)/6$ يكون متطابق تقريباً مع العلاقة الحقيقية ما بين الوسط الحسابي والمنوال في توزيع Beta.**

**2- أن أسلوب PERT يخفق في وضع التقديرات عندما يكون المنوال خارج الفترة $[a + 0.13(b-a) to\ 0.87(b-a)]$ وهذا يحصل عندما يكون الانحراف المعياري اصغر بكثير من $\frac{b-a}{6}$، وعليه فان الصيغ المعدلة لتقدير الانحراف المعياري $\hat{\sigma}_Y$ الذي هو ادنى من $\frac{b-a}{6}$، وكذلك لتقدير $\hat{\mu}_Y$ قد عملت على تحسين دقة التقديرات وتهيئة نتائج تحليلية أفضل عندما يكون المنوال قريب من الحدود العليا أو الدنيا للتوزيع.**

**3- أن التطبيق العملي قد اكد وبشكل واضح أن كل ما ورد نظرياً بالنسبة لأسلوب PERT المعدل قد انعكس تماماً عملياً وهذا ما يؤكد ملائمة وفاعلية هذا التعديل وامكانية اعتماده.**

## المصـــــادر

**1- Nicholas R. Farnum and Laverne W.Stauton California State University, Fullerton Journal of the Operational Research Vol.(38) ,1987.**

**2- H.A. Taha (1982) Operation Research , 3rd ,p.472 Macmillan New York.**

**3- F.E Grubbs (1962) Attempts to Validate Certain PERT Statistics Opns Res 10.**

……

……

……