

تقدير معلمات عملية وايبل التصادفية لبيانات غير كاملة - دراسة مقارنة -

شيماء وليد محمود*

sh_redrose.2008@yahoo.com

المستخلص:

يتناول هذا البحث دراسة عملية وايبل التصادفية لبيانات غير كاملة في حالتين، حالة الفشل المبثور و حالة الوقت المبثور. إذ تم تقدير معلمات هذه العملية باستخدام طريقة معلمية هي طريقة الإمكان الأعظم، وتم إيجاد مقدر المعدل الزمني للحدوث لأوقات الفشل. فضلاً عن استخدام طريقة لامعلمية هي طريقة المقدر اللبي لتقدير المعدل الزمني للحدوث وللمقارنة بين الحالتين كونه مقدرًا لامعلميًا. كما تم إيجاد المقدر غير المتحيز وحدود الثقة لمعلمة الشكل في كلتا الحالتين. وتتضمن الدراسة تطبيقاً عملياً على توقفات فرن معمل أسمنت بادوش بالساعات، إذ تم تقدير المعدل الزمني للحدوث لتوقفات الفرن وإيجاد المقدر اللبي ومقارنة النتائج في كلتا الحالتين. ويتضح من خلال المقارنة كفاءة ودقة تقدير المعلمات في حالة الوقت المبثور أفضل من حالة الفشل المبثور، وإن المعدل الزمني لحدوث توقفات الفرن في تزايد مستمر بمرور الزمن.

الكلمات المفتاحية: عملية وايبل، الفشل المبثور، الوقت المبثور.

Estimating Parameters of Stochastic Weibull Process for

Incomplete Data-A Comparative Study-

Abstract:

This research deals with the study of the stochastic weibull process in two cases of incomplete data: the failure truncated case and the time truncated case. These parameters were estimated using parametric method by the maximum likelihood method, to find the rate of occurrence failure times. The kernel estimator was used as a non-parametric method for estimating the rate of occurrence and comparison between two estimators. The unbiased estimator and confidence limits for the shape parameter were found in both cases.

*مدرس مساعد / قسم الإحصاء والمعلوماتية / كلية علوم الحاسوب والرياضيات / جامعة الموصل

This study includes practical application on stops times (hours) in oven the Badush Cement plant , as time rate is estimated to occur stops the oven and find kernel estimator and a comparative study of the results in both cases. It is clear by comparing the efficiency and accuracy of estimating the parameters in the time truncated case best of failure truncated case , and that the time rate for occur stops oven continues to increase over time.

Keywords: Weibull Process, Failure Truncated, Time Truncated.

Introduction

(1) مقدمة:

تعد عملية وايبيل من العمليات التصادفية التي تستخدم لنمذجة الظواهر العشوائية ، ولاسيما تلك التي تعتمد على الزمن في حدوثها، إذ إن عملية وايبيل حالة خاصة من العملية البواسونية غير المتجانسة ، تسمى أحياناً بعملية قانون القوة (Power Law Process) [Yu, et al, 2007]. وقد تم تخصيص هذا البحث لدراسة عملية وايبيل في حالة الفشل المبتور، وحالة الوقت المبتور لبيانات غير كاملة وتقدير معلماتها باستخدام طريقة الإمكان الأعظم ، ثم المقارنة بين الحالات باستخدام متوسط مربعات الخطأ. ويطلق على العملية البواسونية غير المتجانسة الموصوفة بدالة وايبيل للمعدل الزمني للحدوث اسم عملية وايبيل (Weibull Process) ، والسبب في ذلك هو أن التوزيع الاحتمالي للاوقات بين حدوث الحوادث يتوزع على وفق توزيع وايبيل (Weibull Distributio) [الخياط وسليمان، 2007]. إن توزيع وايبيل استخدم في اغلب الأحيان في حقل تحليل بيانات الحياة بسبب مرونته وقدرته على محاكاة سلوك التوزيعات الإحصائية الأخرى مثل التوزيع الطبيعي والآسي، كما أنه يستخدم لنمذجة الوقت قبل الفشل (time to failure) [Hsu, et al, 2011].

وقد درس هذه العملية العديد من الباحثين منهم مثلاً [Crow, 1974, 1982] و [Ryan, 2003]. وقام كل من الباحثين [Yu, et al, 2008] بتطوير الطرائق الكلاسيكية للاستدلال الإحصائي وتحليلات التنبؤ لعملية وايبيل أو عملية قانون القوة لبيانات مبتورة من اليسار باعتبار أوقات الفشل الأولى $\{X_i\}_{i=1}^{r-1}$ مفقودة. أما [Tian, et al, 2011] فقد قام بدراسة الاستدلال الإحصائي وتحليلات التنبؤ لعملية وايبيل للبيانات المبتورة بالطرائق البيزية ، إذ ركزت الدراسات الأخيرة على اختبارات حسن المطابقة الملائمة لهذه العملية.

(2) عملية وايبيل: Weibull Process

تعد عملية وايبيل النموذج المستخدم على نحو واسع لتحليل بيانات الفشل من دراسة نماذج نمو المعولية (Reliability Grow Model) [Tian, et al, 2011]. وتعود الأفكار الأولى لهذه العملية إلى الباحث (Duane, 1964) الذي قام بدراسة العملية البواسونية غير المتجانسة الموصوفة بدالة وايبيل ، ورسم متوسط الوقت المتراكم بين حالات الفشل ضد وقت التشغيل المتراكم.

فإذا كانت العملية التصادفية $\{N(t), t > 0\}$ هي عملية وايبيل فإن المعدل الزمني للحدوث موصوف بالصيغة الآتية:

$$\lambda(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}, \quad \alpha, \beta > 0 \quad \dots (1)$$

ومن مواصفات هذه العملية أن توزيع الأوقات بين حدوث الحوادث يتبع توزيع وايبيل بدالة كثافة احتمال [الخياط وسليمان، 2007]:

$$f(t|\beta, \alpha) = \alpha\beta t^{\beta-1} e^{-\alpha t^\beta} \quad \dots (2)$$

إذ إن α تمثل معلمة القياس (Scale Parameter) ، و β تمثل معلمة الشكل (Shape Parameter). فإذا كانت معلمة الشكل β في دالة وايبيل للمعدل الزمني للحدوث في الصيغة (1) اكبر من الواحد فإن هنالك تزايداً في المعدل الزمني للحدوث بمرور الزمن، أما إذا كانت أقل من الواحد فإن هنالك تناقصاً في المعدل الزمني للحدوث بمرور الزمن.

وفي حالة الفشل المبتور نفرض أن $\{x_i\}_{i=1}^n$ تمثل أوقات الفشل المتعاقبة المحددة مسبقاً، فإن دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لـ n من أوقات الفشل هي: [Yu, et al, 2008]

$$f(x_1, \dots, x_n) = (\alpha\beta)^n \exp(-\alpha x_n^\beta) \prod_{i=1}^n x_i^{\beta-1}, \quad 0 < x_1 < \dots < x_n \quad \dots (3)$$

أما لحالة الوقت المبتور نفرض أن t محدد و $0 < x_1 < \dots < x_n < t$ تمثل أوقات الفشل المشاهدة، وعليه فإن دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لـ $\{x_1, \dots, x_n, N = n\}$ هي:

$$f(x_1, \dots, x_n; N = n) = (\alpha\beta)^n \exp(-\alpha t^\beta) \prod_{i=1}^n x_i^{\beta-1}, \quad n > 0 \quad \dots (4)$$

و لحالة البيانات غير الكاملة نفرض أن $\{x_i\}_{i=1}^{r-1}$ بيانات مفقودة ، إذ أن $\{1 \leq r < n\}$ ، و أن البيانات المفقودة في اغلب الأحيان تحدث لأسباب مختلفة منها المشاهدات في المرحلة التطويرية

المبكرة لاختبار الأجهزة لا يمكن أن تشاهد [Yu, et al, 2008]. ويرمز للبيانات المعلومة بالرمز $Y_{obs}^{ft} = \{x_i\}_{i=r}^n$ في حالة الفشل المبتر، أما في حالة الوقت المبتر فيرمز للبيانات المعلومة بالرمز $Y_{obs}^{tt} = \{x_r, \dots, x_n, t\}$. وقبل دراسة الحالتين نذكر التعريفين الآتيين:

$$\int_{D(m;a,b)} dt_1 \dots dt_m = \frac{(b-a)^m}{m!} \quad \dots (5)$$

$$\int_{D(m;a,b)} dF(t_1) \dots dF(t_m) = \frac{[F(b) - F(a)]^m}{m!} \quad \dots (6)$$

إذ إن m أي عدد صحيح موجب، a و b أعداد حقيقية على أن $a < b$ و $F(t)$ هي أية دالة متزايدة وقابلة للاشتقاق و $D(m; a, b) = \{(t_1, \dots, t_m)^T : a < t_1 < \dots < t_m < b\}$.

(3) تقدير معلمات عملية وايبيل:

Estimating Parameters of Weibull Process

هناك عدة طرائق اقترحها العديد من الباحثين لتقدير معلمات عملية وايبيل منها طرائق معلمية وأخرى لامعلمية و بيزية. فقد قام الباحث [Yu, et al, 2008] باستخدام طريقة الإمكان الأعظم لتقدير معلمات عملية وايبيل للبيانات غير الكاملة، تم في بحث [Tian, et al, 2011] عرض عملية وايبيل باستخدام استدلال بيز لبيانات غير كاملة، أما في بحث [Yu, et al, 2007] فتمت دراسة قضايا عدة لعملية وايبيل على بيانات كاملة، وقد تم استخدام: أ. طريقة الإمكان الأعظم في حالة الفشل المبتر:

Maximum Likelihood Method in Failure Truncated Case

تعد طريقة الإمكان الأعظم أكثر الطرائق استخداماً في تقدير معلمات العمليات التصادفية ودالة المعولية، وذلك لسهولة استخدام هذه الطريقة في إيجاد مقدرات معلمات توزيعات أوقات الفشل [الصفراوي والجمال، 2006]، وتهدف هذه الطريقة إلى جعل دالة الإمكان للمتغيرات العشوائية في نهايتها العظمى.

ولتقدير معلمات α و β لعملية وايبيل باستخدام طريقة الإمكان الأعظم للبيانات غير الكاملة نفرض أن $\{x_i\}_{i=1}^{r-1}$ بيانات مفقودة، وللحصول على دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للبيانات

المشاهدة $Y_{obs}^{ft} = \{x_i\}_{i=r}^n$ تكامل الصيغة (3) بالنسبة إلى $\{x_i\}_{i=1}^{r-1}$ ، وباستخدام التعريف في الصيغة (6) بفرض $F(t) = \frac{t^\beta}{\beta}$ إذ إن $a = 0$ و $b = x_r$ و $m = r - 1$ نحصل على أن

$$\int_{D(m;a,b)} dF(t_1) \dots dF(t_m) = \left[\frac{x_r^\beta}{\beta} - 0 \right]^{r-1} / (r-1)! \\ = x_r^{(r-1)\beta} \cdot \beta^{-r+1} / (r-1)!$$

وعليه فإن

$$f(x_r, \dots, x_n) = \frac{\alpha^n \beta^{n-r+1} \exp(-\alpha x_n^\beta)}{(r-1)!} \cdot x_r^{(r-1)\beta} \prod_{i=r}^n x_i^{\beta-1}, \\ 0 < x_r < \dots < x_n \quad \dots (7)$$

وعند عدم وجود بيانات مفقودة نعوض عن $r = 1$ في الصيغة في أعلاه فنحصل على الصيغة (3). إن اللوغارتم الطبيعي لدالة الإمكان هو:

$$\ln L = n \ln \alpha + (n - r + 1) \ln \beta - \alpha x_n^\beta + (r - 1) \beta \ln x_r + \\ (\beta - 1) \sum_{i=r}^n \ln x_i \quad \dots (8)$$

ولإيجاد مقدري الإمكان الأعظم للمعلمتين α و β تم أخذ المشتقة الأولى للصيغة (8) بالنسبة إلى كل من α و β وكالاتي:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} - x_n^\beta \quad \dots (9)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta} = \frac{n - r + 1}{\beta} - \alpha x_n^\beta \ln x_n + (r - 1) \ln x_r + \sum_{i=r}^n \ln x_i \quad \dots (10)$$

وبمساواة المعادلتين في أعلاه بالصفر نحصل على أن

$$\hat{\alpha} = \frac{n}{x_n^\beta} \quad \dots (11)$$

$$\hat{\beta} = \frac{(n - r + 1)}{n \ln x_n - (r - 1) \ln x_r - \sum_{i=r}^n \ln x_i}$$

إن مقام المعادلة في أعلاه يمكن تبسيطه بالشكل الآتي:

$$\begin{aligned}
& n \ln x_n - (r-1) \ln x_r - \sum_{i=r}^n \ln x_i \\
&= n \ln x_n - r \ln x_r + \ln x_r - [\ln x_r + \ln x_{r+1} + \dots + \ln x_{n-1} + \ln x_n] \\
&= n \ln x_n - r \ln x_r + \ln x_r - \ln x_r - \ln x_n - [\ln x_{r+1} + \dots + \ln x_{n-1}] \\
&= (n-1) \ln x_n - r \ln x_r - \sum_{i=r+1}^{n-1} \ln x_i \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \ln x_n - r \ln x_r - \sum_{i=r+1}^{n-1} \ln x_i \\
&= \sum_{i=1}^r \ln x_n + \sum_{i=r+1}^{n-1} \ln x_n - r \ln x_r - \sum_{i=r+1}^{n-1} \ln x_i \\
&= r \ln x_n + \sum_{i=r+1}^{n-1} \ln x_n - r \ln x_r - \sum_{i=r+1}^{n-1} \ln x_i \\
&= \sum_{i=r+1}^{n-1} \ln\left(\frac{x_n}{x_i}\right) + r \ln\left(\frac{x_n}{x_r}\right)
\end{aligned}$$

وعليه فإن

$$\hat{\beta} = \frac{(n-r+1)}{\sum_{i=r+1}^{n-1} \ln\left(\frac{x_n}{x_i}\right) + r \ln\left(\frac{x_n}{x_r}\right)} \quad \dots (12)$$

أما لتقدير $M(x_n)$ التي تسمى متوسط الوقت المنجز بين حالات الفشل للنظام عند الفشل x_n (Mean Time Between Failure) (MTBF) وهو مقياس لمدى معولية عمر النظام أو جهاز ما، فيكون وفق الصيغة الآتية:

$$\hat{M}(x_n) = \frac{1}{\hat{\lambda}(x_n)} = \frac{1}{\hat{\alpha}\hat{\beta}x_n^{\hat{\beta}-1}} = \frac{x_n^{1-\hat{\beta}}}{(\hat{\alpha}\hat{\beta})}$$

وعند التعويض عن قيمة $\hat{\alpha}$ في الصيغة في أعلاه نحصل على :

$$\hat{M}(x_n) = \frac{x_n}{(n\hat{\beta})} \quad \dots (13)$$

ب. طريقة الإمكان الأعظم في حالة الوقت المبتر:

Maximum Likelihood Method in Time Truncated Case

لتقدير معلمات α و β لعملية وايل في حالة الوقت المبتر باستخدام طريقة الإمكان الأعظم للبيانات غير الكاملة نفرض أن $\{x_i\}_{i=1}^{r-1}$ بيانات مفقودة ، وللحصول على دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للبيانات المشاهدة $Y_{obs}^{tt} = \{x_r, \dots, x_n, t\}$ نكامل الصيغة (4) بالنسبة إلى $\{x_i\}_{i=1}^{r-1}$ باستخدام التعريف في الصيغة (6) أيضاً بفرض $F(t) = \frac{t^\beta}{\beta}$ إذ إن $a = 0$ و $b = x_r$ و $m = r - 1$ ، فيتم الحصول على:

$$f(x_r, \dots, x_n; N = n) = \frac{\alpha^n \beta^{n-r+1} \exp(-\alpha t^\beta)}{(r-1)!} \cdot x_r^{(r-1)\beta} \prod_{i=r}^n x_i^{\beta-1},$$

$$0 < x_r < \dots < x_n < t \quad \dots (14)$$

وإثناء عدم وجود بيانات مفقودة نعوض عن $r = 1$ في الصيغة المذكورة أعلاه فنحصل على الصيغة (4). إن اللوغارتم الطبيعي لدالة الإمكان هو:

$$\ln L = n \ln \alpha + (n - r + 1) \ln \beta - \alpha t^\beta + (r - 1) \beta \ln x_r +$$

$$(\beta - 1) \sum_{i=r}^n \ln x_i \quad \dots (15)$$

ولإيجاد المقدّر الأعظم للمعلمتين α و β نأخذ المشتقة الأولى للصيغة (15) بالنسبة إلى α و β وكالآتي:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} - t^\beta \quad \dots (16)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta} = \frac{n - r + 1}{\beta} - \alpha t^\beta \ln t + (r - 1) \ln x_r + \sum_{i=r}^n \ln x_i \quad \dots (17)$$

وبمساواة المعادلتين المذكورتين في أعلاه بالصفر نحصل على أن :

$$\hat{\alpha} = \frac{n}{t^{\hat{\beta}}} \quad \dots (18)$$

$$\hat{\beta} = \frac{(n - r + 1)}{n \ln t - (r - 1) \ln x_r - \sum_{i=r}^n \ln x_i}$$

ويمكن تبسيط مقام المقدّر في أعلاه بالشكل الآتي:

$$\begin{aligned}
& n \ln t - (r - 1) \ln x_r - \sum_{i=r}^n \ln x_i \\
&= n \ln t - r \ln x_r + \ln x_r - [\ln x_r + \ln x_{r+1} + \cdots + \ln x_n] \\
&= n \ln t - r \ln x_r + \ln x_r - \ln x_r - [\ln x_{r+1} + \cdots + \ln x_n] \\
&= n \ln t - r \ln x_r - \sum_{i=r+1}^n \ln x_i \\
&= \sum_{i=1}^n \ln t - r \ln x_r - \sum_{i=r+1}^n \ln x_i \\
&= \sum_{i=1}^r \ln t + \sum_{i=r+1}^n \ln t - r \ln x_r - \sum_{i=r+1}^n \ln x_i \\
&= r \ln t + \sum_{i=r+1}^n \ln t - r \ln x_r - \sum_{i=r+1}^n \ln x_i \\
&= \sum_{i=r+1}^n \ln\left(\frac{t}{x_i}\right) + r \ln\left(\frac{t}{x_r}\right)
\end{aligned}$$

وعليه فإن

$$\hat{\beta} = \frac{(n - r + 1)}{\sum_{i=r+1}^n \ln\left(\frac{t}{x_i}\right) + r \ln\left(\frac{t}{x_r}\right)} \quad \dots (19)$$

ولتقدير $M(t)$ التي تسمى متوسط الوقت المنجز بين حالات الفشل للنظام عند الوقت t (Mean Time Between Failure) (MTBF)، فيكون وفق الصيغة الآتية:

$$\hat{M}(t) = \frac{t}{(n \hat{\beta})} \quad \dots (20)$$

Inference for Shape Parameter

(4) الاستدلال لمعلمة الشكل:

إن المقدّر غير المتحيز لمعلمة الشكل β في حالة الفشل المبتور يكون وفق الصيغة

الآتية: [Yu, et al, 2008]

$$\tilde{\beta} = \frac{(n - r - 1)\hat{\beta}}{n - r + 1} \quad \dots (21)$$

أما حدود الثقة من الجانبين لهذه المعلمة عند مستوى معنوية γ^* يكونان بالصيغة الآتية:

$$\left[\frac{\hat{\beta} \cdot x^2(2n-2r; \frac{1-\gamma^*}{2})}{2(n-r+1)}, \frac{\hat{\beta} \cdot x^2(2n-2r; \frac{1+\gamma^*}{2})}{2(n-r+1)} \right] \quad \dots (22)$$

وفي حالة الوقت المبتور فإن المقدّر غير المتحيز لـ β يكون بالصيغة الآتية:

$$\tilde{\beta} = \frac{(n-r)\hat{\beta}}{n-r+1} \quad \dots (23)$$

وحدا الثقة لهذه المعلمة عند مستوى معنوية γ^* فيكونان بالصيغة الآتية:

$$\left[\frac{\hat{\beta} \cdot x^2(2n-2r+2; \frac{1-\gamma^*}{2})}{2(n-r+1)}, \frac{\hat{\beta} \cdot x^2(2n-2r+2; \frac{1+\gamma^*}{2})}{2(n-r+1)} \right] \quad \dots (24)$$

Goodness-of-fit test

(5) اختبار حسن المطابقة:

لاختبار البيانات هل أنها ملائمة لعملية واييل نفرض الفرضية الآتية:

H_0 البيانات تتبع عملية واييل

H_1 البيانات لا تتبع عملية واييل

ففي حالة البيانات الكاملة هناك عدة طرائق لاختبار ملائمة البيانات، مثل طريقة الرسم لـ Duane واختبار نسبة القوى واختبار نسبة اللوغارتم، ولتقييم حسن المطابقة لعملية واييل فإن الباحث (Secretariat, 1982) استخدم نهج اختبار مربع كاي (Chi-squared test) بالاختبار الإحصائي χ^2_{IEC} . أما في حالة البيانات غير الكاملة فقد استخدم اختبار مربع كاي في حالة الفشل المبتور لاختبار هل البيانات ملائمة لعملية واييل أم لا الذي يكون بالصيغة الآتية: [Yu, et al, 2008].

$$x_{ft}^2 = 2 \sum_{k=1}^{n-r-1} \log[(n-r+1)\hat{\beta}^{-1} / \sum_{i=1}^k (n-i) \log(\frac{x_{n-i+1}}{x_{n-i}})] , \quad \dots (25)$$

إذ إن $n \geq r+1$ فإذا وقعت قيمة الاختبار ضمن المدة الآتية:

$$[x^2(2(n-r-1); 0.5(1-\gamma^*)), x^2(2(n-r-1); 0.5(1+\gamma^*))]$$

فإن فرضية العدم تقبل عند مستوى معنوية γ^* ، وعليه لذا فإن البيانات ملائمة لنموذج عملية واييل، أما بالنسبة لحالة الوقت المبتور فإن الاختبار يكون وفق الصيغة الآتية:

$$x_{tt}^2 = 2 \sum_{k=1}^{n-r} \log[(n-r+1)\hat{\beta}^{-1} / \sum_{i=1}^k (n-i+1) \log(\frac{x_{n-i+2}}{x_{n-i+1}})] , \dots (26)$$

إذ إن $n \geq r+1$ و $x_{n+1} = t$ فإذا وقعت قيمة الاختبار ضمن المدة الآتية:
 $[x^2(2(n-r); 0.5(1-\gamma^*)), x^2(2(n-r); 0.5(1+\gamma^*))]$
 كذلك فإن فرضية العدم تقبل عند مستوى معنوية γ^* ، وعليه لذا فإن البيانات ملائمة لنموذج عملية وايبيل.

(6) المقدر اللبي للمعدل الزمني للحدوث:

Kernel Estimator of the Rate of Occurrence

لو فرضنا أن $\{N(t); t > 0\}$ تمثل عدد الحوادث التي تحدث في المدة الزمنية $(0, t_0]$ ، إذ أن t_0 تمثل زمن حدوث الحادثة الأخيرة، وفرضنا أن العملية التصادفية $\{X_n, n \geq 1\}$ تمثل أوقات الحدوث البينية للحوادث أو الأوقات الزمنية بين حدوث الحوادث. لقد قام الباحثان [سليمان والخياط، 2010] اقترح استخدام مقدر لاعملي للمعدل الزمني للحدوث $\lambda(t)$ ينتمي إلى فصيلة المقدرات اللبية (Kernel Estimator)، وقد استخدم هذا المقدر في هذه الدراسة لتقدير المعدل الزمني لحدوث التوقعات للمقارنة بين الحالتين بوصفه مقدرًا لاعملياً، ويتميز هذا المقدر بأنه مقدر ممد (Smooth) خالٍ من التعرجات الحادة، كما أنه لا يعتمد على أية فروض صارمة ، مما يؤدي بالنتيجة إلى صورة واضحة ونقية للشكل العام للدالة $\lambda(t)$ ، كما في الصيغة الآتية:

$$\hat{\lambda}(t) = \frac{1}{b(n)} \sum_{j=1}^n W\left(\frac{t-t_j}{b(n)}\right), \quad t > 0 \quad \dots (27)$$

إذ إن n تمثل عدد الحوادث التي حدثت في المدة الزمنية $(0, t_0]$ ، و $t_1, t_2, \dots, t_n$ تمثل الأوقات بين حدوث الحوادث أو المشاهدات. أما الدالة $W(\cdot)$ فإنها تمثل دالة اللب، وهي دالة محددة قابلة للتكامل وموزونة وغير سالبة ، وتسمى بدالة النافذة (Window Function) ، وتقوم بتمهيد المقدر وإزالة التعرجات منه. أما بالنسبة لـ $b(n)$ فهي دالة سعة القيد (Band Width) وتسمى معلمة التمهيد ويشترط فيها أنها تساوي صفراً عندما n تقترب من المالانهاية. وهناك معالجة لاختيار معلمة سعة القيد ، وذلك باختيار عدد صحيح وموجب، مثل k ، ثم تعرف سعة القيد عند نقطة مثل x لكي تكون القيمة الأصغر h بحيث أن مركز الدائرة عند النقطة x بنصف قطر h يحتوي على k من نقاط البيانات [Peng, 2003]. من المعروف جيداً أن الاختيار لدالة النافذة $W(\cdot)$ من الأهمية أقل بكثير من اختيار معلمة سعة القيد. فهناك العديد من دوال النافذة التي

اقترحها العديد من الباحثين ، كما في بحث [Thanoon, 1994] الذي استخدم نافذة بارتليت التي تسمى بالنافذة المثلثية (Triangular Window) ، والتي تعرف رياضياً بالصيغة الآتية: [سليمان و الخياط، 2010]

$$W(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{m}; & |x| \leq m \\ 0; & |x| > m \end{cases} \quad \dots(28)$$

إذ إن m تمثل نقطة القطع (Truncation Point). والنافذة في أعلاه تتميز بالسهولة والكفاءة مقارنة مع النوافذ الأخرى المعروفة ، كنافذة المستطيل و نافذة كاوز و نافذة بارزن.

(7) معيار المقارنة:

لغرض إجراء المقارنة بين مقدرات المعلمات في حالة الفشل المبتور وحالة الوقت المبتور للبيانات غير الكاملة وبيان مدى دقة وكفاءة تقدير المعلمات فقد استخدم متوسط مربعات الخطأ (Mean Square Error) الذي يكون وفق الصيغة الآتية:

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{\lambda}_{wei}(t_i) - \hat{\lambda}(t_i))^2 \quad \dots (29)$$

إذ إن $\hat{\lambda}_{wei}(t_i)$ تمثل مقدر المعدل الزمني لدالة وايبل، أما $\hat{\lambda}(t_i)$ فتتمثل المقدر اللبي.

(8) الجانب التطبيقي: Application

تناول هذا الجانب أوقات توقفات فرن بالساعات في معمل أسمنت بادوش، إذ تم جمع البيانات من سجلات توقفات الفرن في معمل أسمنت بادوش للتوسيع للمدة من 2012/6/24 ولغاية 2012/8/22 [جاسم، 2013]. وهذه البيانات تتضمن 60 مشاهدة لأوقات توقفات الفرن (أوقات الفشل)، إذ إن أوقات الفشل العشرة الأولى تكون غير معلومة ، وبذلك فهذه البيانات تمثل بيانات غير كاملة . فعند دراسة هذه البيانات في حالة الفشل المبتور، نفرض أن $n = 60$ و $r = 11$ ، وقبيل تقدير المعلمات تم اختبار البيانات غير الكاملة من جانب ملائمتها لعملية وايبل عند مستوى معنوية 0.95 باستخدام المختبر الإحصائي في الصيغة (25)، فقد تم الحصول على قيمة المختبر الإحصائي (اختبار مربع كاي) باستخدام برنامج Excel 2007 ، وإعداد برنامج باللغة الحاسوبية Matlab V.7.6 كما هو مبين في الجدول الآتي:

الجدول (1): يبين نتيجة اختبار البيانات غير الكاملة في حالة الفشل المبتور لعملية وايبيل

حدود الاختبار	x_{ft}^2
[70.792,124.992]	101.0954

ونلاحظ أن قيمة الاختبار تقع ضمن حدود الاختبار ، وهذا يدل على أن البيانات تتبع عملية وايبيل أي ملائمة لها. وتم تقدير معلمات عملية وايبيل ومتوسط الوقت المنجز بين حالات الفشل عند وقت الفشل الأخير باستخدام برنامج Excel 2007 ، وإعداد برنامج باللغة الحاسوبية Matlab V.7.6 والنتائج موضحة في الجدول الآتي:

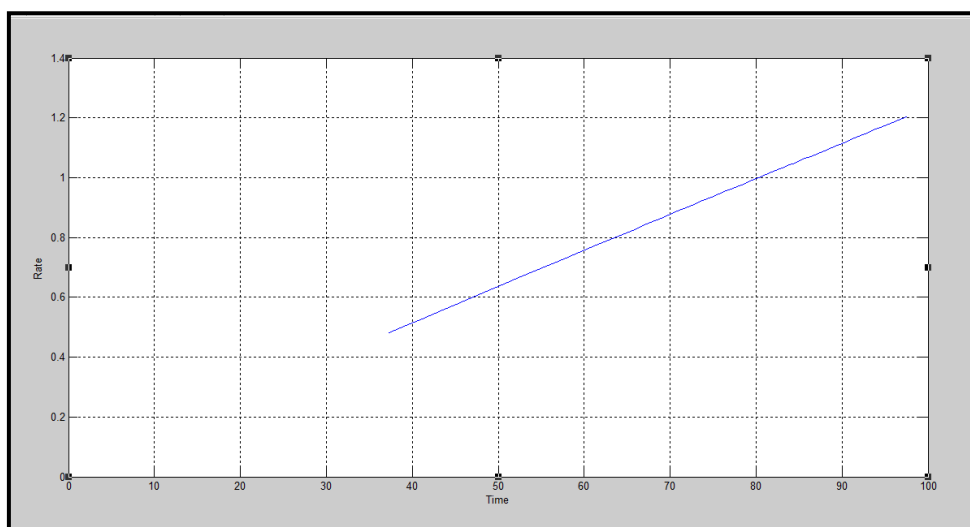
الجدول (2): يبين مقدرات الإمكان الأعظم لمعلمات عملية وايبيل في حالة الفشل المبتور

$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{M}(x_{60})$
0.0078	1.9537	0.8313

وقد تمت ملاحظة أن قيمة معلمة الشكل اكبر من الواحد في الجدول المذكور في أعلاه وهذا يدل على أن هناك تزايداً في المعدل الزمني لحدوث أوقات الفشل بمرور الزمن. وبالتعويض عن القيمتين المقدرتين للمعلمتين α و β في دالة وايبيل للمعدل الزمني لحدوث توقفات الفرن (أوقات الفشل) الموضحة في الصيغة (1) نحصل على أن

$$\hat{\lambda}_{wei}(t) = 0.0152 t^{0.9537}, \quad 0 < t \leq 97.4501$$

وباستخدام اللغة الحاسوبية Matlab V.7.6 تم رسم المعدل الزمني لحدوث أوقات الفشل لعملية وايبيل المقدر بطريقة الإمكان الأعظم وكالاتي:



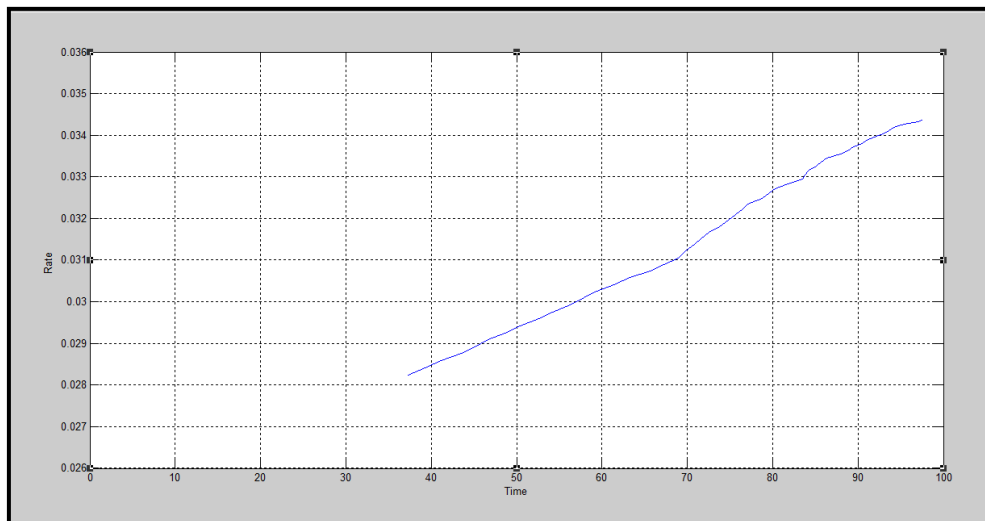
الشكل (1): يبين رسم المعدل الزمني لحدوث أوقات الفشل لعملية وايبيل في حالة الفشل المبتور

نلاحظ من الرسم أن أوقات الفشل العشرة الأولى غير معلومة ، والمعدل الزمني لحدوث توقفات الفرن في تزايد بمرور الزمن. أما المقدّر غير المتحيز لمعلمة الشكل وحدا الثقة لها باستخدام الصيغة (21) و(22) فكانت مبينة في الجدول الآتي:

الجدول (3): يبين المقدّر غير المتحيز وحدّي الثقة لمعلمة الشكل في حالة الفشل المبّتور

$\tilde{\beta}$	الحد الأدنى	الحد الأعلى
1.8755	1.4165	2.4866

نلاحظ أن قيمة المقدّر غير المتحيز تقع ضمن حدود الثقة. وقد تم إعداد برنامج خاص باللغة الحاسوبية Matlab V.7.6 لإيجاد المقدّر اللبي للمعدل الزمني لحدوث أوقات الفشل (أوقات توقفات الفرن) لبيانات غير كاملة ورسمه كما هو موضح في الشكل (2)، إذ إن النافذة التي تم استخدامها لإيجاد المقدّر اللبي هي النافذة المثلثية (نافذة بارتليت) المعروفة بكفاءتها، أما معلمة سعة القيد المستخدمة $b(n)$ فكانت الانحراف المعياري للفترات بين حدوث أوقات الفشل.



الشكل (2): يبين المقدّر اللبي للمعدل الزمني لحدوث أوقات الفشل في حالة الفشل المبّتور

ونلاحظ أيضاً أن أوقات الفشل العشرة الأولى غير معلومة ، والمقدّر اللبي في تزايد بمرور الزمن، مما يدل على زيادة استهلاك الفرن بمرور الزمن.

أما عند دراسة بيانات توقفات الفرن غير الكاملة في حالة الوقت المبّتور، وبما أن أوقات الفشل العشرة الأولى غير معلومة فعندئذٍ $r = 11$ و $t = 98$ ، فتم اختبار البيانات لعملية وايل عند مستوى معنوية 0.95 باستخدام برنامج Excel 2007، وإعداد برنامج باللغة الحاسوبية Matlab V.7.6، وتم الحصول على قيمة المختبر الإحصائي المبين في الصيغة (26)، وكما هو مبين في الجدول الآتي:

الجدول (4): يبين نتيجة اختبار البيانات غير الكاملة في حالة الوقت المبتور لعملية وايبيل

حدود الاختبار	x_{tt}^2
[72.506,127.276]	104.8725

إذ نلاحظ من الجدول في أعلاه أن قيمة المختبر الإحصائي تقع ضمن الحدود الموضحة في الجدول، وهذا يدل على أن بيانات توقفات الفرن غير الكاملة تتبع عملية وايبيل. وبعد ملائمة البيانات لعملية وايبيل تم تقدير معلمات عملية وايبيل ومتوسط الوقت المنجز بين حالات الفشل عند الزمن $t = 98$ باستخدام برنامج Excel 2007 وإعداد برنامج باللغة الحاسوبية Matlab V.7.6 كما هي مبينة في الجدول الآتي:

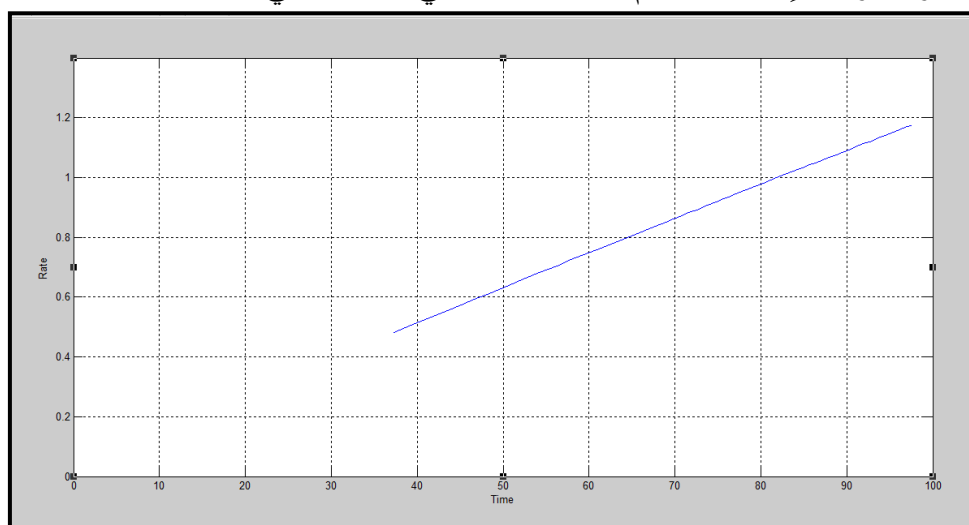
الجدول (5): يبين مقدرات الإمكان الأعظم لمعلمات عملية وايبيل في حالة الوقت المبتور

$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{M}(t)$
0.0087	1.9282	0.8471

إذ نلاحظ من الجدول أن قيمة معلمة الشكل أكبر من الواحد ، وهذا يدل على أن هنالك تزايداً في المعدل الزمني لحدوث أوقات توقفات الفرن بمرور الزمن. وبالتعويض عن القيمتين المقدرتين للمعلمتين α و β في دالة وايبيل للمعدل الزمني لحدوث توقفات الفرن (أوقات الفشل) الموضحة في الصيغة (1) نحصل على أن

$$\hat{\lambda}_{wei}(t) = 0.0168 t^{0.9282}, \quad 0 < t \leq 97.4501$$

وباستخدام اللغة الحاسوبية Matlab V.7.6 تم رسم المعدل الزمني لحدوث أوقات الفشل لعملية وايبيل المقدرة بطريقة الإمكان الأعظم وكما هو مبين في الشكل الآتي:



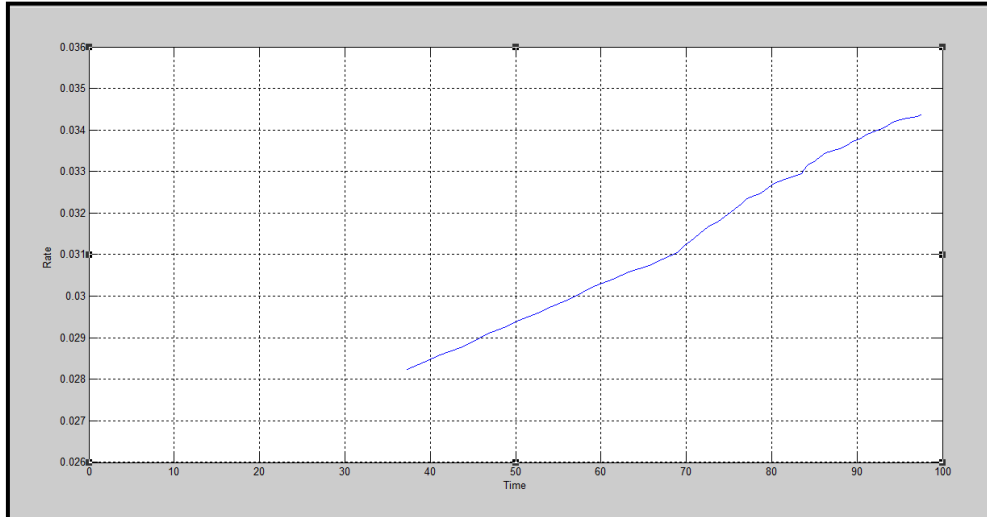
الشكل (3): يبين رسم المعدل الزمني لحدوث أوقات الفشل لعملية وايبيل في حالة الوقت المبتور

من خلال الرسم نلاحظ أن أوقات الفشل العشرة الأولى غير معلومة والمعدل الزمني لحدوث أوقات الفشل في تزايد بمرور الزمن، وهذا يدل على زيادة توقفات الفرن واستهلاكه. أما بالنسبة للمقدر غير المتحيز وحدّي الثقة لمعلمة الشكل عند مستوى معنوية 0.95 فقد تم الحصول عليهما باستخدام الصيغة (23) و(24) وكما هو مبين في الجدول الآتي:

الجدول (6): يبين المقدر غير المتحيز وحدّي الثقة لمعلمة الشكل في حالة الوقت المبتور

$\tilde{\beta}$	الحد الأدنى	الحد الأعلى
1.8897	1.4311	2.4982

ونلاحظ أن قيمة المقدر غير المتحيز تقع ضمن حدود الثقة. وبعد ذلك وباستخدام برنامج خاص باللغة الحاسوبية Matlab V.7.6 تم إيجاد المقدر اللبي للمعدل الزمني لحدوث أوقات الفشل (أوقات توقفات الفرن) لبيانات غير كاملة ورسمه كما هو موضح في الشكل الآتي:



الشكل (4): يبين المقدر اللبي للمعدل الزمني لحدوث أوقات الفشل في حالة الوقت المبتور

إذ نلاحظ من الرسم أن أوقات الفشل العشرة الأولى غير معلومة والمقدر اللبي للمعدل الزمني في تزايد بمرور الزمن، مما يدل على زيادة عطلات الفرن واستهلاكه بمرور الزمن.

لغرض مقارنة البيانات غير الكاملة في حالة الفشل المبتور ، وحالة الوقت المبتور وبيان مدى دقة وكفاءة تقديرات المعلمات في كلتا الحالتين ، فقد تم استخدام متوسط مربعات الخطأ لكلتا الحالتين بوصف المقدر اللبي $\hat{\lambda}(t_i)$ هو الأساس للمقارنة كونه مقدراً لأمعلياً ، فإذا كانت $t_r, \dots, t_n$ تمثل النقاط الزمنية التي تم إيجاد قيم المقدر اللبي عندها وباستخدام الصيغة (29) نحصل على MSE لكلتا الحالتين ، إذ تم اعداد برنامج باللغة الحاسوبية Matlab V.7.6 لإيجاد متوسط مربعات الخطأ وكانت النتائج كالآتي:

$$MSE_{ft} = 0.8186 , \quad MSE_{tt} = 0.7878$$

نلاحظ أن متوسط مربعات الخطأ في حالة الوقت المبتور أقل من متوسط مربعات الخطأ في حالة الفشل المبتور، مما يدل على دقة وكفاءة مقدرات المعلمات في حالة الوقت المبتور أفضل من حالة الفشل المبتور، أي إن مقدر المعدل الزمني لحدوث أوقات الفشل في حالة الوقت المبتور أفضل من مقدر المعدل الزمني في حالة الفشل المبتور.

(9) الاستنتاجات: *Conclusions*

- تم التوصل من خلال هذا البحث إلى مجموعة من النتائج التي يمكن إجمالها بالنقاط الآتية:
- 1- من خلال تقدير معلمات المعدل الزمني لحدوث أوقات توقفات الفرن (أوقات الفشل) باستخدام طريقة الإمكان الأعظم في حالة الفشل المبتور والوقت المبتور نلاحظ هناك تقارب بين مقدرات المعلمات لكلتا الحالتين.
 - 2- من خلال مقدر معلمة الشكل β في كلتا الحالتين نلاحظ أنها تكون أكبر من الواحد، مما يعطي مؤشراً واضحاً على التزايد في المعدل الزمني لأوقات توقفات الفرن بمرور الزمن، أي إن الاتجاه العام لتوقفات الفرن خلال مدة الدراسة هو باتجاه التزايد بشكل عام وكما هو موضح في الأشكال الخاصة بالمعدل الزمني لأوقات الفشل لكلتا الحالتين.
 - 3- من خلال متوسط مربعات الخطأ MSE فإن مقدر المعدل الزمني لأوقات توقفات الفرن (أوقات الفشل) في حالة الوقت المبتور أكثر دقة وكفاءة من مقدر المعدل الزمني لأوقات توقفات الفرن (أوقات الفشل) في حالة الفشل المبتور لامتلاكه أقل MSE .

(10) التوصيات: *Recommendations*

- 1- نوصي بتقدير معلمات عملية وايبل التصادفية لبيانات غير كاملة بطرائق تقدير أخرى مثل المقدرات البيزية أو تقنيات ذكائية.
- 2- نوصي معمل أسمنت بادوش بالاهتمام بصيانة الفرن كون أن المعدل الزمني لأوقات توقفات الفرن متزايد مع الزمن خلال مدة الدراسة.

References

المصادر:

- 1- الخياط، باسل يونس و سليمان، مثنى صبحي، (2007)، "تحليل إحصائي للعملية البواسونية غير المتجانسة الموصوفة بعملية وايبل مع تطبيق"، المجلة العراقية للعلوم الإحصائية، العدد 12.
- 2- الصفاوي، صفاء يونس و جمال، زكريا يحيى، (2006)، "استخدام طريقة الإمكان الأعظم وطريق كابلن-مير لتقدير دالة المعولية مع التطبيق على معمل إطارات بابل"، مجلة تنمية الرافدين، مجلد 82، العدد 28.
- 3- جاسم، عمر رمزي، (2013)، "تقدير معلمات العملية التصادفية الهندسية وعملية متعلقة بها مع التطبيق"، رسالة ماجستير، كلية علوم الحاسبات والرياضيات، جامعة الموصل، العراق.
- 4- سليمان، مثنى صبحي و الخياط، باسل يونس، (2010)، "طريقة مقترحة لتقدير المعدل الزمني لحدوث الأمطار في مدينة الموصل كعملية بواسونية غير متجانسة"، المؤتمر العلمي الثاني للرياضيات - الإحصاء والمعلوماتية، جامعة الموصل.
- 5- Crow, L. H., (1974),. **"Reliability analysis for complex repairable systems"**. In: Proschan, F., Serfling, R.J. (Eds.), Reliability and Biometry—Statistical Analysis of Life Length. SIAM, Philadelphia, pp. 379–410.
- 6- Crow, L.H., (1982), **"Confidence interval procedures for the Weibull process with application to reliability growth"**. Technometrics 24, 67–72.
- 7- Duane, J.T., (1964). **"Learning curve approach to reliability monitoring"**. IEEE Trans. Aerospace 2, 563–566.
- 8- Hsu, Y.C., Pearn, W.L. and Lu, C.S., (2011), **"Capability measures for Weibull Processes with mean shift based on Erto's- weibull control chart"**. International Journal of the Physical Sciences Vol. 6(19), pp. 4533-4547.
- 9- Peng, R. D. (2003), **"Application of multi-dimensional point process Methodology to wildfire hazard assessment"**. Ph. D., University of California, Los Angeles.
- 10- Ryan, K.J., (2003), **"Some flexible families of intensities for nonhomogeneous Poisson process models and their Bayes inference"**. Qual. Reliab. Eng. Int. 19 (2), 171–181.
- 11- IEC TC-56 (Secretariat) 144 (1982), **"Tests for Validity of a Constant Failure Rate Assumption"**. IEC TC-56 Standard 605, Part 6.
- 12- Thanoon, B. Y. (1994), **"A graphical approach of estimating of functional form of the relationship between two random variables or time series"**. Journal Education and Science, 15, 337-345.

- 13- Tian, G.L., Tang, M.L. and Yu, J.W.,2011, "**Bayesian Estimation and Prediction for the Power Law Process with Left-Truncated Data**". Journal of Data Science, 9, 445-470
- 14- Yu, J. W., Tian, G. L. and Tang, M. L. (2007), "**Predictive analyses for nonhomogeneous Poisson processes with power law using Bayesian approach**". Computational Statistics and Data Analysis 51, 4254 – 4268.
- 15- Yu, J. W., Tian, G. L. and Tang, M. L. (2008)," **Statistical inference and prediction for the Weibull process with incomplete observations**". Computational Statistics and Data Analysis 52, 1587-1603.