المجلة العراقية للعلوم الإحصائية (28) 2019
ص ص [29-50]

استخدام نموذج Amsaa في تقييم اختبار نمو الموثوقية

كرم نجيب عبد الله الرمضاني *
karamnageeb@gmail.com

د. خالدة احمد محمد الحمداني **
samireisa642@gmail.com

المستخلص

يعرف نمو الموثوقية بأَنه التقدم الإِيجابي في مقياس الموثوقية خلال مدة من الزمن بحسب التغييرات في تصميم المنتج أو عمليات التصنيع، وهنالك ثلاث مساحات رئيسة لنمو الموثوقية: هي التخطيط (planning)، والتعقب (tracking)، والظهور (projecting) وتم تسليط الضوء على أَهم أُنموذج من نماذج التعقب وهو أُنموذج Crow–Amsaa، وتم تقدير معلمات الانموذج باستخدام طريقة الإِمكان الأَعظم، وكذلك تقدير أوقات الثقة الخاصة بهذه المعلمات ، وتقدير أوقات الثقة الخاصة بمعدل العمر الزمني بين الفشل اللحظي (DMTBF)، واخيراً تمت محاكاة الانموذج باستخدام طريقة مونتي كارلو باستخدام البرامجية المتخصصة (RGA).

الكلمات المفتاحية: نموذج Amsaa، اختبار نمو الموثوقية

This is an open access article under the CC BY 4.0 license http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Using Amsaa Model in Evaluating Reliability Growth Testing

Abstract

Reliability growth is defined as the positive progress in reliability over a period of time according to changes in product design or manufacturing processes. There are three main areas of reliability growth: planning, tracking and projecting. The most important model is the tracking models The model parameters were estimated using the maximum potential method as well as estimation of the confidence intervals for these parameters, estimation of the confidence intervals for the time-to-time ratio (DMTBF), and finally the model was simulated using the Monte Carlo method using specialized software (RGA) .

* طالب ماجستير / قسم الاحصاء والمعلوماتية / كلية علوم الحاسوب والرياضيات / جامعة الموصل
** مدرس / قسم الاحصاء والمعلوماتية / كلية علوم الحاسوب والرياضيات / جامعة الموصل

تاريخ استلام البحث 2018/9/30 ـــ تأريخ القبول 2018 /10/24

1- المقدمة

قام العالم لاري أج. كرو (Larry H. Crow) بتطوير أُنموذج تحليل نشاط نظم مادة الجيش الامريكي (AMSAA)(Us Army Material System Analysis Activity) حينما كان في الجيش الأمريكي خلال عقد السبعينات من القرن الماضي. يعد نمط نمو الموثوقية (AMSAA) تماماً النمط نفسه بالنسبة لفرضية دوان (Duane)؛ وعلى أية حالة فبخلاف فرضية دوان يعتمد أنموذج (AMSAA) على أساس إحصائي(Statistical Biases).

إنَّ البنية الإحصائية لانموذج (AMSAA) يكون مكافئاً لعملية بواسون غير المتجانسة (Non-Homogenous Poisson Process(NHPP)) مع دالة كثافة وايبل (Weibull). وهذا له عدة فوائد منها: إن المعلمات الخاصة بعملية بواسون غير المتجانسة(NHPP)، وكذلك الحالات بالنسبة لحدود الثقة يمكن أن تكون مقدرة على أساس صارم من الناحية الإحصائية، الاوقات الفاصلة للثقة يمكن أن تحتسب وجودة اختبار حسن المطابقة يمكن أن يكون مطبقاً.

إن تصميم أُنموذج (AMSAA) يتم تصميمه لتتبع الموثوقية ضمن طور اختبار محدد، وليس عبر أطوار الاختبارات الأخرى ويفترض أنه يقوم على أساس حالات الفشل وزمن الاختبار ضمن طور اختبار محدد، ومعدل الفشل التراكمي يكون خطياً على مقياس لوغاريتمي-لوغاريتمي

(log-log scale). ويكون هذا موقعياً ضمن نمط طور الاختبار فيما يخص نمو الموثوقية بالمقارنة مع النمط العالمي الذي ذكره العالم دوين (Duane) (Crow,1972).

يقوم أُنموذج (AMSAA) بتحليل تقدم نمو الموثوقية خلال كل طور الاختبار، ويمكن أَنْ يساعد في تحليل ما يأتي :

أ. موثوقية الشكل (configuration)الحالية في الاختبار.

ب. موثوقية الشكل في الاختبار عند نهاية طور الاختبار.

ج. الموثوقية المتوقعة في حال امتداد زمن الاختبار الخاص بالطور .

د. معدل النمو.

هـ. اختبار حسن المطابقة الممكن تطبيقه.

و. الجودة المطبقة للفحوصات المناسبة.

2- تطوير الانموذج *Model Development*

الانتقال من أنموذج دوان (Duane) إلى شكل دالة كثافة وايبل (Weibull)

$$f(x;\lambda,k)=\begin{cases}\frac{k}{\lambda}(\frac{x}{\lambda})^{k-1}e^{-(x/\lambda)^k} & x\geq 0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}$$

يتم عن طريق استبدال معلمة القوى $(1-\alpha)$ لـ(β)، إذ إن (β) تمثل معلمة الشكل، أما معلمة القياس فهي(λ). ويمكن تقدير معلمتي أُنموذج كرو-أمسا (λ) و(β) باستخدام طريقة الإمكان الأَعظم بدلاً من كون (β) مفترضة لتكون مثبتة (كما في أُنموذج دوان Duane).

لاحظ دوان في بادئ الأمر أن عدد حالات الفشل المتراكمة فيما يخص نظام معين في زمن العملية الكلي قد يكون مقرباً بـ(λt^{β})، وفيه يجب أن تكون قيم الـ (λ) و(β) أقل من واحد بالنسبة لتمثيل نمو الموثوقية. في حين استنبط العالم كرو (Crow) أُنموذجاً إحصائياً لوصف نمط نمو الموثوقية ، وهذا الانموذج يفيد أن متوسط عدد حالات الفشل المتراكمة مع الزمن (t) يتم التعبير عنها بـ(λt^{β})، ولكن العدد الفعلي لحالات الفشل المرصودة لذلك الزمن تمثل متغيراً عشوائياً تم وصفه من خلال عملية وايبل (Weibull Process). ويزودنا هذا التطور بطريقة احتساب التقديرات الصحيحة من الناحية الإحصائية للنظام أَلا هو معدل العمر الزمني بين الفشل اللحظي والتراكمي (MTBF) إذا لم يكن هناك تحسينات إضافية مشتركة. ويشكل هذا وسيلة لمراقبة نمو الموثوقية خلال عملية التطور(Brian,2008).

3- أَساسيات الانموذج *Basics Of The Model*

يفترض أنموذج نمو الموثوقية(Crow _AMSAA)أنه ضمن طور اختبار معين تقع حالات الفشل طبقاً لعملية بواسون غير المتجانسة (NHPP)، مع دالة كثافة حالات الفشل خلال طور الاختبار التي يمثلها دالة الكثافة وايبل ($\rho(t)$).

يعرّف معدل الفشل التراكمي الملاحظ ($C(t)$) كما في:

$$C(t) = N(t)/t$$

إذ إن N(t)يمثل العدد الكلي لحالات الفشل المتراكمة لدى جميع وحدات الاختبار في زمن الاختبار التراكمي (t)، وهي تمثل متغيراً عشوائياً الذي يتبع توزيع بواسون.poisson dist بالمعدل الزمني $\theta(t)$.إنَّ احتمالية وقوع حالات الفشل عددها (n) بين بدء الاختبار وزمن الاختبار (t) تمثل (Swajeeth& Naikan,2012):

$$p(N(t)=n)=\frac{\theta(t)^n e^{-\theta(t)}}{n!} \qquad n = 0,1,2,.... \qquad ...(1)$$

إن ((θ(t)) (المعدل الزمني) لعدد حالات الفشل المتوقعة مع الزمن إذ تكون على الآتي:

$\theta(t) = \lambda t^{\beta}\beta, \lambda > 0$

وإن (λ) و(β) معلمات الدالة.

بحدوث تغير في الزمن مقداره (Δt)، فإن $\rho(t)\Delta t$ تمثل تقريباً احتمالية فشل نظام معين في المدة الزمنية (t, t + Δt). ويفترض أنموذج (AMSAA) أن:

$$\rho(t) = \lambda\beta t^{\beta-1} \qquad t>0 \qquad \lambda,\beta>0 \qquad ...(2)$$

إذ تمثل (t) زمن الاختبار التراكمي، و(λ) تمثل معلمة القياس، و(β) تكون معلمة الشكل للرسم البياني لدالة الكثافة ،فإذا كانت قيمة معلمة الشكل β = 1، فإن $\rho(t) = \lambda$ عندئذ المعدل الزمني للفشل تمثل عملية بواسون المتجانسْ أو التوزيع الأسي، وحينما يكون β< 1، فإن $\rho(t)$ تتناقص متضمنة نمو الموثوقية، واخيراً حينما تكون β>1، فإن ρ(t) تتزايد متضمنة تناقصاً في موثوقية النظام(Mod,2012).

وإنَّ كثافة الفشل اللحظية (Instanteous Failure Intensity)

$\rho_i(t) = \lambda\beta t^{\beta-1}$

أَي إن ρ(t) او $\lambda_i(t)$ تمثل كثافة الفشل اللحظية (instanteous failure intensity) وفي حالة خاصة لازمنة الفشل الأُسية إذ لا يوجد نمو، وبهذا فإن :

$$\rho(t) = \lambda \quad \dots (3)$$

وإن المعدل الزمني لعدد حالات الفشل :

$$E\big(N(t)\big) = \int_0^T \rho(T)\, dt = \int_0^T \lambda\ dt = \lambda T \quad \dots (4)$$

وفي الحالة العامة لنمو الموثوقية تكون القيمة المتوقعة لعدد حالات الفشل

$$E\big(N(T)\big) = \int_0^T \rho(t)\, dt = \int_0^T \lambda\beta t^{\beta-1}\ dt$$

$$E\big(N(t)\big) = \lambda T^{\beta}$$

ولوضع القيمة الإحصائية لعملية نمو الموثوقية يؤخذ بنظر الاعتبار مرة أُخرى الحالة الخاصة لانعدام النمو. وفي هذه الحالة عدد حالات الفشل N(t) المختبرة عبر المدة الزمنية (0,T) تكون عشوائية .والقيمة المتوقعة لحالات الفشل تتبع عملية بواسون المتجانسة وبمعدل λT .

إنَّ أُنموذج Crow _AMSAA عمم حالة عدم النمو هذه؛ ليسمح لانموذج النمو الموثوقية التي تحدث بسبب تصحيح الاحداث او العطلات (corrective action)، وهذا التعميم يحفظ توزيع بواسون لعدد حالات الفشل، ولكن يسمح للعدد المتوقع لحالات الفشل $E\big(N(t)\big)$ ليكون خطياً حينما ترسم ضمن المقياس (log−log. scale) أَي إنَّ

$$E\big(N(t)\big) = \lambda T^{\beta} \ \dots (5)$$

أَما معدل العمر الزمني بين الفشل التراكمي :

$$MTBF_C = \frac{1}{\lambda} T^{1-\beta} \quad \dots (6)$$

وكما هو ملاحظ في أَعلاه يمثل المخطط الموقعي (local pattern) لنمو الموثوقية ضمن طور الاختبار الشيء نفسه لدى مخطط النمو الذي لاحظه دوان ان $MTBF_C$ بالنسبة لدوان تساوي:

$$MTBF_{CDuane} = bT^{\alpha} \quad \dots (7)$$

وكثافة الفشل التجميعي λ_C لدوان هي :

$$\lambda_{CDuane} = \frac{1}{b}T^{-\alpha} \quad \dots (8)$$

وإنَّ العلاقة بين معلمات Crow_AMSAA ومعلمات DUANE يمكن أَنْ تكون مطورة وهي على الآتي(Crow,1993):

$$b_{Duane} = \frac{1}{\lambda_{AMSAA}} \quad \dots (9)$$

$$\alpha_{Duane} = 1 - \beta_{AMSAA} \quad \dots (10)$$

وهذه العلاقات ليست مطلقة فهي تتغير بحسب كيفية تحديد المعلمات (الميول (slops)، الأَجزاء المحصورة (intercept)) في الوقت الذي يتم فيه تحليل البيانات .

وأَخيراً عندما يبدأ الانتاج يتم تثبيت التصميم اي ليس ثمة تحسنٌ في الموثوقية. والقيمة الثابتة لدالة الكثافة الخاصة بأُنموذج الانتاج يجب ان تكون مساوية الى حد قريب لقيمة دالة الكثافة عند نهاية اختبار التطور. ولهذا تكون قيمة (MTBF) المتوقعة لأنموذج الانتاج مساوية لمقلوب دالة الكثافة عند نهاية طور الاختبار وعلى يأتي (Mod,2012):

$$IMTBF(t) = \frac{1}{\lambda\beta t^{\beta-1}} \quad \dots (11)$$

تمثل معدل العمر الزمني بين الفشل اللحظي.

4-التقييم الإحصائي لنمو الموثوقية

Statistical Assessment Of Reliability Growth

الإجراءات الخاصة بالتقدير النقطي وتقدير أوقات الثقة الخاصة بـ(MTBF) يتم توضيحها في أدناه بما يتعلق ببيانات مشتملة على أزمنة الفشل من الاختبار المنتهي (terminated)time عند زمن معطىً، أو بما يتعلق بالبيانات المشتملة على أزمنة الفشل من الاختبار المحدد عند نشوء عدد معين من حالات الفشل(Failure Terminated)، كذلك يتم عرض جودة ملاءمة الاختبار وتفصيله لتحديد فيما إذا كان الأنموذج مناسباً لوصف البيانات في أدناه أَم لا.

إذا كانت الأزمنة المضبوطة (exact time) لنشوء الفشل غير معروفة(Unknown)، في حين تكون غير مكتشفة فقط (uncovered)خلال الفحص الذي يتبع الاختبار، فلا يزال من الممكن استخدام أُنموذج نمو الموثوقية من خلال تبويب البيانات(Crow,1983).

5- التقييم الإحصائي في حالة زمن الاختبار المنتهي:

Statistical Assessment Of Time Terminated Testing

هنا سوف يتم التقييم الاحصائي للبيانات الخاصة بالاختبارات ذات الزمن المحدد مسبقا، أي يتم تحديد زمن معين من قبل الباحث لإيقاف الاختبار. وتتضمن البيانات المطلوبة زمن الاختبار التراكمي لدى كل الأنظمة عند نشوء أو ظهور أية حالة فشل، فضلاً عن زمن الاختبار المتراكم. ولاحتساب زمن الاختبار التراكمي لظهور حالة فشل معينة فمن الضروري جمع زمن الاختبار لدى كل نظام في تلك اللحظة. وحينئذٍ تشتمل البيانات على الـ(N) مرات من أَزمنة الفشل المتعاقبة $(X_1, X_2, \dots . X_N)$ التي تظهر قبل الوصول إلى زمن الاختبار المتراكم الكلي(Mod,Abbey,2012).

6- تقدير المعلمات لبيانات ازمنة الفشل

Parameter estimation for failure times data

إنَّ معلمات أُنموذج (Crow-Amsaa) يتم تقديرها باستخدام طريقة الإمكان الأَعظم . فإذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للحدث ذات التسلسل ith(Mil-Hdbk,2011)

$$f(T_i|T_{i-1}) = \frac{\beta}{n}\left(\frac{T_i}{n}\right)^{\beta-1} e^{-\frac{1}{n^\beta}(T_i^\beta - T_{i-1}^\beta)}$$

فإن دالة الإمكان الأَعظم هي :

$$L = \lambda^n \beta^n e^{-\lambda T^\beta} \prod_{i=1}^{n} T^{*\beta-1}_i \quad \dots (12)$$

إذ إن * زمن التشغيل هو الآتي :

$$T_i^* = \begin{cases} T_n \; If \; the \; test \; is \; failure \; termination \\ T > T_n \; If \; the \; test \;\; is \; time \; terminated \end{cases} \quad \dots (13)$$

وبأخذ اللوغاريتم لطرفي المعادلة (12)

$$\ln L = nln\,\lambda + nln\beta - \lambda T^\beta + (\beta - 1)\sum_{i=1}^{n} \ln T^*_i \quad \dots (14)$$

ثم نشتق المعادلة (14) أَولاً بالنسبة للمعلمة λ كم هوا موضح في أَدناه :

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - T^{*\beta}$$

وبمساواتها بالصفر، وحلها بالنسبة للمعلمة λ عندئذ يكون مقدر المعلمة ̂ هو الآتي:

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{T^{*\beta}} \quad \dots (15)$$

ثم نشتق المعادلة (14)بالنسبة للمعلمة β

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} - \lambda T^\beta \ln T + \sum_{i=1}^{n} \ln T^*_i$$

$$\hat{\beta} = \frac{n}{nlnT - \sum_{I=1}^{n} \ln T^*_i} \quad \dots (16)$$

إن المعادلة (16) خاصة بتقدير المعلمة ̂ في حالة الزمن المنتهي (Time Terminated). أَما تقدير المعلمة β تكون على الآتي :

$$\hat{\beta} = \frac{n}{nlnT - \sum_{I=1}^{n} \ln T}$$

وفي أَي زمن فإن دالة الكثافة اللحظية تقدر بالآتي :

$$\hat{\rho}_i(t) = \hat{\lambda}\hat{\beta}t^{\hat{\beta}-1}$$

وكما معلوم فإنَّ مقلوب $\hat{\rho}\ (t)$ في حالة الاستقرار يعطينا تقديراً للمعدل (العمر الزمني بين الفشل اللحظي) (MTBF). أَما في حالة الفشل المنتهي (failure terminated) فيتم تقدير كلٍّ من المعلمتين كما في حالة الزمن المنتهي (time termination) مع التعويض عن الزمن بما يساويه

$$\hat{\beta} = \frac{n}{(n-1)\ln T_n - \sum_{i=1}^{n-1} T_i} \quad \ldots(17)$$

وهي تكافئ التقدير في حالة اختبار الزمن المنتهي بزمن اختبار مساوٍ لزمن حدوث الفشل الأَخير.
أَما معلمة القياس λ فتقدر بالآتي

$$\hat{\lambda} = \frac{N}{T^{\hat{\beta}}} \quad \ldots(18)$$

إنَّ المعادلات الخاصة بتقدير المعلمة β (16) , (17) تعطينا تقديرات متحيزة للمعلمة β (Mil-Hdbk 189c,2011).

7- تصحيح التحيز ***Biasing Correction***

لاحظنا إنّ مقدر الإمكان الأَعظم لمعلمة الشكل β لتوزيع وايبل ذي المعلمتين هو تقدير متحيز (أَي إنَّ قيمتها المقدرة تكون عالية جداً (Too High))، التي تؤثر بدورها في دقة النتائج وكما أَشرنا سابقاً، إنّ معادلة تقدير معلمة β (Brian,2008):

$$\hat{\beta} = \frac{n}{nln\ T^* - \sum_{i=1}^{n} \ln t_i} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln \frac{T^*}{t_i}} \quad \ldots(19)$$

إذ إنَّ

$$T^* = \begin{cases} T & \text{في حالة تحديد زمن الاختبار مسبقا} \\ T_n & \text{في حالة تحديد عدد حالات الفشل مسبقا} \end{cases}$$

وإنّ n تمثل عدد حالات الفشل الكلية ، ولتصحيح التقدير المتحيز لكلتا الحالتين نقوم أولاً بإيجاد توزيع ل بالتالي $ln\left(\frac{T^*}{t_i}\right)^{\beta}$:

$$\ln\left(\frac{T^*}{t_i}\right)^{\beta} \quad i = 1,2,3,\dots\dots\dots\dots,n$$

هي عبارة عن إحصائيات مرتبة تتوزع توزيعاً أُسياً بمعلمة قيمتها 1، ويتم توضيح ذلك من خلال نقطة المحاكاة.

وبالضرب والقسمة على λ نحصل على

$$\ln\left(\frac{T^*}{t_i}\right)^{\beta} = ln\left(\frac{\lambda T^{*\beta}}{\lambda t_i^{\beta}}\right)$$

وبما أنَّ (λT^{β}) يمثل العدد المتوقع لحالات الفشل، وبذلك يمكن صياغتها على الآتي :-

$$ln\left(\frac{\lambda T^{*\beta}}{\lambda t_i^{\beta}}\right) = -\ln\left(\frac{N(t_i)}{N(T^*)}\right)$$

$$ln\left(\frac{\lambda T^{*\beta}}{\lambda t_i^{\beta}}\right) = -lnP_i = X_i \dots (20)$$

إذ إنّ i هي نقطة المحاكاة (Point Simulation)

$$P_i = \exp(-X_i) \qquad \dots (21)$$

إذ إنَّ P_i تمثل دالة الموثوقية للتوزيع الاسي ذي معلمة قيمتها واحد ،والان نقوم بمناقشة كلتا الحالتين على حدة، أولاً إيقاف الزمن قبل الفشل (Time Terminated)، وثانياً تحديد عدد حالات الفشل قبل التجربة (Failure Terminated) :

نلاحظ أنَّ $0 < P_i < 1$ وبهذا فإن ال $(i = 1,2,3,\dots,n)$ X_i هي متغير عشوائي للتوزيع الاسي ذي المعلمة 1.

اولا: بالنسبة لعدد حالات الفشل المحددة مسبقاً فإننا نقوم بحذف (Removed)t_nمقام الصيغة الخاصة بتقدير المعلمة β، وبذلك فإن i=1,2,3,…n−1 على الآتي:

$$\sum_{i=1}^{n} ln\frac{T^*}{t_i} == \sum_{i=1}^{n} ln\frac{t_n}{t_i} = \sum_{i=1}^{n-1}\frac{t_n}{t_i} + ln\frac{t_n}{t_n} = \sum_{i=1}^{n-1}\ln\frac{t_n}{t_i} + 0 \qquad \dots(22)$$

وإذ إن توزيع مجموع (n−1) متغير عشوائي يتوزع كل منها توزيعاً أسياً بمعلمة 1 يكون توزيع كاما (Gamma (n−1),1)

أي إن

$$Y = \sum_{i=1}^{n-1}\left(\ln\frac{t_n}{t_i}\right)^{\beta} = \beta\sum_{i=1}^{n-1}\left(ln\frac{t_n}{t_i}\right) \backsim Gamma(n-1,1) \qquad \dots(23)$$

وهنا كما هو موضح سابقاً فإن عدد المتغيرات *(n−1)*، وليس n لأن $ln\left(\frac{t_n}{t_n}\right) = 0$

وبهذا فإن

$$Y \backsim Inv\ Gamma\ (n-1,1) \qquad \dots(24)$$

وبهذا فإن القيمة المتوقعة ل $\frac{1}{Y}$

$$E\left(\frac{1}{Y}\right) = \frac{1}{n-2} = \frac{1}{\beta}E\left[\frac{1}{\sum_{i=1}^{n-1} ln\frac{t_n}{t_i}}\right] = \frac{1}{\beta}E\left[\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} ln\frac{t_n}{t_i}}\right]$$

ومن تعريف ^ من المعادلة (19)نحصل على:

$$\Rightarrow E\left[\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} ln\frac{t_n}{t_i}}\right] = \frac{E(\hat{\beta})}{n}$$

$$\frac{1}{n-2} = \frac{1}{\beta}\frac{E(\hat{\beta})}{n}$$

$$\Rightarrow E(\hat{\beta}) = \frac{n\beta}{n-2}$$

$$\beta = \frac{n-2}{n} E(\hat{\beta}) \quad \ldots (25)$$

وبهذا فإن ^ تقدير متحيز .

وإن العامل $\frac{n-2}{n}$ يستخدم لإزالة التحيز.

ثانيا :حالة الزمن المنتهي ***TerminatedTime***

بالنسبة للبيانات يتم تحديد زمن الاختبار مسبقا، وبهذا نحصل على :

$$Y = \sum_{i=1}^{n} \left(ln \frac{T}{t_i} \right)^{\beta} = \beta \sum_{i=1}^{n} \left(ln \frac{T}{t_i} \right) \sim Gamma(n, 1)$$

وإنَّ القيمة المتوقعة للمتغير y هي :

$$E(Y) = \frac{1}{n-1} = \beta E(\sum_{i=1}^{n} ln \frac{T}{t_i})$$

$$\frac{1}{n-1} = \frac{1}{\beta} \frac{E(\hat{\beta})}{n}$$

$$\mathsf{E}(\hat{\beta}) = \frac{n\beta}{n-1} \Rightarrow \beta = \frac{n-1}{n} E(\hat{\beta}) \quad \ldots (26)$$

إذ إنَّ العامل $\frac{n-1}{n}$ يستخدم لإزالة التحيز

8- حدود الثقة لمعلمات أُنموذج Crow-AMSAA عند استخدام البيانات المجمعة.

The confidence bounds for the Crow-AMSAA Parameter model when using Grouped data

8-1 حدود الثقة للمعلمة β

A) Fisher Matrix Bounds:

المعلمة بيتاβ يجب ان تكون قيمتها موجبة، وإذ إن $\hat{\beta}$هو مقدر الإمكان الأَعظم لتوزيع وايبل، وحسب نظرية الغاية المركزية فإن Lnβيتوزع توزيعاً طبيعياً قياسياً

normal dist.(Standard)

$$\frac{\ln\hat{\beta} - ln\beta}{\sqrt{var(ln\hat{\beta})}} \rightsquigarrow N(0,1) \quad \dots(27)$$

يتم إعطاء حدود الثقة التقريبية على النحو الآتي:

$$CB_{\beta} = \hat{\beta}e^{\pm\approx\sqrt{var(\widehat{\beta})/\widehat{\beta}}} \quad \dots(28)$$

$\hat{\beta}$ ممكن أَنْ تتمثل بـ :

$$\sum_{i=1}^{K} n_i \left(\frac{T_i^{\widehat{\beta}} lnT_i - T_{i-1}^{\widehat{\beta}} lnT_{i-1}}{T_i^{\widehat{\beta}} - T_{i-1}^{\widehat{\beta}}} - lnT_k \right) = 0$$

يمكن حساب كل التباين باستخدام مصفوفة فيشر:

$$\begin{bmatrix} -\frac{\partial^2\Lambda}{\partial\lambda^2} & -\frac{\partial^2\Lambda}{\partial\lambda\partial\beta} \\ -\frac{\partial^2\Lambda}{\partial\lambda\partial\beta} & -\frac{\partial^2\Lambda}{\partial\ \beta^2} \end{bmatrix}^{-1}_{\beta=\widehat{\beta},\lambda=\widehat{\lambda}} = \begin{bmatrix} var(\hat{\lambda}) & cov(\hat{\beta},\hat{\lambda}) \\ cov(\hat{\beta},\hat{\lambda}) & var(\hat{\beta}) \end{bmatrix} \dots(29)$$

Λاللوغاريتم لدالة الإمكان الطبيعي إذ $ln^2T = (lnT)^2$:

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{k} \left[n_i \ln\left(\lambda T_i^{\beta} - \lambda T_{i-1}^{\beta}\right) - \left(\lambda T_i^{\beta} - \lambda T_{i-1}^{\beta}\right) - nlnn_i! \right] \quad \dots(30)$$

$$\frac{\partial^2\Lambda}{\partial\lambda^2} = -\frac{n}{\lambda^2}$$

$$\frac{\partial^2\Lambda}{\partial\ \beta^2}=\sum_{i=1}^{k}\left[n_i\left(\frac{\left(T_i^{\widehat{\beta}}ln^2T_i-T_{i-1}^{\widehat{\beta}}ln^2T_{i-1}\right)\left(T_i^{\widehat{\beta}}-T_{i-1}^{\widehat{\beta}}\right)-\left(T_i^{\widehat{\beta}}lnT_i-T_{i-1}^{\widehat{\beta}}lnT_{i-1}\right)^2}{\left(T_i^{\widehat{\beta}}-T_{i-1}^{\widehat{\beta}}\right)}\right)\right.$$
$$\left.-\left(\lambda T_i^{\widehat{\beta}}ln^2T_i-\lambda T_{i-1}^{\widehat{\beta}}ln^2T_{i-1}\right)\right] \quad \dots(31)$$

$$\frac{\partial^2\Lambda}{\partial\lambda\partial\beta}=-T_K^{\beta}lnT_k \quad \dots(32)$$

B)حدود الثقة :

حدود الثقة ل$\hat{\beta}$يتم الحصول عليها من خلال التعويض في المعادلة () وعلى الآتي:

$$P(i)=\frac{T_i}{T_K};\quad i=1,2,3,\dots.,K \quad \dots(33)$$

حينما:

T_i :نهاية المدة الفاصلة لi^{th}

K:عدد المدد.

T_K : وقت الانتهاء للفاصل الزمني الأخير.

$$A=\sum_{i=1}^{K}\frac{\left[P(i)^{\widehat{\beta}}lnP(i)^{\widehat{\beta}}-P(I-1)^{\widehat{\beta}}lnP(i-1)^{\widehat{\beta}}\right]^2}{\left[P(i)^{\widehat{\beta}}-P(i-1)^{\widehat{\beta}}\right]} \quad \dots(34)$$

$$c=\frac{1}{\sqrt{A}}$$

$$S=\frac{\left(Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right).c}{\sqrt{N}} \quad \dots(35)$$

حينما:

$z_1-\frac{\alpha}{2}$:معكوس القياسي الطبيعي (inverse standard normal).

N: عدد حالات الفشل.

بصورة عامة فإنَّ حدود الثقة للوجهين للـ$\hat{\beta}$ هي $\hat{\beta} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{var(\hat{\beta})}$.

C)حدود الثقة لمعدل النمو (بيانات المجمعة)

Confidence Bounds Of Growth Rate(Grouped Data)

منذ أَنْ كان معدل النمو α مساوياً لـ$\beta - 1$ كانت حدود الثقة لكل من مصفوفة فيشر ونظرية كرو Crow:

$$\alpha_L = 1 - \beta_U$$

$$\alpha_U = 1 - \beta_L$$

كل من $\beta_L, _U$ يتم الحصول عليهما باستخدام الطرائق الموضحة في أعلاه في حدود الثقة في Beta.

8-2 حدود الثقة للمعلمة λ

A)حدود فيشر ماتريكس *Fisher matrix Bounds* المعلمة λ يجب أَن تكون قيمتها موجبة، وبذلك فإن Ln.λ يتبع التوزيع الطبيعي، وهذه الحدود تعتمد على :

$$\frac{ln\hat{\lambda} - ln\lambda}{\sqrt{var(ln\hat{\lambda})}} \sim N(0,1)$$

حدود الثقة التقريبية لـλ هي:

$$CB_\lambda = \hat{\lambda}e^{\pm\alpha\sqrt{var(\hat{\lambda}/\lambda}} \quad \ldots (36)$$

عندما:

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{T_k^{\hat{\beta}}} \quad \ldots (37)$$

حساب التباين هو نفسه كما هو موضح في أعلاه في حدود الثقة على Beta.

B)حدود الثقة لأزمنة الفشل *crow Bounds failure terminated* بالنسبة لبيانات أَزمنة الفشل الوجهين $100\%(1-\alpha)$لحدودالثقة(Crow,1993) :

$$\lambda_L = \frac{X^2_{\frac{\alpha}{2},2N}}{2.T_k^{\beta}}$$

$$\lambda_U = \frac{X^2_{1-\frac{\alpha}{2},2N}}{2.T_k^{\beta}}$$

حينما :

N: مجموع عدد حالات الفشل.

T_K:وقت الانتهاء من الفاصل الزمني الأخير.

C)حدود الثقة ازمنة الزمن*crow Bounds time terminated*

$$\lambda_L = \frac{X^2_{\frac{\alpha}{2},2N}}{2.T_k^{\beta}}$$

$$\lambda_U = \frac{X^2_{1-\frac{\alpha}{2},2N+2}}{2.T_k^{\beta}}$$

حينما :

N: مجموع عدد حالات الفشل.

T_K:وقت الانتهاء من الفاصل الزمني الأخير.

9-اختباركرامر فون لحسن المطابقة *Cramer –Von Misses Test*

تتضمن فرضية العدم قيد الاختبار على ان عملية بواسون غير المتجانسة (NHPP) مع دالة كثافة معينة للشكل :

$$p(t) = \lambda\beta t^{\beta-1} \qquad (\lambda;\beta > 0, t > 0)$$

التي تصف بشكل مناسب نمو الموثوقية لنظام محدد يتم اختبارها باستخدام إحصائية Cramer) (Von Misses–يستعمل التقدير غير المتحيز لمعلمة الشكل β لاحتساب حسن المطابقة، فقد يتم احتساب احصائية اختبار حسن المطابقة على الآتي مع أزمنة فشل مرتبة بحيث تكون

$$0 < X_1 < X_2 < \cdots < X_M$$

$$C_N^2 = \frac{1}{12M} + \sum_{i=1}^{M}((\frac{X_i}{T})^2 - \frac{2_i - 1}{2_M})^2$$

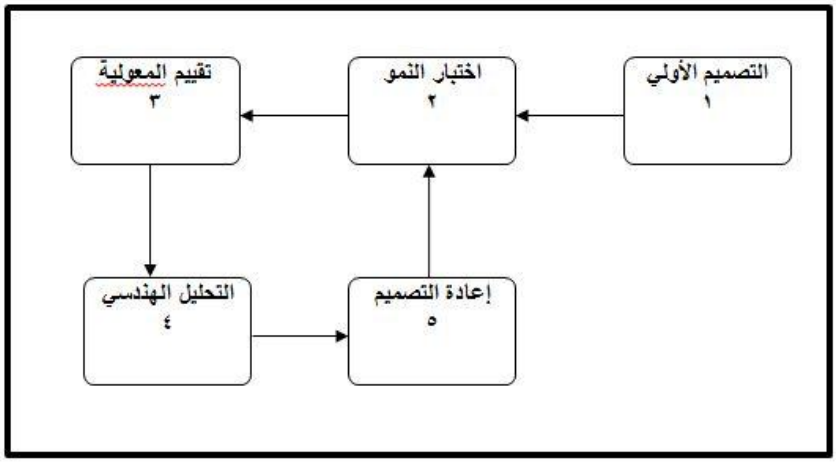
إذ إن قيمة M تكون على الآتي :

$$M = \{^{N\ if\ the\ test\ is\ Time\ Terminated}_{N-1\ if\ the\ test\ is\ Failure\ Terminated}$$

إنّ فرضية العدم تُرفض إنْ كانت الإحصائية C_N^2 هي أكبر من القيمة الحرجة لمستوى المعنوية المحدد من قبل المحلل الخاص بالقيم الحرجة للاختبار(الحمداني،2005).

10–تصميم اختبار نمو الموثوقية باستخدام سميو–ماتك

DesignReliability growth test By Simumatic يمكن أن يكون تحليل نمو الموثوقية باستخدام المحاكاة أداة قيّمة لممارسي الموثوقية. مع هذا النهج .

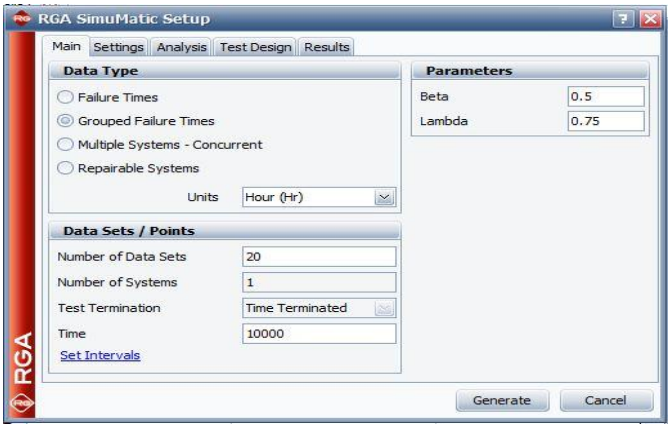


يتم إجراء تحليلات نمو الموثوقية في عدد كبير من المرات على مجموعات البيانات التي تم إنشاؤها باستخدام محاكاة مونت كارلو. تعمل الأداة المساعدة *SimuMatic* الخاصة ببرامجية*RGA* على إنشاء قيم محسوبة لمعلمات (λ, β)، استنادًا على المستخدم معلمات الإدخال المحددة. *SimuMatic* ينفذ أساساً عددٌ من محاكاة مونتي كارلو استنادًا على زمن الاختبار

المطلوب من قبل المستخدم أو إعدادات إنهاء الفشل ، ثم يعيد حساب معلمات (λ, β) لكل مجموعة من مجموعات البيانات التي تم إنشاؤها. كما يتم تحديد عدد المرات التي يتم فيها إنشاء مجموعات بيانات *Monte Carlo* وإعادة حساب المعلمات. يعرض الناتج النهائي القيم المحسوبة (λ, β)، ويسمح بأنواع مختلفة من التحليل.

يولد مجموعات بيانات متعددة باستخدام محاكاة مونتي كارلو. ثم يقوم بتحليل كل مجموعة بيانات بشكل فردي (على سبيل المثال ، للعثور على معدل العمر الزمني بين الفشل اللحظي *MTBF* في زمن محدد)، ويقوم أيضًا بتحليل مجموعة مجموعات البيانات ككل (أي إنه يُظهر معدل قيم المعلمات، وقيم المعلمات المتوسطة لكل مجموعات البيانات).ولغرض التوضيح لمحاكاة أنموذج كرو–امسا (Crow–Amsaa)نقوم بتصميم اختبار نمو الموثوقية لإعادة تصميم منتج ما للوصول الى الهدف المنشود، أَي حينما يكون معدل العمر الزمني بين الفشل اللحظي (IMTBF)موجوداً وللمحاكاة يتم اختبارها لتقدير اتجاه واحد(one side 90%)لحد الثقة للزمن الازم للوصول الى الهدف، وهو قيمة معدل العمر الزمني بين الفشل اللحظي، وكذلك حد الثقة الأَدنى باتجاه واحد لمعدل العمر الزمني بين الفشل اللحظي عند نهاية زمن الاختبار .

وكان زمن الاختبار الكلي 10000HR، بالاعتماد على بيانات سابقة، وكانت قيمة كل من $(\lambda = 0.75, \beta = 0.5)$ أَول الأَمر نختار نوع البيانات بيانات أَزمنة الفشل المجمعة grouped failure time. ثانياً نقوم بتوليد زمن مقداره (time=10000HR). ثالثاً عدد مجموعات البيانات هي 20، أَما عدد الانظمة المعالجة فهي 1. وهذه الحالة في هكذا نوع من



البيانات

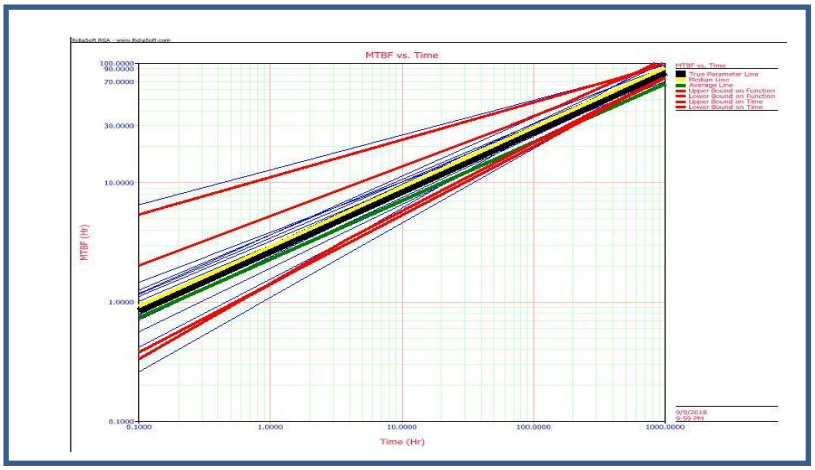
الشكل(1): يوضح واجهة توليد simumatic

الجدول(1) : يوضح قيم المعلمات المحسوبة لكل مجموعة بيانات مولدة

	Data Set	Beta	Lambda (Hr)	DMTBF (Hr)	DFI	Growth Rate
1	1	0.5295	0.5487	262.3019	0.0038	0.4705
2	2	0.5792	0.4485	185.654	0.0054	0.4208
3	3	0.6867	0.1308	199.4958	0.005	0.3133
4	4	0.4912	0.7485	295.0695	0.0034	0.5088
5	5	0.5373	0.5747	229.7925	0.0044	0.4627
6	6	0.4294	1.4939	298.5392	0.0033	0.5706
7	7	0.536	0.5094	262.7475	0.0038	0.464
8	8	0.3673	1.9011	486.1776	0.0021	0.6327
9	9	0.4255	1.6487	283.1632	0.0035	0.5745
10	10	0.5115	0.6926	253.8984	0.0039	0.4885
11	11	0.5299	0.6302	227.3705	0.0044	0.4701
12	12	0.5848	0.325	240.8284	0.0042	0.4152
13	13	0.7081	0.1103	188.3033	0.0053	0.2919
14	14	0.4871	0.8898	259.8795	0.0038	0.5129
15	15	0.4926	0.8029	270.671	0.0037	0.5074
16	16	0.4697	0.8859	317.7832	0.0031	0.5303
17	17	0.3768	2.4253	340.2173	0.0029	0.6232
18	18	0.5082	0.5376	339.2319	0.0029	0.4918
19	19	0.4897	0.6818	329.3762	0.003	0.5103
20	20	0.4669	1.1121	261.1838	0.0038	0.5331

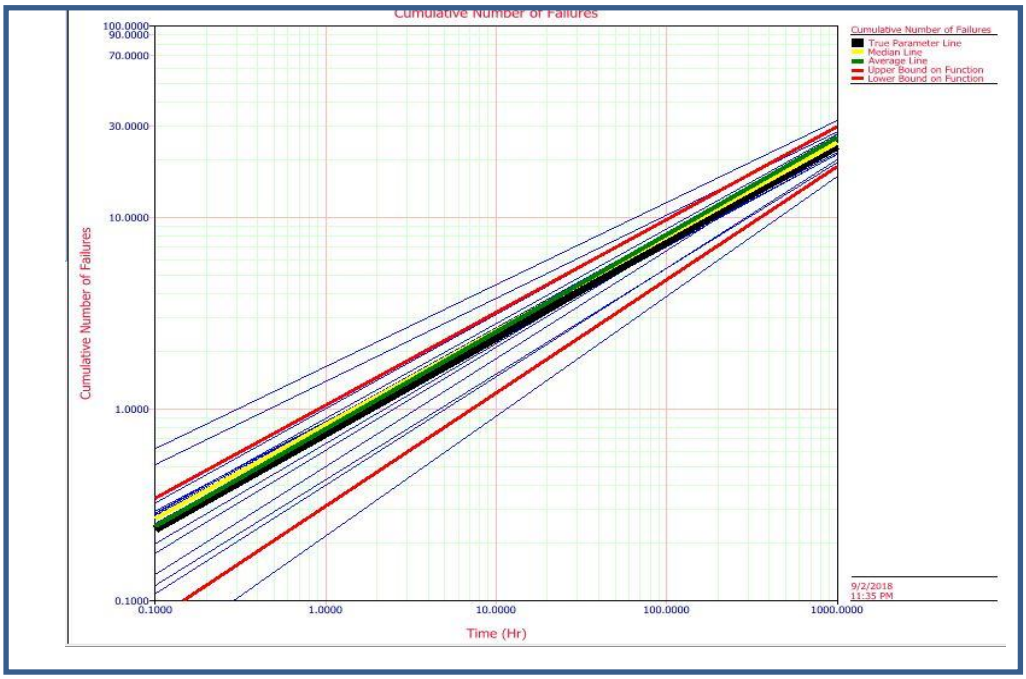
يعرض الجدول (1) نتائج المحاكاة. والأعمدة المسمى "Beta" و "Lambda" تحتوي على المعلمات المختلفة التي تم الحصول عليها عن طريق حساب كل مجموعة بيانات ولدت عن طريق المحاكاة لمجموعات البيانات 20. ويحتوي عمود "DMTBF" على معدل العمر الزمني بين حالات الفشل اللحظيMTBF عند 10000HR (نهاية زمن الاختبار). اما عمود DFI(demonstrated failure intensity) فهو كثافة الفشل الموضحة في نهاية الاختبار. أَما عمود growth rate فيمثل معدل النمو يساوي $(1 - \beta)$ يعني نمو أسرع في معدل النمو الفعلي.

ويبين الشكل الآتي رسم معدل العمر الزمني بين الفشل اللحظي(IMTBF)مع حدود الثقة90 ٪.



الشكل (2): يوضح معدل العمر الزمني مع حدود الثقة

إذ يمثل الخط الأَسود خط المعلمة الحقيقي يرسم الخط المحدد بواسطة معلمات أُنموذج Crow–AMSAA. (هذه المعلمات مرئية على لوحة التحكم في ورقة المحاكاة.). أَما الخط الاصفر والخط الاخضر والخط المتوسط وخط الوسط فيرسمان الخطوط التي يحددها المتوسط والمتوسطات لكل المتوالدات (مجموعات البيانات). أَما الخطوط الحمراء الحدود العليا والسفلى. فيوضح الرسم الآتي حدود الثقة المحاكاة للعدد التراكمي للأعطال استنادًا على معلمات الإدخال المحددة:



الشكل(3): يوضح حدود الثقة لمحاكاة العدد التراكمي

تم ترتيب القيم المحسوبة من ورقة المحاكاة من الأدنى إلى الأعلى لإظهار حدود الثقة ويعرض العمود الخاص "النسبة المئوية"(percentage). إن النسبة المئوية لمجاميع البيانات التي تساوي أو أقل عن مجموعة البيانات المعطاة. لذلك حينما نقوم بحساب الحد الأَدنى للثقة باتجاه واحد بنسبة 90%الخاصة بمعدل العمر الزمني بين حالات الفشل اللحظي MTBF عند 10000HR ، فستبحث عن قيمة (.10000HR) IMTBF التي تقابل 10%(أي 90%–100%) ، كما هو موضح بتحديده باللون الاصفر في الجدول الآتي:

الجدول(2): يوضح حدود الثقة والمعلمات

	Percentage	Beta	Lambda (Hr)	DMTBF (Hr)	DFI	Growth Rate
1	5.00%	0.3673	0.1103	185.654	0.0021	0.2919
2	10.00%	0.3768	0.1308	188.3033	0.0029	0.3133
3	15.00%	0.4255	0.325	199.4958	0.0029	0.4152
4	20.00%	0.4294	0.4485	227.3705	0.003	0.4208
5	25.00%	0.4669	0.5094	229.7925	0.0031	0.4627
6	30.00%	0.4697	0.5376	240.8284	0.0033	0.464
7	35.00%	0.4871	0.5487	253.8984	0.0034	0.4701
8	40.00%	0.4897	0.5747	259.8795	0.0035	0.4705
9	45.00%	0.4912	0.6302	261.1838	0.0037	0.4885
10	50.00%	0.4926	0.6818	262.3019	0.0038	0.4918
11	55.00%	0.5082	0.6926	262.7475	0.0038	0.5074
12	60.00%	0.5115	0.7485	270.671	0.0038	0.5088
13	65.00%	0.5295	0.8029	283.1632	0.0038	0.5103
14	70.00%	0.5299	0.8859	295.0695	0.0039	0.5129
15	75.00%	0.536	0.8898	298.5392	0.0042	0.5303
16	80.00%	0.5373	1.1121	317.7832	0.0044	0.5331
17	85.00%	0.5792	1.4939	329.3762	0.0044	0.5706
18	90.00%	0.5848	1.6487	339.2319	0.005	0.5745
19	95.00%	0.6867	1.9011	340.2173	0.0053	0.6232
20	100.00%	0.7081	2.4253	486.1776	0.0054	0.6327

وبدلاً من ذلك إذا كنا نرغب في الحصول على حدود الثقة من جانبين لمعدل العمر الزمني بين الفشل اللحظي (IMTBF)بنسبة 90% (10000HR) ، فسنبحث عن القيم التي تتوافق مع 5% (للحد الأدنى)(lower bounds) و 95% (للحدود العليا)(upper bounds) ، كما هو موضح في الجدول الآتي:

	Percentage	Beta	Lambda (Hr)	DMTBF (Hr)	DFI	Growth Rate
1	5.00%	0.3673	0.1103	185.654	0.0021	0.2919
2	10.00%	0.3768	0.1308	188.3033	0.0029	0.3133
3	15.00%	0.4255	0.325	199.4958	0.0029	0.4152
4	20.00%	0.4294	0.4485	227.3705	0.003	0.4208
5	25.00%	0.4669	0.5094	229.7925	0.0031	0.4627
6	30.00%	0.4697	0.5376	240.8284	0.0033	0.464
7	35.00%	0.4871	0.5487	253.8984	0.0034	0.4701
8	40.00%	0.4897	0.5747	259.8795	0.0035	0.4705
9	45.00%	0.4912	0.6302	261.1838	0.0037	0.4885
10	50.00%	0.4926	0.6818	262.3019	0.0038	0.4918
11	55.00%	0.5082	0.6926	262.7475	0.0038	0.5074
12	60.00%	0.5115	0.7485	270.671	0.0038	0.5088
13	65.00%	0.5295	0.8029	283.1632	0.0038	0.5103
14	70.00%	0.5299	0.8859	295.0695	0.0039	0.5129
15	75.00%	0.536	0.8898	298.5392	0.0042	0.5303
16	80.00%	0.5373	1.1121	317.7832	0.0044	0.5331
17	85.00%	0.5792	1.4939	329.3762	0.0044	0.5706
18	90.00%	0.5848	1.6487	339.2319	0.005	0.5745
19	95.00%	0.6867	1.9011	340.2173	0.0053	0.6232
20	100.00%	0.7081	2.4253	486.1776	0.0054	0.6327

الاستنتاجات:

إن البرامجية RGA تساعدنا في تحليل بيانات أزمنة الفشل، أي كان نوعها ولمختلف نماذج نمو الموثوقية التي استطعنا من خلالها التوصل الى الحد الادنى للثقة باتجاه واحد وبنسبة 90%، والتي كانت تساوي .188 HR، وكذلك بالنسبة للحدود الدنيا والعليا للثقة لمعدل العمر الزمني بين الفشل اللحظي وهي القيم التي تتوافق مع 5% (للحد الأدنى) (lower

(boundsوقيمتها هي 185.6 HR. وعند 95% (للحدود العليا)(upper bounds) هي 340 HR.

المصادر :

1-الحمداني،خالدة احمد محمد (2005)،"استخدام اسلوب بيز لاختبار العمر الزمني المعجل وتطبيقها على المعدات الكهربائية في دائرة صحة نينوى" أطروحة دكتوراه غير منشورة ،جامعة الموصل ، كلية علوم الحاسوب والرياضيات.

1-Brian. j. Hall,(2008)"Methodology for Evaluating Reliability Growth Programs Discrete Systems " Doctorate of Philosophy, University of Maryland.

2-Larry. H. Crow,(1972)"AMSAA Reliability Growth Symposium,"AMSAA, Aberdeen proving Ground MD ,Interim Note 22,.

3-Larry. H. Crow,(1983)"AMSAA Discrete Reliability Growth Model ," AMSAA ,Aberdeen Proving Ground,MD, Office Note 1-83.

4-Larry. H. Crow ,(1993)" Confidence Intervals on the Reliability of Repairable Systems,"IEEE Proceedings Annual Reliability and Maintainability Symposium, pp. 126-134.

5-Mod,Abbey Wood,(2012),"Applied R&M Manual for DefenseSystems" Ministry of Defense establishment at Felton, Bristol, United Kingdom.

6-Mil-Hdbk 189c,(2011),"Department of Defense Handbook Reliability Growth Management".USA.

7- Swajeeth Pilot and V. N. A Naikan. 2012 "Reliability mode line of sensors network system for critical applications " 2nd ICETM International conference 7-9 September Tirupathi , India.