تحديد الكلفة الكلية المثلى والمدة الزمنية المثلى لتعزيز كمية الخزين المثلى عند وجود عامل مخاطرة مسموح به للدفعات المتأخرة

م.سرمد علوان صالح محمد*

المستخلص

الفكرة من البحث يكمن في إيجاد السياسة المثلى لنماذج الخزين المحددة بوجود عامل المخاطرة عندما يكون الطلب مضطرب مما يجعل عملية اتخاذ القرار من المكمن السيطرة عليها وذلك بجعل التكاليف الكلية أقل ما يمكن ، مما يتطلب الأمر من دراسة حالتين ، الأولى عندما تكون المدة الزمنية أطول من المدة الزمنية المسموح بها والأخرى بالعكس .

المفاتيح الأساسية:

كمية تعزيز الخزين ، عامل المخاطرة ،دالة الطلب المضطرب

Abstract

The idea of this paper to delovping optimal Replinshment policy for inventory model availability hazard factor with ramp demand,suppose that two cases first when length cycle time greater than permissible delay period and vice-versa , so that easy of decission making process to minimization costs

Keyword:

Replenishment policy, Hazard factor, Ramp-type demand

1- الجانب النظري

1-1 الافتراضات Assumptions

أ- كمية العجز (Shortage) غير مسموح بها

ب- فترة الانتظار (Lead time) هي كمية صفرية

ت- طول المدة الزمنية هي كمية متغيرة مستمرة

ث- دالة الطلب من النوع المضطرب (Ramp-type demand) وتحسب كالأتي

$$f(t) = Do[t - (t-\mu)H(t-\mu)]; Do > 0$$

علماً أن H(t-μ) تُعرف بدالة هيفيسايدس وهي كالأتي

$$H(t-\mu) = \begin{bmatrix} 1 & \text{if } t \geq \mu \\ 0 & \text{if } \mu > t \end{bmatrix}$$

2-1 تعاريف Definitions

C : تمثل كلفة شراء الوحدة الواحدة

C_1 : تمثل كلفة الاحتفاظ بالخزين

C_3 : تمثل كلفة تعزيز الخزين (RC)

I_e : تمثل الفائدة المكتسبة للوحدة الواحدة

I_c : تمثل كلفة الدفعة الإنتاجية

---

* جامعة بغداد / كلية الادارة والاقتصاد .

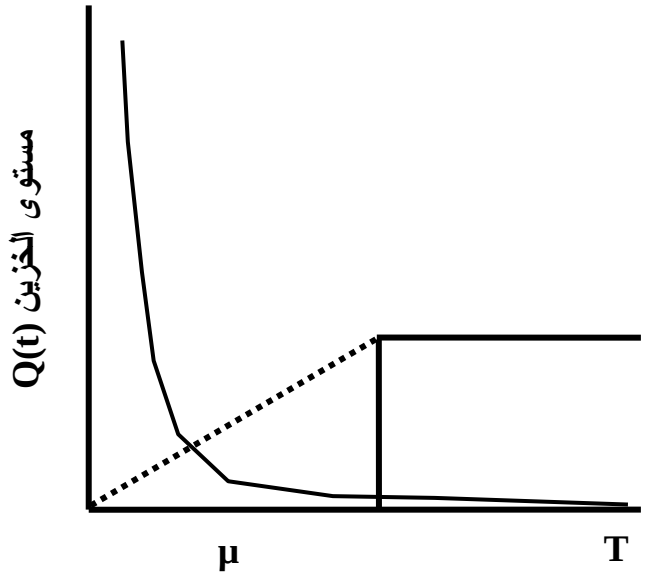
مقبول للنشر بتأريخ 2013/6/19

T : تمثل المدة الزمنية بين طلبيتين متتاليتين
μ : الفترة المدة الزمنية للتأخير المسموح به لتسوية الحسابات في وحدات الوقت
θ: ثابت المخاطرة وتتراوح قيمته بين الصفر والواحد
Do: كمية الطلب الثابتة

3-1 بناء الأنموذج Model Formulation

من أجل تطوير الأنموذج الرياضي ، يجب الأخذ بنظر الاعتبار ما يلي

أولاً: في حالة (μ < T) : وكما في الشكل رقم (1) أدناه



شكل رقم (1)
يبين أن (μ < T)

وعلى افتراض أن Q(t) تمثل مستوى الخزين لأي نظام مخزني وللفترة (t) وأن (0≤t≤T) ، وعليه فأن الانخفاض (Deplotion) في الطلب والمخاطرة سيتحقق في المعادلة التفاضلية[3] رقم (1) و (2)بصورة متناوبة وكالأتي

$$\frac{\partial Q(t)}{\partial t} + \theta Q(t) = -D_o t \qquad 0 \le t \le \mu \ .....(1)$$

$$\frac{\partial Q(t)}{\partial t} + \theta Q(t) = -D_o \mu \qquad \mu \le t \le T \ .....(2)$$

بشرط أن

$$Q(0) = Q_0 \ \ \& \ \ Q(T) = 0 \ .....(3)$$

إذ أن Q_0 تمثل كمية الخزين المطلوبة ، وبحل المعادلتين (1) و (2) وطبقاً للشرط (3) نحصل على

$$Q(t) = \begin{cases} Q_o e^{-\theta t} - \dfrac{D_o}{\theta^2}(e^{-\theta t} - 1) - \dfrac{D_o t}{\theta} & 0 \le t \le \mu .....(4) \\ \dfrac{D_o \mu}{\theta}(e^{\theta(T-t)} - 1) & \mu \le t \le T .....(5) \end{cases}$$

وبحل المعادلتين (3) و (4) وبالتعويض عن قيمة t=μ وكالأتي

$$Qo\, e^{-\theta\mu} - \frac{Do}{\theta^2}(e^{-\theta\mu} - 1) - \frac{Do\,\mu}{\theta} = \frac{Do\,\mu}{\theta}(e^{\theta(T-\mu)} - 1)$$

نحصل على

$$Qo = \frac{Do\,\mu}{\theta} e^{\theta T} + \frac{Do}{\theta^2}(1 - e^{\theta\mu}) \ldots\ldots\ldots(6)$$

أما الكلفة الكلية لنظام الخزين فإنها تتكون من عدة عناصر

I. الفائدة المكتسبة الكلية خلال دورة زمنية معينة ، ورياضياً

$$TIe = Ie \int_0^{\mu} CDo\,t\,dt = CDoIe \int_0^{\mu} t\,dt$$

وبعد إجراء التكامل المحدد نحصل على

$$TIe = \frac{CDoIe\ \mu^2}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

II. الكلفة الكلية للدفعات خلال دورة زمنية معينة ، ورياضياً

$$TIc = Ic \int_{\mu}^{T} CQ(t)dt = \frac{\mu CDoIc}{\theta} \int_{\mu}^{T} (e^{\theta(T-t)} - 1)dt$$

وبعد إجراء التكامل المحدد نحصل على

$$TIc = \frac{\mu CDoIc}{\theta} \left\{ \frac{1}{\theta}(e^{\theta(T-\mu)} - 1) - (T - \mu) \right\} \ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

III. كلفة الاحتفاظ بالخزين الكلية ، ورياضياً

$$TC_1 = C_1 \int_0^{T} Q(t)\,dt = C_1 \left\{ \int_0^{\mu} Q(t)dt + \int_{\mu}^{T} Q(t)dt \right\}$$

$$TC_1 = C_1 \left\{ \int_0^{\mu} \left(Q_o e^{-\theta t} - \frac{D_o}{\theta^2}(e^{-\theta t} - 1) - \frac{D_o t}{\theta} \right) dt + \int_{\mu}^{T} \left(\frac{D_o \mu}{\theta}(e^{\theta(T-t)} - 1) \right) dt \right\}$$

وبعد إجراء التكامل المحدد للحد الأول وكالاتي

$$\int_0^{\mu} Q(t)dt = \int_0^{\mu} \left(Q_o e^{-\theta t} - \frac{D_o}{\theta^2}(e^{-\theta t} - 1) - \frac{D_o t}{\theta} \right) dt$$

$$\int_0^{\mu} Q(t)dt = Qo \int_0^{\mu} e^{-\theta t}\,dt - \frac{Do}{\theta^2}\left(\int_0^{\mu} e^{-\theta t}dt - \int_0^{\mu} dt \right) - \frac{Do}{\theta} \int_0^{\mu} t\,dt$$

$$\int_0^{\mu} Q(t)dt = \frac{Qo}{\theta}(1 - e^{-\theta\mu}) - \frac{Do}{2\theta}\mu^2 + \frac{Do}{\theta^2}\mu - \frac{Do}{\theta^3}(1 - e^{-\theta\mu})$$

$$\int_0^{\mu} Q(t)dt = \frac{1}{\theta}(1 - e^{-\theta\mu})\left(Qo - \frac{Do}{\theta^2} \right) - \frac{Do}{2\theta}\mu^2 + \frac{Do}{\theta^2}\mu$$

والتعويض عن قيمة Q_0 نحصل على

$$\int_0^{\mu} Q(t)dt = \frac{1}{\theta}(1 - e^{-\theta\mu})\left(\frac{Do\,\mu}{\theta} e^{\theta T} + \frac{Do}{\theta^2}(1 - e^{\theta\mu}) - \frac{Do}{\theta^2} \right) - \frac{Do}{2\theta}\mu^2 + \frac{Do}{\theta^2}\mu$$

$$\int_0^{\mu} Q(t)dt = \frac{1}{\theta}(1 - e^{-\theta\mu})\left(\frac{Do\,\mu}{\theta} e^{\theta T} + \frac{Do}{\theta^2} e^{\theta\mu} \right) - \frac{Do}{2\theta}\mu^2 + \frac{Do}{\theta^2}\mu$$

أما فيما يخص تكامل الحد الثاني فانه

$$\int_{\mu}^{T} Q(t)dt = \int_{\mu}^{T}\left(\frac{D_o \mu}{\theta}(e^{\theta(T-t)} - 1)\right)dt$$

$$\int_{\mu}^{T} Q(t)dt = \frac{Do\mu}{\theta^2}(1 - e^{\theta(T-\mu)}) + \frac{Do\mu}{\theta}(\mu - T)$$

وبالتعويض عن الحد الأول والثاني للتكامل المحدد نحصل على

$$TC_1 = \frac{\mu Do C_1}{\theta}\left\{\frac{Do}{\mu\theta^2}\left(1 - e^{\theta\mu}\right) + \frac{e^{\theta T}}{\theta} + \left(\frac{\mu}{2} - T\right)\right\} \quad \text{.....(9)}$$

IV. عدد وحدات المخاطرة D(T) خلال دورة زمنية معينة ، ورياضياً

$$D(T) = Qo - \left\{\int_{0}^{\mu} Do\, t\, dt + \int_{\mu}^{T} Do\, \mu\, dt\right\}$$

$$D(T) = Qo - \frac{\mu^2 Do}{\theta} - \mu Do(\mu - T)$$

والتعويض عن قيمة Q_0 نحصل على

$$D(T) = \frac{Do\,\mu}{\theta}e^{\theta T} - \frac{Do}{\theta^2}\left(e^{\theta\mu} - 1\right) - \frac{\mu^2 Do}{\theta} - \mu Do(\mu - T)$$

$$D(T) = \frac{Do\,\mu}{\theta}e^{\theta T} - \frac{Do}{\theta^2}\left(e^{\theta\mu} - 1\right) - Do\,\mu\left(T - \frac{\mu}{2}\right)$$

أما كلفة المخاطرة تتحقق عندما $D(T)=CD(T)$ وعليه فان كلفة المخاطرة تصبح بالشكل الأتي

$$CD(T) = \frac{CDo\,\mu}{\theta}e^{\theta T} - \frac{CDo}{\theta^2}\left(e^{\theta\mu} - 1\right) - CDo\,\mu\left(T - \frac{\mu}{2}\right) \quad \text{.....(10)}$$

V. كلفة تعزيز الخزين (RC) وهي تمثل

$$RC = C_3 \quad \text{.....(11)}$$

وعليه فان الكلفة الكلية للخزين $\Psi_1(T)$ ولأي مدة زمنية نجدها من خلال تعويض المعادلات من (7) إلى (11) مقسومة على (T) وكالأتي

$$\Psi_1(T) = \frac{1}{T}(TIc + TC_1 + CD(T) + C_3 - TIe) \quad \text{.....(12)}$$

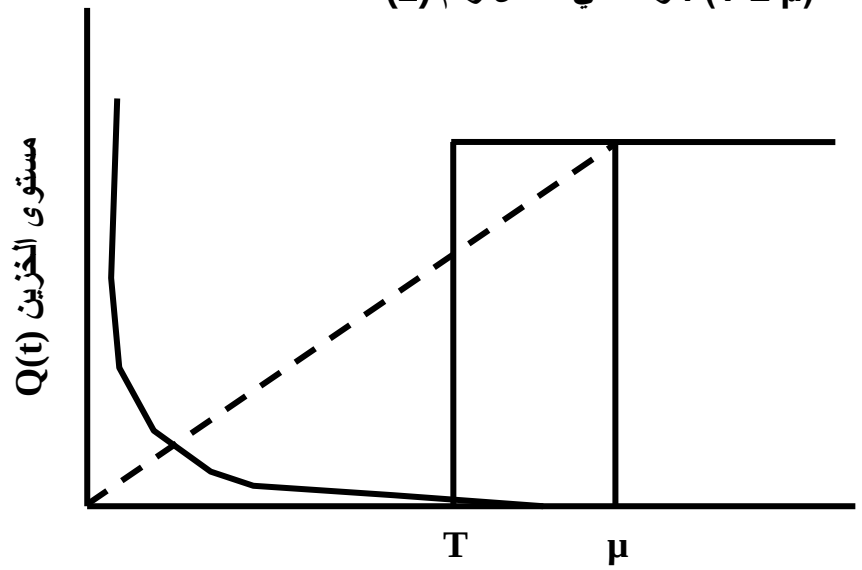
وبعد إجراء التعويضات اللازمة نحصل على

$$\Psi_1(T) = \frac{Do}{T\theta}(C_1 + C\theta)\left\{\frac{\mu e^{\theta T}}{\theta} - \frac{\left(e^{\theta\mu} - 1\right)}{\theta^2} + \mu\left(\frac{\mu}{2} - T\right)\right\} + \frac{CDo\,\mu Ic}{T\theta^2}\left\{e^{\theta(T-\mu)} - \theta(T - \mu) - 1\right\} + \frac{C_3}{T} - \frac{CDo\,\mu^2 Ie}{2T} \quad \text{.....(13)}$$

ولجعل التكاليف أقل ما يمكن نأخذ المشتقة الأولى ونساويها للصفر وكالأتي $\frac{\partial\Psi_1(T)}{\partial T} = 0$ فنحصل على

$$\Rightarrow Do(C_1 + C\theta)\left\{\mu\theta\left(2e^{\theta T}(T\theta - 1) - \mu\theta\right) + 2(e^{\theta\mu} - 1)\right\} + \theta^3\left(CDo\,\mu^2 Ie - 2C_3\right) + 2\theta CDo\,\mu Ic\left\{e^{\theta(T-\mu)}(T\theta - 1) - (\mu\theta - 1)\right\} = 0 \quad \text{.....(14)}$$

ثانياً: في حالة (T ≤ μ) : وكما في الشكل رقم (2) أدناه



شكل رقم (2) يبين أن (T ≤ μ)

وعليه فان المعادلة التفاضلية تكتب بالشكل الأتي

$$\frac{\partial Q(t)}{\partial t} + \theta Q(t) = -D_o t \qquad 0 \le t \le T \quad .....(15)$$

بشرط أن

$$Q(0) = Q_0 \quad \& \quad Q(T) = 0 \quad .....(16)$$

وبحل المعادلة (15) وطبقاً للشرط أعلاه عندما $Q(0) = Q_0$ نحصل على

$$Q(t) = Qo e^{-\theta t} - \frac{Do}{\theta^2}(e^{-\theta t} - 1) - \frac{Do\,t}{\theta} \quad .....(17)$$

وعند التعويض $Q(T) = 0$ في معادلة (17) نحصل على

$$Qo = \frac{Do}{\theta}\left\{Te^{\theta T} + \frac{1}{\theta}(1 - e^{\theta T})\right\} .....(18)$$

أما الكلفة الكلية لنظام الخزين فإنها تتكون من عدة عناصر

I. الفائدة المكتسبة الكلية خلال دورة زمنية معينة ، ورياضياً

$$TIe = DoCIe\left\{\int_0^T t\,dt + T(\mu - T)\right\}$$

وبعد إجراء التكامل المحدد نحصل على

$$TIe = TCDoIe\left(\mu - \frac{T}{2}\right) \text{.....(19)}$$

II. كلفة الاحتفاظ بالخزين الكلية ، ورياضياً

$$TC_1 = C_1\left\{\int_0^T Q(t)dt\right\}$$

$$TC_1 = C_1\left\{\int_0^T \left(Q_o e^{-\theta t} - \frac{D_o}{\theta^2}(e^{-\theta t} - 1) - \frac{D_o t}{\theta}\right)dt\right\}$$

وبعد إجراء التكامل المحدد نحصل على

$$TC_1 = C_1\left\{\frac{Qo}{\theta}\left(1 - e^{-\theta T}\right) - \frac{DoT^2}{2\theta} + \frac{Do}{\theta^3}\left(1 - e^{-\theta T}\right)\right\}$$

$$TC_1 = C_1\left\{\frac{1}{\theta}\left(1 - e^{-\theta T}\right)\left(Qo - \frac{Do}{\theta^2}\right) - \frac{DoT}{\theta}\left(\frac{T}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\right\}$$

والتعويض عن قيمة Q_0 نحصل على

$$TC_1 = \frac{TDoC_1}{\theta}\left\{\frac{\left(1 - e^{\theta T}\right)}{\theta^2 T} + \frac{e^{\theta T}}{\theta} - \frac{T}{2}\right\} \text{.....(20)}$$

III. عدد وحدات المخاطرة D(T) خلال دورة زمنية معينة ، ورياضياً

$$D(T) = Qo - \left\{\int_0^T Do\, t\, dt\right\}$$

$$D(T) = \frac{Do}{\theta}\left\{Te^{\theta T} - \frac{1}{\theta}\left(e^{\theta T} - 1\right)\right\} - \frac{DoT^2}{2}$$

أما كلفة المخاطرة تتحقق عندما $D(T)=CD(T)$ وعليه فان كلفة المخاطرة تصبح بالشكل الأتي

$$CD(T) = \frac{CDo}{\theta}\left\{Te^{\theta T} - \frac{1}{\theta}\left(e^{\theta T} - 1\right)\right\} - \frac{CDoT^2}{2} \text{.....(21)}$$

VI. كلفة تعزيز الخزين (RC) وهي تمثل

$$RC = C_3 \text{.....(22)}$$

وعليه فان الكلفة الكلية للخزين $\Psi_2(T)$ولأي مدة زمنية نجدها من خلال تعويض المعادلات من (19) إلى (22) مقسومة على (T) وكالأتي

$$\Psi_2(T) = \frac{1}{T}\left(TC_1 + CD(T) + C_3 - TIe\right) \text{.....(23)}$$

وبعد إجراء التعويضات اللازمة نحصل على

$$\Psi_2(T) = \frac{Do}{\theta}(C_1 + C\theta)\left\{\frac{e^{\theta T}}{\theta} - \frac{\left(e^{\theta T} - 1\right)}{\theta^2 T} - \frac{T}{2}\right\} - CDo\, Ie\left(\mu - \frac{T}{2}\right) + \frac{C_3}{T} \text{.....(24)}$$

ولجعل التكاليف أقل ما يمكن نأخذ المشتقة الأولى ونساويها للصفر وكالأتي $\frac{\partial \Psi_1(T)}{\partial T} = 0$ فنحصل على

$$\Rightarrow Do(C_1 + C\theta)\left\{T\theta\left(2e^{\theta T}(T\theta - 1) - T\theta\right) + 2(e^{\theta T} - 1)\right\} - \theta^3\left(CDoTIe - 2C_3\right) = 0 \text{.....(25)}$$

2- الجانب العملي

تم إعداد برنامج لهذا الأنموذج الرياضي الذي يحاكي الفترة الزمنية (T) بعدد مرات تكرار R=1000، ولتوضيح آلية عمل هذا الأنموذج الرياضي تم افتراض ما يلي

$C=150$ $I_e=12\%$ $\mu=1/4\ ,\ 1/8$

$C_1=15$ $I_c=20\%$ $\theta=.01:.15$

$C_3=500$

وللحصول على الكلفة الكلية المثلى للخزين ، وكذلك على المدة الزمنية المثلى بين طلبيه وأخرى نتبع ما يلي

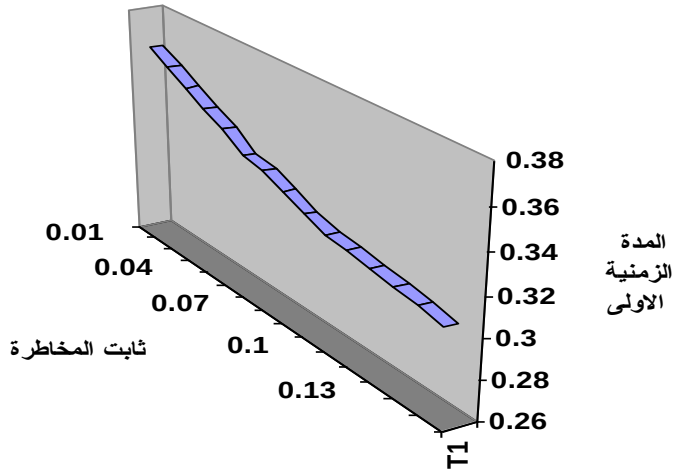
i. نحسب T_1 من معادلة (14) ، فإذا كان $(T_1 \geq \mu)$ فان T_1 يمثل قيمة مثلى لـ (T) ، ومن بعدها يتم احتساب لكلفة الكلية المثلى للخزين وفقاً للمعادلة (13) وكما في الجدول رقم (1)

ii. إما أذا كان$(T_1<\mu)$ عندها يتم احتساب (T_2) من المعادلة (25) ، فإذا كان $(T_2<\mu)$ فان T_2 يمثل قيمة مثلى لـ (T) ، ومن بعدها يتم احتساب لكلفة الكلية المثلى للخزين وفقاً للمعادلة (24) وكما في الجدول رقم (2)

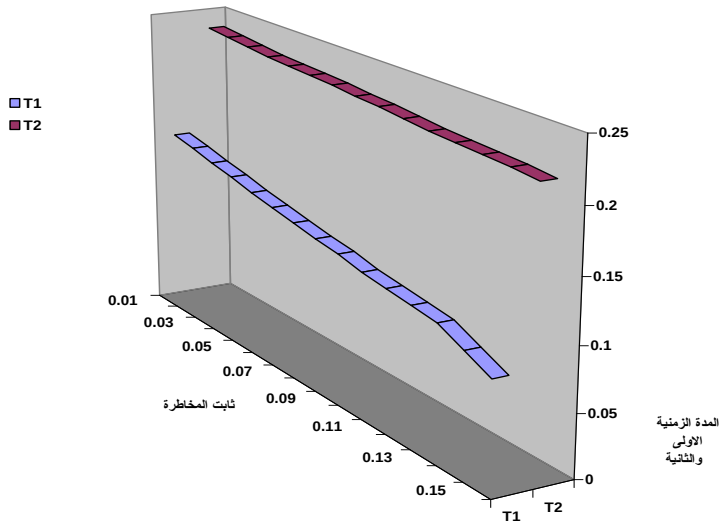
μ	θ	T_1	$\Psi_1(T)$		μ	θ	T_1	T_2	$\Psi_2(T)$
12.5%	.01	.362	1327.88		25%	.01	.148	.237	47.51
	.02	.356	1352.09			.02	.144	.235	74.46
	.03	.350	1376.81			.03	.139	.233	101.12
	.04	.344	1401.45			.04	.135	.231	127.35
	.05	.339	1425.93			.05	.130	.230	153.26
	.06	.331	1450.17			.06	.126	.229	178.81
	.07	.329	1474.36			.07	.122	.228	203.93
	.08	.324	1498.53			.08	.118	.226	228.66
	.09	.319	1522.37			.09	.115	.225	252.81
	.10	.315	1546.31			.10	.110	.223	276.79
	.11	.314	1570.40			.11	.107	.221	289.11
	.12	.312	1593.65			.12	.104	.220	300.20
	.13	.310	1605.13			.13	.101	.219	315.04
	.14	.308	1621.43			.14	. 091	.218	325.16
	.15	.305	1640.52			.15	. 081	.216	337.64

جدول رقم (1) يبين المدة الزمنية المثلى(T_1) والكلفة الكلية عندما $(T_1 \geq \mu)$

جدول رقم (2) يبين المدة الزمنية المثلى(T_2) والكلفة الكلية عندما $(T_2<\mu)$



الشكل رقم (1)
يبين العلاقة بين ثابت المخاطرة والمدة الزمنية المثلى(T_1)عندما $(T_1 \geq \mu)$



الشكل رقم (2)
يبين العلاقة بين ثابت المخاطرة والمدة الزمنية الأولى والثانية عندما ($T_2<\mu$)

3- الاستنتاجات

1. نلاحظ من الجدول رقم (1) أن نسبة المخاطرة (θ) تتناسب عكسياً مع المدة الزمنية (T_1) ،بمعنى أن الزيادة في نسبة المخاطرة سيؤدي إلى انخفاض في المدة الزمنية . ومن ناحية أخرى فان نسبة المخاطرة تتناسب طردياً مع الكلفة الكلية المثلى للخزين$\Psi_1(T)$ ، بمعنى أن الزيادة في نسبة المخاطرة ستؤدي إلى زيادة في الكلفة الكلية
2. نلاحظ من الجدول رقم (2) أن نسبة المخاطرة (θ) تتناسب عكسياً مع المدة الزمنية(T_2) ومن ناحية أخرى فان نسبة المخاطرة تتناسب طردياً مع الكلفة الكلية المثلى للخزين $\Psi_2(T)$ أيضاً

4- المصادر

1-Kun-Shan Wu(2002)"deterministic Inventory Model for Item with Time Varying Demand" Yugoslav Journal of Operations Research ,Vol.(12),No.(1),Page(61-71)
2-Khedairi & Tadji (2006)"optimal Control of a Production Inventory System With Weibull Distribution" King Suad university, Journal of Computer & Operations Research ,Vol.(25),No.(2),Page(649-657)
3-R.Begum & Sahoo(2010)"An EOQ Model For Deteriorating Item With Production Cost and Quadratic Demand" Journal of applied mathematical science ,Vol.(4),No.(6),Page(271-288)
4-S.K.Sahu & Mishra(2010)" "An EOQ Model For Varying Item With Deteriorating &Price-Dependent Demand" Journal of Scientific Research ,Vol.(2),No.(1),Page(24-36)
5-Sudhir & Manoj(2010)"Weibull Distribution Rate Inventory Model" Journal of Indian Management ,(January-March)
6-Wang & Lee(2007)"An EOQ Model For Defective Item With Shortage" Journal of Production Economic,Vol.(3),No.(64),Page(59-64)

.....
.....
.....