Journal Of the Iraqia University 64-2(31-12) December(2023)

ISSN(Print): 1813-4521 OnIine ISSN:2663-7502
Journal Of the Iraqia University
available online at: https://www.iasj.net/iasj/issue/2776

حل مشكلة البرمجة الخطية في ظل عدم اليقين باستخدام البرمجة الفاصلة التقريبية

م. افتخار علي حسين الجامعة التقنية الوسطى

م.م سوزان عباس عبدالله, -الكلية التقنية الهندسية

Solving Linear Programming Under Uncertainty Using Rough Interval Programming (RILP)

Iftikhar Ali Hussein [1*], Suzan Abbas Abdullah [2]

[1,2] Middle Technical University – Technical Engineering College / Iraq -Baghdad

* Corresponding author E-mail:

Suzan.abbas@mtu.edu.iq eftekhar.ali@mtu.edu.iq

10.58564/MABDAA.62.2.2023.480

الخلاصة:

تعد البرمجة الخطية من الأساليب الشائعة في مجال بحوث العمليات، وعادةً ما تستخدم في تعظيم الأرباح أو تقليل التكاليف لدالة هدف تخضع الى مجموعة قيود فاذا كانت معاملات دالة الهدف والقيود بقيم معروفة ومحددة، فأن حل المشكلة يكون بالطرق والخوارزميات التقليدية، يستخدم هذا النوع من البرمجة الخطية في ظل ظروف اعتيادية والتي تسمى (ظل التأكد). في بحثنا هذا سوف يتم التطرق الى نوع جديد من أنواع البرمجة الخطية الذي يدعى ببرمجة الفاصلة التقريبية التي تستخدم في (عدم التأكد) ويرجع السبب في استخدام هذا النوع من البرمجة هي أن البيانات قيد الدراسة تكون غير دقيقة أو نادرة أو يصعب الحصول عليها، لذا تفترض برمجة الفترة التقريبية أن معاملات دالة الهدف والقيود عبارة عن فاصلة تقريبية ((Rough Interval(RI) أي كل متغير يمتلك فاصلة عليا Upper interval وفاصلة سفلى Lower interval , وكذلك كل فاصلة تمتلك حدين حد اعلى Upper Bound وحد اسفل Lower Bound ، أما بالنسبة الى آلية عمل هذا النوع من البرمجة يكمن بتحويل المشكلة (RILPP) إلى (LP) ، وذلك باستخدام طريقة الفصل Separation Method و طريقة تونغ – شاوتشانغ وبذلك يكون لدينا أربعة نماذج خطية وفي كل طريقة تحل النماذج الأربعة كل واحد على حدة وبالنهاية تقدم أربعة حلول لكل طريقة أو ما يسمى بالبدائل ويمكن لصانع القرار (DM) اختيار البديل الأمثل في ظل ظروف المشكلة وسيتم توضيح هذا الأنموذج بأخذ مثال عددي.**الكلمات المفتاحية:** البرمجة الخطية; الفترة التقريبية; برمجة الفاصلة الخطية; برمجة الفاصلة التقريبية الخطية; طريقة الفصل; طريقة تونغ – شاوتشانغ.

Abstract

Linear programming is one of the common methods in the field of operations research and is usually used to maximize profits or reduce costs for a target function that is subject to a set of constraints. Under normal conditions, which is called under certainty, in this research we will address a new type of linear programming called rough interval programming that uses n in (uncertainty). The reason for using this type of programming is that the data under study is inaccurate or Rare or difficult to obtain, so the rough interval programming assumes that the parameters of the objective function and the constraints are a rough interval (RI), that is, each variable has an upper interval and a lower interval, as well as each interval that has two limits, an upper bound, and lower bound, as for the mechanism of action of this type of programming, it is to convert the form (RILPP) to (LP), using the Separation method and the Tong-Shao-Chang method, thus we have four linear models and in each method to solve the four sub-models each one Separately, and in the end, four solutions are presented for each method, or the so-called alternatives, and the decision-maker (DM) can choose the optimal alternative in under of the conditions of the problem. This model will be illustrated by taking a numerical example.**Keywords**: linear programming; rough interval; interval linear programming; rough interval linear programming; separation method; Tong-Shaochang method.

1. المقدمة

بحوث العمليات هو نظام حديث يستخدم الخوارزميات الرياضية والإحصائية والخوارزميات لنمذجة وحل المشكلات المعقدة، وتحديد الحل الأمثل، وتحسين عملية صنع القرار. ولهذا تسمى بعلم القرار أو علم الإدارة، أيضاً لبحوث العمليات تطبيقات في الهندسة والعلوم الاقتصادية والإدارية والتسويقية.ومن أساليب بحوث العمليات هو أسلوب البرمجة الخطية إذا يعدِ من الأساليب الأكثر شيوعاً في مشاكل الأمثلية المستخدمة في اتخاذ القرار، أن الهدف الرئيس من البرمجة الخطية هي أما تعظيم أرباح أو تقليل تكاليف لدالة هدف تخضع الى مجموعة قيود، فإذا كانت معاملات دالة الهدف والقيود بقيم معروفة ومحددة فأن حل النموذج يكون بالطرق والخوارزميات التقليدية .(Hamdy T.,2007)ولكن في بعض الظروف تكون المعاملات متغيرات القرار للنماذج ليست دقيقة، ويرجع ذلك إلى حقيقة أنَ بعض البيانات ذات الصلة تكون غير دقيقة أو نادرة أو يصعب الحصول عليها. لذا اقترح العالم بأولاك 1982 ما يسمى بنظرية المجموعات التقريبية إذ عرفها على: أنها أداة رياضية تتعامل مع حالات عدم التأكد، ومن ميزات هذه النظرية أنها لا تحتاج الى أي معلومات أولية أو إضافية حول البيانات قيد الدراسة على سبيل المثال (مثلا الاحتمال السابق في نظرية الاحتمالات، ورقم الاحتمال الأساسي في نظرية ديمبستر–شافر، ودرجة العضوية في نظرية المجموعات الضبابية) (Pawlak Z.,1980)، تقوم الفكرة الرئيسية لنظرية المجموعات التقريبية في وجود فاصلة عليا وفاصلة سفلى لكل مجموعة تقريبية وكذلك وجود حد اعلى وحد اسفل لكل فاصلة وبالتالي فان المجموعة التقريبية الواحدة تمتلك اربع حدود(Pardalos P.,2010)، ولهذا فان مجموعة الفاصلة التقريبية تكون مناسبة جدا لتوظيفها في حل مشكلة عدم التأكد في أسلوب البرمجة الخطية ، ولهذا اقترح الباحثين (Hamzehee A., Yaghoobi M., and Mashinchi M.) فكرة في كيفية التعامل مع معاملات متغيرات القرار غير معروفة بشكل جزئي أو بشكل كامل، في هذا البحث قمنا تقديم نوع جديد من أنواع البرمجة الخطية هو برمجة الفاصلة التقريبية التي تفترض أن معاملات دالة الهدف والقيود هي عبارة عن فاصلة تقريبية بحيث يتلاءم الموديل الرياضي مع مشكلة عدم التأكد، قسم البحث إلى عدة فقرات أولا المقدمة ثانياً أنواع البرمجة والتعريفات المرتبطة بمجموعات الفاصلة التقريبية وطرق حل برمجة الفاصلة التقريبية ثالثاً مثال تطبيقي يوضح طرق حل نموذج برمجة الفاصل التقريبية الخطية ورابعاً الاستنتاجات.**جدول ١ المصطلحات والرموز الخاصة بمشكلة البحث**

المصطلحات	الرموز		
البرمجة الخطية الفاصلة التقريبية برمجة الفاصلة التقريبية الخطية برمجة الفاصلة الخطية	LP RI RILP ILP		
مشكلة الحد الأدنى للفاصلة الدنيا	$(LLP)_L$		
مشكلة الحد الأعلى للفاصلة الدنيا	$(ULP)^L$		
مشكلة الحد الأدنى للفاصلة العليا	$(LUP)^U$		
مشكلة الحد الأعلى للفاصلة العليا	$(UUP)^U$		

٢. أنواع البرمجة المستخدمة وطرق حلها

٢.١ البرمجة الخطية: Linear Programming (LP)

يمكن وصف مشكلة (LP)، والتي تسمى أحيانا التحسين الخطي، بأنها مشكلة تعظيم maximizing أو تقليل minimizing دالة الهدف الخطي التي تخضع لقيود خطية (Allahdadi M., and Nehi H.M.) يمكن أن تكون القيود متساوية أو غير متساوية. النموذج القياسي ل LP هو كما يلي:

$$max\ or\ min\ f = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j,$$

subject to .

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_{j_i} \leq = \geq b_i, \quad i = 1,2, \dots, m, \qquad (1)$$

$$X_j \geq 0, j = 1,2, \dots, n$$

حيث:

X_j : تمثل متغيرات القرار للمشكلة لـ j من المتغيرات.

C_j : تمثل معاملات دالة الهدف لـ j من المتغيرات.

a_{ij} : تمثل معاملات القيود لـ i من القيود و j من المتغيرات.

b_i : تمثل الطرف الايمن للقيود والتي تمثل (الموارد المتاحة، ساعات العمل، عدد العمال، ...الخ) .

$X_j \geq 0$: يمثل قيد عدم السلبية.

m: تمثل عدد القيود.

n : تمثل عدد متغيرات القرار.

الوصف أعلاه لمشكلة البرمجة الخطية المستخدم في حالة الظروف المؤكدة (قيم القيود ثابتة ومحددة).

٢.٢ الفاصل التقريبي Rough Interval (RI)

في هذا الجزء سوف نوضح تعريفات وخصائص لـ RI التي عرفها الباحثين (Pawlak Z., and Sloeinski R.) على اعتبارها قيمة نوعية من مفهوم غامض للمتغير X

تعريف١. تسمى القيمة النوعية A بفاصل تقريبي عندما يمكن تعيين فترتين مغلقتين A_* و A^* على R إذ إن: $A_* \subseteq A^*$. علاوة على ذلك

(i) إذا كانت $x \in A_*$ فإن A تأخذ بالتأكيد x (يشار إليها ب $x \in A$).

(ii) إذا كان $x \in A^*$ فمن المحتمل أن A يأخذ x.

(iii) إذا كانت $x \notin A^*$ فمن المؤكد أن A لا تأخذ x (يشار إليها ب $x \notin A$).

يطلق على A_* و A^* فاصل التقريب الأدنى (LAI) وفاصل التقريب الأعلى (UAI) لـ A، على التوالي. الإضافة إلى ذلك، يشار إلى A بـ $A = (A_*, A^*)$.

٢.٣ خصائص الحسابية للفاصلة: في هذا الجزء سوف نقدم التعريفات والخصائص الأساسية الخاصة بالفاصلة العددية.

تعريف٢: إذا كانت لدينا الفاصلة المغلقة $[\underline{x}_{ij}, \overline{x}_{ij}]$ المتمثلة بالمتغير x فان فترة العدد الحقيقي يمكن إن تعرف بالشكل التالي:

$$X^I = [\underline{x}_{ij}, \overline{x}_{ij}] = \{x \in R | \underline{x}_{ij} \leq x \leq \overline{x}_{ij}, \underline{x}_{ij}, \overline{x}_{ij} \in R\}$$

إذ إن: $\underline{x}_{ij}$ يمثل الحد الادنى للفاصلة، وأن $\overline{x}_{ij}$ تمثل الحد الاعلى للفاصلة.

تعريف٣: إذا كان لدينا $X^I = [\underline{x}_{ij}, \overline{x}_{ij}]$ و $Y^I = [\underline{y}_{ij}, \overline{y}_{ij}]$ وهي عبارة عن فترتين عددية متساوية إذا وفقط إذا.

$$\underline{x}_{ij} = \underline{y}_{ij} \text{ و } \overline{x}_{ij} = \overline{y}_{ij} \text{ iff}$$

تعريف ٤: تسمى الفاصلة الحسابية $X^I = [\underline{x}_{ij}, \overline{x}_{ij}]$ بالفاصلة الثابتة إذا $\underline{x}_{ij} = \overline{x}_{ij}$.

تعرف ٥: توضيح العمليات الحسابية على الفاصلة العددية كآلاتي، لنفترض أن لدينا فاصلتين عدديتين هما:

$$X^I = [\underline{x}_{ij}, \overline{x}_{ij}] \text{ and } Y^I = [\underline{y}_{ij}, \overline{y}_{ij}]$$

(الجمع)

$$X^I + Y^I = [\underline{x}_{ij} + \underline{y}_{ij}, \overline{x}_{ij} + \overline{y}_{ij}];$$

$$X^I - Y^I = \left[\underline{x}_{ij} - \underline{y}_{ij}, \overline{x}_{ij} - \overline{y}_{ij}\right];$$ (الطرح)

$$X^I * Y^I = \left[min\left\{\underline{x}_{ij} * \underline{y}_{ij}, \underline{x}_{ij} * \overline{x}_{ij}, \overline{x}_{ij} * \overline{y}_{ij}, \overline{x}_{ij} * \overline{y}_{ij}\right\}; max\left\{\underline{x}_{ij} * \underline{y}_{ij}, \underline{x}_{ij} * \overline{x}_{ij}, \overline{x}_{ij} * \overline{y}_{ij}, \overline{x}_{ij} * \overline{y}_{ij}\right\}\right];$$ (الضرب)

$$X^I / Y^I = \left[\underline{x}_{ij} / \overline{y}_{ij}, \overline{x}_{ij} / \underline{y}_{ij}\right];$$ (القسمة)

٢.٣صياغة الأنموذج الرياضي لأسلوب البرمجة الفترة التقريبية الخطية *(Rough Interval Linear Programming (RILP*

مشكلة البرمجة الخطية ذات الفترة التقريبية هي امتداد لمشكلة البرمجة الخطية بمعاملات فترة تقريبية، للتنبؤ عندما تكون قيمة البيانات غير معروفة بشكل صحيح، ولكن يمكن تقديرها بحدود فترة تقريبية عليا وسفلى على التوالي، يمكن صياغة مشكلة البرمجة الخطية ذات الفترة التقريبية على النحو التالي: (Zhang Z., Wang X. and Lu J.) و (Ammar S., and Eljerbi T)

$$Max\ or\ Min\ f = \sum_{j=1}^{n}([\underline{c}_j^L, \underline{c}_j^U], [\overline{c}_j^L, \overline{c}_j^U])x_j$$
$$\text{subject to.}$$
$$\sum_{j=1}^{n}([\underline{a}_{ij}^L\ \underline{a}_{ij}^U], [\overline{a}_{ij}^L, \overline{a}_{ij}^U])x_j \leq ([\underline{b}_i^L, \underline{b}_i^U], [\overline{b}_i^L, \overline{b}_i^U])$$
$$x_j \geq 0,$$
$$j = 1,2,\dots,n, \quad i = 1,2,\dots,m$$
(2)

إذ أن:

$([\underline{c}_j^L, \underline{c}_j^U], [\overline{c}_j^L, \overline{c}_j^U])$ تمثل معاملات متغيرات القرار لدالة الهدف.

$([\underline{a}_{ij}^L, \underline{a}_{ij}^U], [\overline{a}_{ij}^L, \overline{a}_{ij}^U])$ تمثل معاملات متغيرات القرار للقيود.

$([\underline{b}_i^L, \underline{b}_i^U], [\overline{b}_i^L, \overline{b}_i^U])$ تمثل الطرف الايمن للقيود (عبارة عن الموارد المتاحة، ساعات العمل، عدد العمال،. ...الخ).

m : تمثل عدد القيود في المشكلة.

n: تمثل عدد متغيرات القرار في المشكلة.

$x = (x_1, x_2, \dots x_n)^t$: عبارة عن متجه لجميع متغيرات القرار.

٢.٤ الأنموذج الرياضي لبرمجة الفاصلة الخطية (ILP) Interval Linear Programming

في مشكلة البرمجة الفاصلة الخطية، يتم تحديد المعاملات في الدوال والقيود كقيم فاصلة، ويمكن بناء مشكلة البرمجة الفاصلة الخطية (ILP) كما في (3).(Pawlak Z., and Sloeinski R.)

$$Max\ or\ Min\ f = \sum_{j=1}^{n}[\underline{c}_j, \overline{c}_j]x_j$$
$$subject\ to. \sum_{j=1}^{n}[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]x_j \leq = \geq [\underline{b}_i, \overline{b}_i]$$
$$x_j \geq 0,$$
$$j = 1,2,\dots,n, \quad i = 1,2,\dots,m$$
(3)

إذ أن: $[\underline{C}_i, \overline{C}_i]$: تمثل فاصلة معاملات دالة الهدف.

و $[\underline{b}_i, \overline{b}_i]$: تمثل فاصلة الطرف الأيمن للقيود.

$[\underline{a}_{ij},, \overline{a}_{ij}]$: تمثل فاصلة معاملات القيود.

3. مثال تطبيقي

سيتم في هذا الجزء تطبيق طريقتين لحل مشكلة برمجة الفاصلة التقريبية الخطية وباستخدام مسألة لاحد الشركات الإنتاجية في ظروف غير مؤكدة كما موضح أدناه في المشكلة ٤:

$(Max\ f = ([2.5,3], [1.5,3.5])x_1 + ([2.5,3], [2,3.5])x_2$ الربح(

s.t.

($([3,3.5],[2.5,5])x_1 + ([2.5,3],[2,4])x_2 \leq 60$ المادة الأولية

١)

($([2.5,3],[2,4])x_1 + ([3,3],[1.5,4])x_2 \leq 40$ المادة الأولية ٢)

($([1.5,2],[1,2.5])x_1 + ([3.5,4],[3,5])x_2 \leq 30$ المادة الأولية ٣)

$x_1, x_2 \geq 0$, (4)

(x_1 : يمثل المنتج الأول، x_2 يمثل المنتج الثاني)

٣.١ طريقة الفصل Separation Method تعد هذه الطريقة احدى طرق تحويل برمجة الفترة التقريبية (RILP) الى البرمجة الخطية(LP) ، خطوات هذه الطريقة كالاتي: ((Kim H., Kenichi I. and Mitsuo G.)

الخطوة الأولى: نقوم بتحويل المشكلة الرئيسة RILP الى مشكلتين جزئية sub-problem (مشكلة الفاصلة السفلى LIP ومشكلة الفاصلة العليا UIP.

الخطوة الثانية: يتم تحويل كل مشكلة جزئية في الخطوة الأولى (LIPوUIP) الى مشكلتين خطية حيث نأخذ LIP ويتم تجزئته الى مشكلتين خطية مشكلة حد ادنى للحد الأدنى (PLL) ومشكلة حد اعلى للحد الأدنى (PLU) وكذلك نأخذ UIP ويتم تجزئتها الى مشكلة حد ادنى للحد الأعلى (PUL) ومشكلة حد اعلى للحد الأعلى (PUU) وبهذا سوف يكون لدينا اربع مشكلات جزئية.

الخطوة الثالثة: حل المشكلات الجزئية PLL, PLU, PUL,PUU باستخدام أساليب البرمجة الخطية مثل طريقة السمبلكس (Simplex Method).

الخطوة الرابعة: الحصول على الحل الأمثل لكل مشكلة جزئية، وبهذا يكون لدينا أربع حلول مثلى تقدم الى صانع القرار يمكنه اختيار البديل الأمثل من بين البدائل المثلى الأربعة حسب ما يناسب ظروف المؤسسة.

الخطوة الأولى: تحويل المشكلة ٤ الى مشكلتين جزئية المشكلة ٥ والمشكلة ٦ كما موضح أدناه:

Problem 5 lower interval programming (LIP)

$$Max\ f_L = [2.5,3]x_1 + [2.5,3]x_2$$

$$([3,3.5],)x_1 + ([2.5,3],)x_2 \leq 60 \quad \text{s.t.}$$
$$[2.5,3],x_1 + [3,3]\ x_2 \leq 40$$
$$[1.5,2]x_1 + [3.5,4]x_2 \leq 30$$
$$, x_1, x_2 \geq 0 \quad (5)$$

Problem 6 upper interval programming (UIP)

$$Max\ f^U = [1,5.3,5]x_1 + [2.3,5]x_2$$

$$s,t,[2,5.4]x_1 + [2.4]x_2 \leq 60$$
$$[2,4]\ x_1 + [1.5,4]\ x_2 \leq 40$$
$$[1,2.5]\ x_1 + [3,5]\ x_2 \leq 30$$
$$,x_1.x_2 \geq 0 \quad (6)$$

الخطوة الثانية: تحويل المشكلة ٥ الى مشكلتين (٧ ،٨) وتحويل المشكلة ٦ الى مشكلتين (٩، ١٠) كما موضح أدناه:

Problem 7 lower linear programming $(LLP)_L$

$$Max\ \underline{f_L} = 2.5\underline{x_1} + 2.5\underline{x_2}$$

$$3\underline{x_1} + 2.5\underline{x_2} \leq \underline{60} \quad \text{s.t.}$$
$$\underline{x_2} \leq \underline{40} \quad ٣+ ٢.٥\underline{x_1}$$
$$١.٥\underline{x_1} \quad +\leq ٣.٥\underline{x_2}$$
$$\underline{30}$$

$(\ , x_1, x_2 \geq 0$

)٧

Problem 8 upper linear programming $(ULP)_L$

$$Max\ \underline{f}^U = 3\underline{x_1} + 3\underline{x_2}$$

$$3.5\underline{x_1} + 3\underline{x_2} \leq \underline{60} \quad \text{s.t.}$$

$$\underline{x_2} \leq \underline{40} \quad ٣+ ٣\underline{x_1}$$

$$٤\underline{x_2} \leq + \quad ٢\underline{x_1}$$

$$\underline{30}$$

$$)٨, \ x_1, x_2 \geq 0$$

(

Problem 9 lower linear programming $(LUP)^U$

$$Max\ \overline{f_L} = 1.5\overline{x_1} + 2\overline{x_2}$$

$$s.t.\ 2.5\overline{x_1} + 2\overline{x_2} \leq \overline{60}$$

$$2\ \overline{x_1} + 1.5\ \overline{x_2} \leq \overline{40}$$

$$+3 \quad \overline{x_2} \leq \overline{x_1}$$

$$\overline{30}$$

$$, \ x_1, x_2 \geq 0 \qquad (9)$$

Problem 10 upper linear programming $(UUP)^U$

$$Max\ \overline{f}^U = 3.5\overline{x_1} + 3.5\overline{x_2}$$

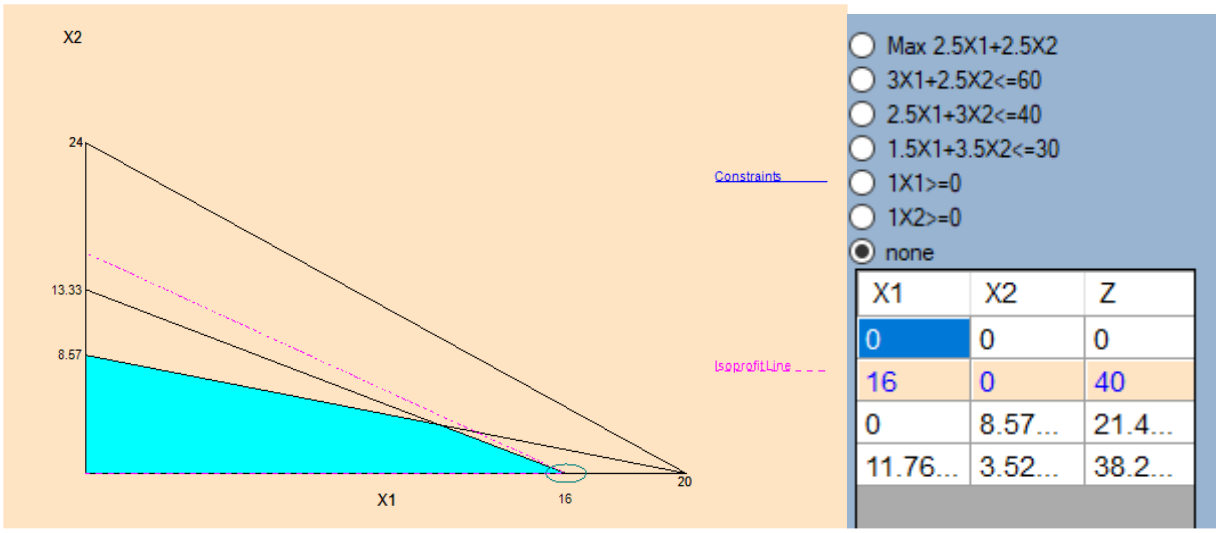
$$s.t.\ 4\overline{x_1} + 4\overline{x_2} \leq \overline{60}$$

$$4\ \overline{x_1} + 4\ \overline{x_2} \leq \overline{40}$$

$$2.5\ \overline{x_1} + 5\ \overline{x_2} \leq \overline{30}$$

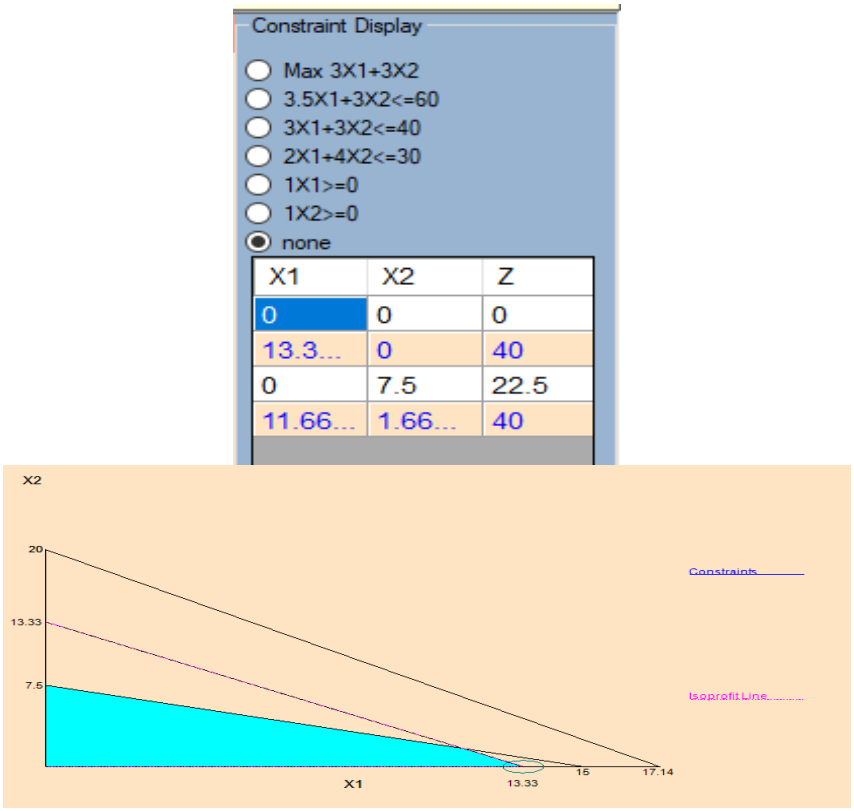
$$(10) \quad , \ x_1, x_2 \geq 0$$

الخطوة الثالثة: حل المشكلات (٧،٨،٩،١٠) كل واحدة على حدة وإيجاد الحل الأمثل باستخدام برنامج **POM–QM** حل المشكلة ٧. كما موضح في الشكل (١)

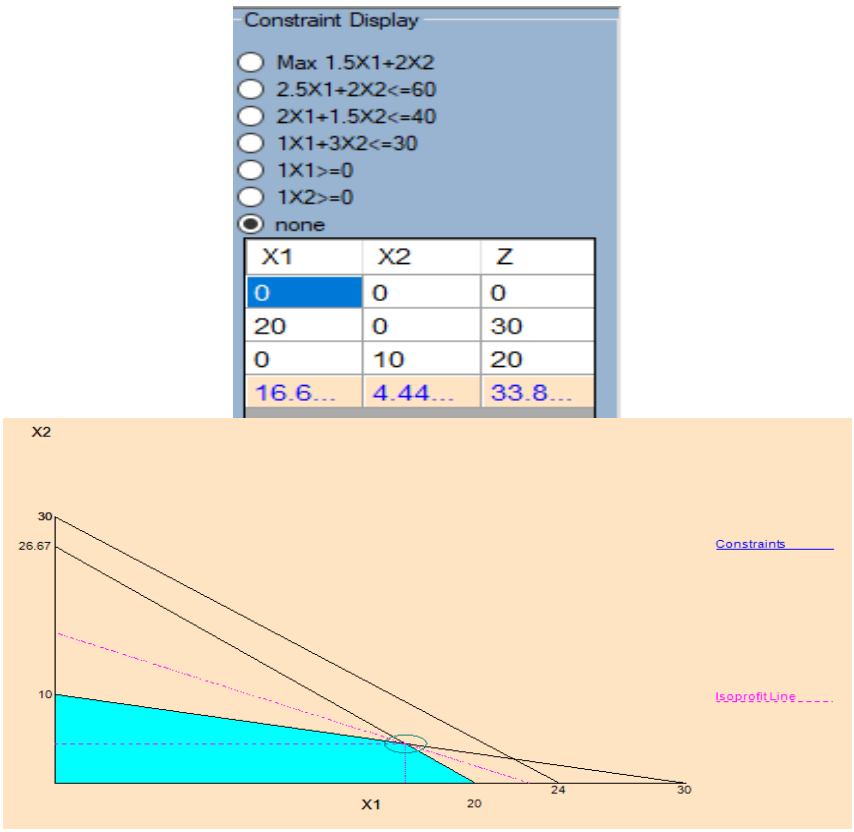


الشكل (١) يوضح رسم قيود المشكلة ٧ والحل الأمثليتضح من خلال النتائج أعلاه للمشكلة ٧ أنه الشركة إذا أنتجت $x_1 = 16$ وحدة من المنتج الأول ولم تنتج للمنتج الثاني $x_2 = 0$ سيكون عائد الشركة $f = 40$ ، أما بالنسبة لمشكلة ٨ هنالك بديلان أمام صانع القرار هو إما

أن ينتج النوع الأول دون النوع الثاني والعائد المتحقق سيكون ٤٠ ، أو أن ينتج النوعين معاً وهذا لا يغير قيمة العائد لديه كما موضح في الشكل (٢)

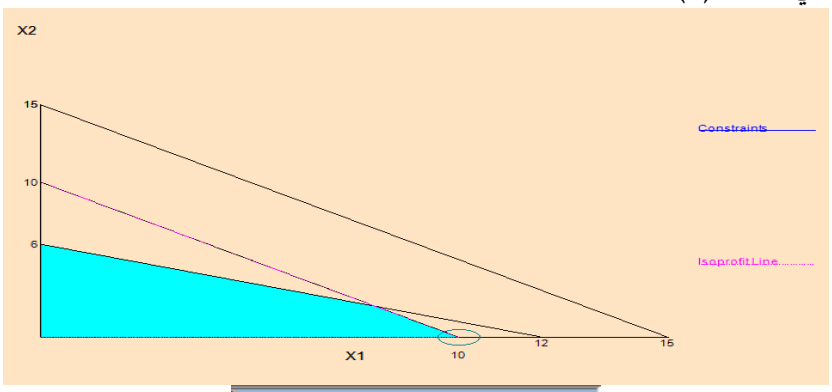


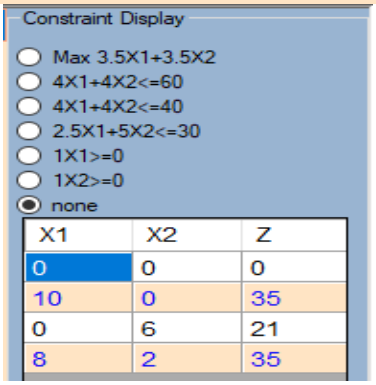
الشكل (٢) يوضح رسم قيود المشكلة ٨ والحل الأمثل من خلال حل المشكلة ٩ والموضحة في الشكل (٣) أدناه أن أمام صانع القرار بديل واحد هو إنتاج المنتجين معا يحقق ٣٣.٨.



الشكل (٣) يوضح رسم قيود المشكلة ٩ والحل الأمثل

أما بالنسبة للمشكلة ١٠ يوجد بديلان اثنان أمام صانع القرار هو إمّا أن ينتج المنتج الأول فقط ويحقق ربح قدره ٣٥ او ينتج المنتجين معاً دون تغير قيمة الربح وكما موضح في الشكل (٤).





يمكن تلخيص نتائج طريقة الفصل كما في الجدول (٢) أدناه:**الجدول ٢ القيم المثلى والحل الأمثل لطريقة الفصل للمشكلة ٤**

Bounds	No. of problem	X_1	X_2	F^*
$(LLP)_L$	7	16	0	40
$(ULP)_L$	8	11.66	1.66	40
$(LUP)^U$	9	16.6	4.44	33.8
$(UUP)^U$	10	8	2	35

٣.١.١ مناقشة نتائج طريقة الفصل لوحظ من خلال النتائج التي تم التوصل اليها من جراء استخدام طريقة الفصل هي أن قيمة دالة الهدف عند الفترة الدنيا هي [33.8, 40]والفترة العليا هي [35,40] تشير الى إمكانية وقوع النتائج ضمن المدى وبالإمكان أن تعتبر هذه النتيجة مثالية، أما بالنسبة لمتغيرات القرار للحد الأدنى هي [4.44,16.6] :[0,16] و للحد الأعلى [2,8]:[1.66,11.66] تعبر هذه النتيجة عن تقريبية مثلى.

٣.٢طريقة تونغ – شاوتشانغTong–Shao Chang تستخدم هذه الطريقة لتحويل مشكلة الفترة التقريبية الى مشاكل خطية جزئية مشكلتين للحد الأعلى ومشكلتين للحد الأسفل ويكون لدينا بالمجمل أربعة مشاكل خطية، إن هذه الطريقة تستخدم لإيجاد أفضل وأسوأ حل أمثل. (Hamzehee A., Yaghoobi M., and Mashinchi M.)خطوات هذه الطريقة تكون بالشكل الاتي.

الخطوة الأولى: تجزئة المشكلة الرئيسة مشكلة ٤ وتحويلها من RILP الى مشكلتين جزئية: مشكلة فاصلة عليا ومشكلة فاصلة دنيا UILP و LILP .

الخطوة الثانية: في هذه الخطوة يتم أخذ مشكلة الحد الأدنى وجعل المعاملات لدالة الهدف والطرف الأيمن للقيود حد ادني ومعاملات القيود في الطرف الأيسر تكون حد اعلى.

الخطوة الثالثة: يتم اخذ مشكلة الحد الأعلى وجعل معاملات دالة الهدف والطرف الأيمن للقيود حد أعلى أما معاملات القيود في الطرف الأيسر تكون حد أدني.

الخطوة الرابعة: نحصل من الخطوة الثالثة أربع مشكلات جزئية خطية من المشكلة الرئيسية كما موضحة أدناه ثم نحل المشكلات الجزئية الأربعة بطريقة السمبلكس Simplex Method باستخدام برنامج **POM–QM** .

Problem 11 lower interval programming (LIP)

$$Max\ f_L = [2.5,3]x_1 + [2.5,3]x_2$$

$$[3,3.5]x_1 + [2.5,3]x_2 \le 60 \quad \text{s.t.}$$
$$[2.5,3]\ x_1 + [3,3]\ x_2 \le 40$$
$$[1.5,2]x_1 + [3.5,4]x_2 \le 30$$

$$, x_1, x_2 \ge 0 \qquad (11)$$

Problem 12 upper interval programming (UIP)

$$Max\ f^U = [1,5.3,5]x_1 + [2.3,5]x_2$$

$$s,t, [2,5.4]x_1 + [2.4]x_2 \le 60$$
$$[2,4]\ x_1 + [1.5,\ 4]\ x_2 \le 40$$

$$[1,2.5] \qquad x_1 + [3,5] \qquad x_2 \le 30$$

$$, x_1.x_2 \ge 0 \qquad (12)$$

Problem 13 lower linear programming $(LLP)_L$

$$Max\ \underline{f_L} = 2.5\underline{x_1} + 2.5\underline{x_2}$$

s.to

$$3.5\overline{x_1} + 3\overline{x_2} \le \underline{60}$$
$$3\overline{x_1} + 3\ \overline{x_2} \le \underline{40}$$
$$2\overline{x_1} + 4\overline{x_2} \le \underline{30}$$

$$, x_1, x_2 \ge 0 \qquad (13)$$

Problem 14 upper linear programming $(ULP)_L$

$$Max\ \overline{f_L} = 3x_1 + 3x_2$$

s. to.

$$3\underline{x_1} + 2.5\underline{x_2} \le \overline{60}$$
$$2.5\underline{x_1} + 3\ \underline{x_2} \le \overline{40}$$
$$1.5\underline{x_1} + 3.5\underline{x_2} \le \overline{30}$$

$$, x_1, x_2 \ge 0 \qquad (14)$$

Problem 15 lower linear programming $(LUP)^U$

$$Max\ \overline{f}_L = 1.5\underline{x_1} + 2\underline{x_2}$$

$$s.to$$
$$4\overline{x_1} + 4\overline{x_2} \le \underline{60}$$
$$4\ \overline{x_1} + 4\ \overline{x_2} \le \underline{40}$$

2.5 $\overline{x_1}$+5 $\overline{x_2} \leq$ 30

, $x_1, x_2 \geq 0$ (15)

Problem 16 upper linear programming $(UUP)^U$

$$Max\ \overline{f}^U = 3.5\overline{x_1} + 3.5\overline{x_2}$$

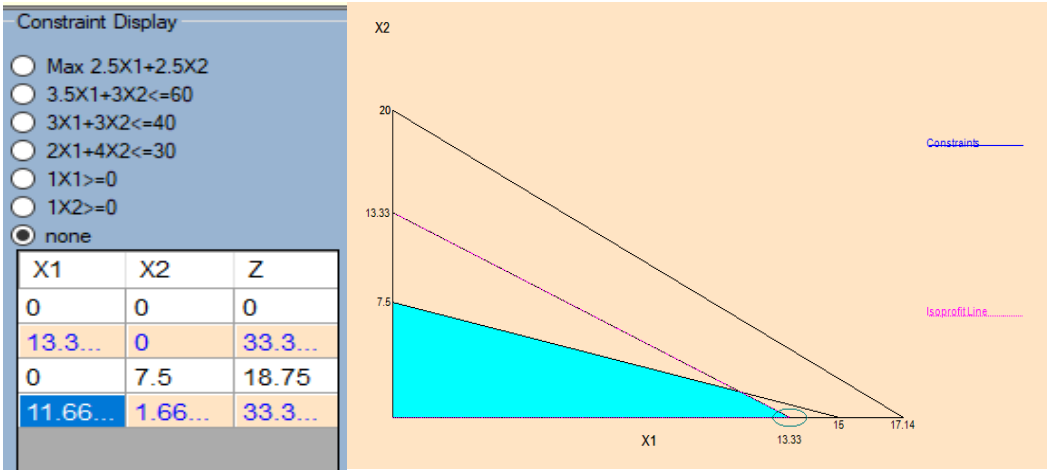
$s.to$

$2.5\underline{x_1} + 2\underline{x_2} \leq \overline{60}$

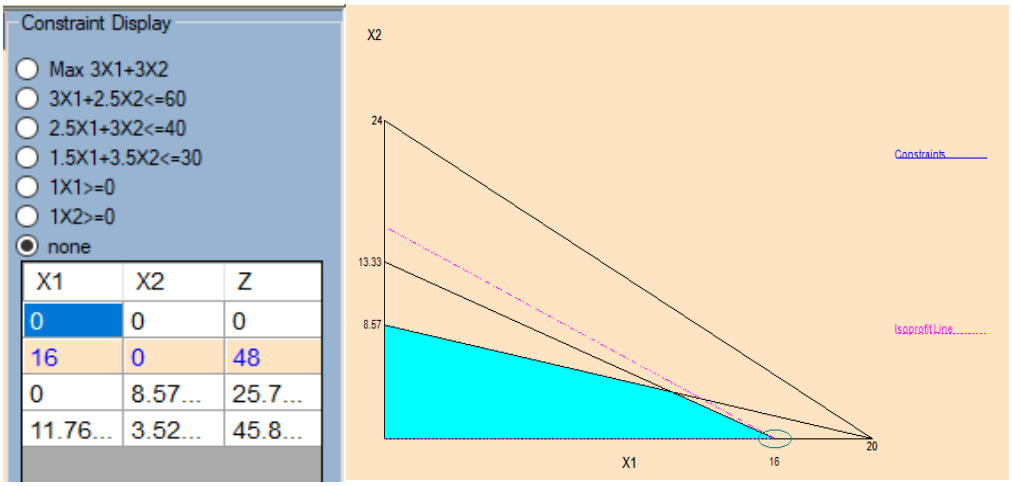
$2\ \underline{x_1}+ 1.5\ \underline{x_2} \leq \overline{40}$

+3 $\underline{x_2} \leq \underline{x_1}$ $\overline{30}$

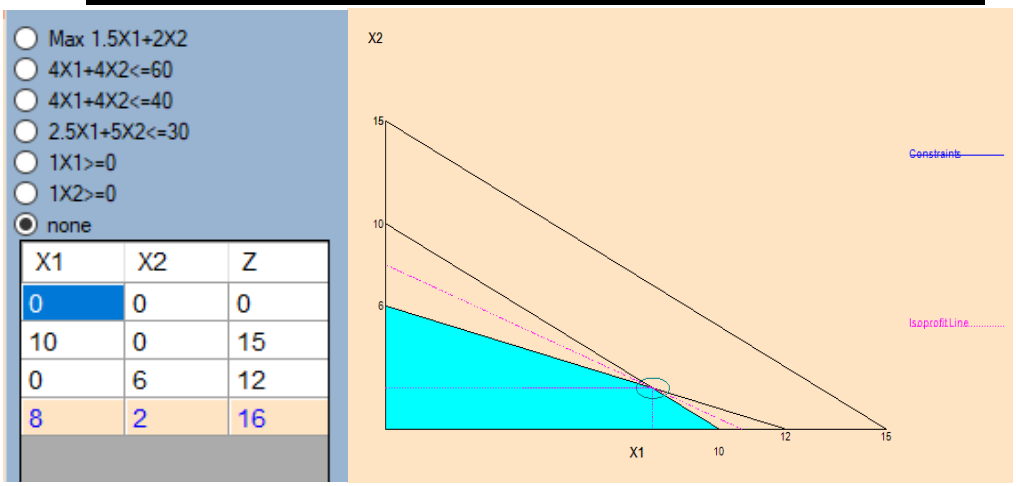
, $x_1, x_2 \geq 0$ (16)



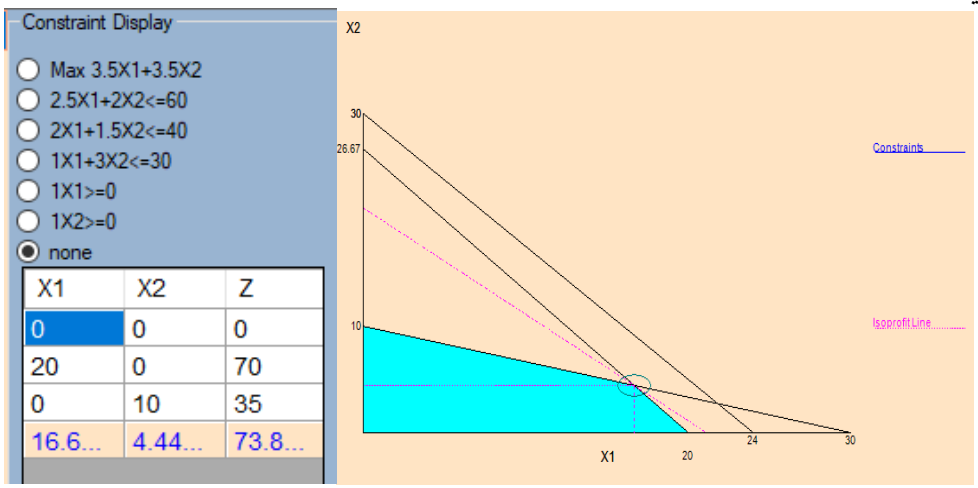
الشكل (٥) يوضح رسم قيود المشكلة ١٣ والحل الأمثلمن خلال الشكل (٥) أعلاه يتضح إن أسوأ حل أمثل للمشكلة ١١ يكون عند النقطة (١.٦٦,١١.٦٦) و (١٣.٣,٠) حيث تحقق ربح ٣٣.٣.



الشكل (٦) يوضح رسم قيود المشكلة ١٤ والحل الأمثلواضح من خلال النتائج المبينة في شكل (٦) ان افضل اسوء حل عندما تنتج الشركة من المنتج الأول بمقدار ١٦ دون المنتج الثاني تحقق عائد مقداره ٤٨.



الشكل (٧) يوضح رسم قيود المشكلة ١٥ والحل الأمثلعند المشكلة ١٥ هنالك بديل واحد فقط أمام صانع القرار هو إنتاج المنتج الأول والثاني بمقدار ٨,٢ على التوالي يحقق عائد ومقداره ١٦.



الشكل (8) يوضح رسم قيود المشكلة ١٦ والحل الأمثلإيجاد أفضل الأفضل يتحقق عند إنتاج المنتجين معاً يحقق عائد مقداره ٧٣.٨. **الجدول ٣ ملخص نتائج طريقة تونغ- شاوتشانغ للمشكلة ٤**

Bounds	No. of prob.	X_1	X_2	F^*
$(LLP)_L$	13	١١.٦٦	١.٦٦	٣٣.٣
		١٣.٣	٠	٣٣.٣
$(ULP)_L$	14	١٦	0	٤٨
$(LUP)^U$	15	٨	٢	١٦
$(UUP)^U$	16	١٦.٦	٤.٤٤	٧٣.٨

3.2.1 مناقشة نتائج طريقة تونغ- شاوتشانغ

لوحظ من خلال النتائج التي تم التوصل اليها من جراء استخدام طريقة تونغ- شاوتشانغ هي أن قيمة دالة الهدف عند الفاصلة الدنيا هي [16, 33.3]والفاصلة العليا هي [48,73.8] تشير الى وقوع النتائج ضمن المدى وتعتبر هذه النتيجة مثالية، أما بالنسبة لمتغيرات القرار للحد الأدنى هي [16.6,4.44] :[16,0] و للحد الأعلى [8,2]]:[11.66,1.66] تعبر هذه النتيجة فاصلة تقريبية مثلى مؤكدة.واضح من خلال نتائج الطريقة أعلاه أن أسوء حل أمثل لفاصلة الحد الأدنى هي ٣٣.٣، أما بالنسبة الى أفضل حل أمثل لفاصلة الحد الأعلى هو ٧٣.٨ هذه النتائج تضع أمام صانع القرار أسوأ حل وأفضل حل في ظل الظروف غير الطبيعية، وهذا يتيح لصانع القرار اتخاذ إجراءات مناسبة حسب ظروف الشركة.

٤. الاستنتاجات

أن برمجة الفاصلة التقريبية الخطية كما عرفناها أنها أداة رياضية تتعامل مع حالة عدم التأكد لذا تعتبر مناسبة جدا في حالة الظروف غير الطبيعية كتقلب الأسعار والمادة الأولية وأجور العمال ...الخ، فهي تعطي لصانع القرار أربعة بدائل تمكنه من اختيار البديل المناسب، أن كلتا الطريقتين أعطت نتائج تقع جميعها ضمن المدى وهذا ما يؤكد على نجاح تطبيق الفاصلة التقريبية على البرمجة الخطية، كما لوحظ إن هنالك بعض المزايا والعيوب للطريقتين:

- طريقة الفصل تتعامل مع أنواع القيود (≥=≤)كافة ، اما طريقة تونغ- شاوتشانغ تتعامل مع القيود من النوع (=≤) فقط.
- طريقة الفصل أعطت نتائج متقاربة لكل حد، بينما طريقة تونغ- شاوتشانغ أظهرت وجود فارق كبير بين نتائج الفاصلة الواحدة.

ولهذا يمكن اعتبار طريقة الفصل أفضل من طريقة تونغ- شاوتشانغ على الرغم من توفيرها أربع بدائل لصانع القرار.

Reference

– Allahdadi M, and H.M. Nehi, "The optimal value bounds of the objective function in the interval linear programming problem". Chiang Mai J. Sci., vol.42(2), p. 501-511,2015. http://epg.science.cmu.ac.th/ejournal/

– Ammar S. and T. Eljerbi "On solving fuzzy rough multi-objective integer linear fractional programming problem". J. Intell. fuzzy syst. ;vol. 3(4): p. 2099-2120, 2019. https://doi.org/10.3233/jifs-182552

– Hamdy T. "Operations Research. An Introduction Eighth Edition", University of Arkansas, Fayetteville, River, New Jersey, 2007. Operation Research An Introduction 8th Edition H.A. Taha | 영 이 - Academia.edu

– Hamzehee A. , M. Yaghoobi, M. Mashinchi 'Linear Programming with rough interval coefficients", Journal of Intelligent &fuzzy systems, Vol.26, PP.1179-1189, 2014, DOI:10.3233/IFS-130804.

– Kim H., I. Kenichi and G. Mitsuo, (1993), "A De Novo Approach for Bi-Criteria 0-1 Linear Programming with Interval Coefficients under Gub Structures", Computers and Industrial Engineering Vol. 25, Nos 1-4, pp. 17-20. https://doi.org/10.1016/0360-8352%2893%2990210-O

– Pardalos P. and D. wettearn, "Applied Optimization", Springer-Verlag, Berlin Heidlberg, pp.243-262, 2010.

– Pawlak Z., "Rough sets". Int. J. Comput. Inf. Sci. vol.11 p.341-356, 1982. https://doi.org/10.1007/BF01001956

– Pawlak Z., and R. Slowinski, "Rough set approach to multi-attribute decision analysis". Invited Review, Eur. J. of Oper. Res. Vol.72 p. 443-459, 1994. https://doi.org/10.1016/0377-2217(94)90415-4

– Zhang Z., X.Wang, and Lu J. "Multi-objective immune genetic algorithm solving nonlinear interval-valued programming". Computer science Eng. Appl. of Artif. Intell. vol. 67, p. 235-245, 2018. https://doi.org/10.1016/j.engappai.2017.10.004