المجلة العراقية للعلوم الإحصائية (27) 2018
ص ص [59-82]

نمذجة بعض الظواهر المناخية بنماذج VARMA

حسناء احمد اسماعيل *
tiger_1161@yahoo.com

د. ظافر رمضان مطر **
thafer63@yahoo.com

الملخص:

من المعروف جيداً أَن توظيف العلاقات المتداخلة والمتشابكة بين الظواهر المتعددة تقدم نمذجة أَكثر دقة من تلك التي يتم الحصول عليها بمعاملة كل ظاهرة على حدة. وفي هذا البحث يتم تحليل العلاقة المتداخلة لثلاث ظواهر في مجال الأنواء الجوية ، وهي المعدلات الشهرية لدرجات الحرارة العظمى والمعدلات الشهرية لدرجات الحرارة الصغرى والمعدلات الشهرية للتبخر في مدينة الموصل من خلال منظومة مكونة من 3 معادلات باستخدام أُنموذج متجه ARMA، ولغرض التحليل تم استخدام بيانات شهرية للمدة من شهر كانون الثاني 1981 ولغاية كانون الاول 2010 مع إبقاء الشهور العشرة الاخيرة من عام2010 كعينة بعدية Out of Sample لأغراض المقارنة مع التنبؤات التي يتم الحصول عليها ، ثم إيجاد الأُنموذج الأَفضل للتنبؤ من خلال الاعتماد على معيار MSE. وتم التوصل إلى أَن أُنموذج متجه $ARIMA(1,0,0)*(0,1,1)_{12}$ هو الأَفضل في تمثيل البيانات قيد الدراسة ، بالاعتماد على معيارSIC . واستخدمت البرمجية الجاهزة المتخصصة في مجال المتسلسلات الزمنية SCA في الحصول على نتائج التطبيق.

الكلمات المفتاحية: نماذجVARMA ، نماذج متجه ARMA الموسمية الضربية

Modeling Some Weather Phenomena by Vector ARMA

Abstract:

It is well known that employing the overlapping and interlocking relations among multiple phenomena offers modeling that is more accurate than these which are obtained by analyze each phenomena separately. In this research interrelationship for three phenomena that appear in the Meteorology analyzed which are monthly averages for the maximum temperatures, monthly averages for minimum temperatures and monthly averages for evaporation, through a system of three equations by using the Vector ARMA Model. For the purpose of analysis, we used monthly data for the period from January 1981 to December 2010 while keeping the last ten months of 2010 out of the sample for the purposes of comparison

* مدرس مساعد / رئاسة جامعة الموصل / جامعة الموصل
** استاذ / قسم الإحصاء والمعلوماتية / كلية علوم الحاسوب والرياضيات / جامعة الموصل

تاريخ استلام البحث 2014/2/24 تاريخ القبول 2014/3/13

within predictions that are obtained . We then found the best model for prediction upon MSE criterion. and it was conduced that the vector ARIMA(1,0,0)*$(0,1,1)_{12}$ was the best to represent the data upon SIC criteria. We used package software SCA which is specialized in the field of time series to obtain the results of the application.

مقدمة:

تعدُ نماذج متجه المتسلسلات الزمنية حالة عامة لنماذج المتسلسلات الزمنية المنفردة، إذ في العديد من الظواهر التجريبية تتطلب دراسة أكثر من متسلسلة زمنية واحدة في آن واحد، وتتجلى فائدتها بأنها تقدم وصفاً للعلاقات الديناميكية بين تلك المتغيرات او المتسلسلات الزمنية.

إن أُنموذج المتسلسلة الزمنية الذي يحتوي على متغير واحد فقط يسمى أُنموذج متسلسلة زمنية أحادي المتغيرات (Univariate Time Series Model) ، وعند التنبؤ بهذا النوع من النماذج تستخدم البيانات الحالية والسابقة عن متغير واحد فقط، وعند صياغة هذا الأُنموذج يُفترض ضمنياً عدم تغير العوامل الاخرى التي تؤثر في المتغير المدروس، أما أُنموذج المتسلسلة الزمنية الذي يستخدم متغيرات اخرى لوصف سلوك المتسلسلة الزمنية محل الدراسة فيسمى أُنموذج متسلسلة زمنية متعدد المتغيرات (Multivariate Time Series Model) . فعندئذ يمكن استغلال العلاقة بين المتغيرات للتنبؤ في المستقبل، (فاندل، 1983).

يعكس الاهتمام المتزايد من الجهات العلمية على مستوى العالم بالتنبؤ بسلوك الظواهر الجوية المختلفة الأهمية المتزايدة والمؤثرة في هذه الظواهر، وفي هذا البحث سيتم التعامل مع بعض ظواهر الانواء الجوية في مدينة الموصل ، التي لها تأثير واضح في مختلف مجالات الحياة وهي المعدلات الشهرية لدرجات الحرارة العظمى والصغرى والتبخر.

2- الهدف من البحث:

يهدف البحث إلى نمذجة متجه المتسلسلات الزمنية لبعض الظواهر الجوية في مدينة الموصل بتوظيف منهجية بوكس- جنكنز في التعامل مع هذا المتجه من خلال مراحل التعرف والتقدير والتشخيص باستخدام أدوات متعدد المتغيرات المناسبة وصولاً إلى الأُنموذج المناسب ، ثم استحصال التنبؤات لعشرة أشهر من العام 2010.

3- دوال مصفوفة التغاير والارتباط المشترك:

Covariance and Correlation Matrix Functions

يمكن تعريف $\mathbf{X}_t$ بأنه متجه متسلسلات زمنية ذو بعد (kx1) بالصيغة الآتية:

$$\mathbf{X}_t = [X_{1t}, X_{2t}, ..., X_{kt}]', \quad t = 0, \pm1, \pm2, \cdots$$

إذ إن كل X_{it} تمثل متسلسلة زمنية أحادية للمتغير i ، $(i = 1, 2, ..., k)$ ، وأَن متوسط العملية يمكن أن يمثل بالمتجه:

$$E(\mathbf{X}_t) = [E(X_{1t}) \quad E(X_{2t}) \quad ... \quad E(X_{kt})]'$$
$$\boldsymbol{\mu} = [\mu_1 \ \mu_2 \ ... \ \mu_k]' \qquad (1)$$

وإن التغاير المتقاطع Cross Covariance بين X_{it} و X_{jt} لكل $(i, j = 1, 2, ..., k)$ هي دوال لفرق الوقت فقط (s-t) ، وإن مصفوفة التغاير المشترك المتقاطع (Cross– Covariance Matrix) لمتجه المتسلسلة الزمنية $\boldsymbol{\Gamma}(\ell)$ هي:

$$\boldsymbol{\Gamma}(\ell) = \text{Cov}(\mathbf{X_t}, \mathbf{X_{t+\ell}}) == \text{Cov}(\mathbf{X_{t-\ell}}, \mathbf{X_t})$$
$$= \begin{bmatrix} \gamma_{11}(\ell) & \gamma_{12}(\ell) & ... & \gamma_{1k}(\ell) \\ \gamma_{21}(\ell) & \gamma_{22}(\ell) & ... & \gamma_{2k}(\ell) \\ \vdots & & & \vdots \\ \gamma_{k1}(\ell) & \gamma_{k2}(\ell) & ... & \gamma_{kk}(\ell) \end{bmatrix} = \text{E}(\mathbf{X_t} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X_{t+\ell}} - \boldsymbol{\mu})' \qquad (2)$$

ومن المهم ملاحظة أَن متجه المتسلسلة الزمنية المراوحة يعني أَنه كل متسلسلة أُحادية تكون مراوحة. وأَن دالة مصفوفة الارتباط الذاتي لأُنموذج متعدد المتغيرات ، الذي نرمز له بـ $\boldsymbol{\rho}(\ell)$ تكون:

$$i,j = 1, 2, \ldots, k \qquad (3)$$
$$\boldsymbol{\rho}(\ell) = \mathbf{D}^{-1}\gamma(\ell)\ \mathbf{D}^{-1} = [\boldsymbol{\rho}_{ij}(\ell)]$$

إذ إن $\mathbf{D}$ مصفوفة قطرية ببعد (kxk) للانحرافات القياسية لـ X_t إذ إن $i, j = 1, 2, \cdots, k$ اي إن:

$$\mathbf{D} = \text{diag}[\sqrt{\gamma_{11}(0)} \quad \sqrt{\gamma_{22}(0)} \quad ... \quad \sqrt{\gamma_{kk}(0)}]$$

$$\boldsymbol{\rho}(\ell)=\begin{bmatrix}\rho_{11}(\ell) & \rho_{12}(\ell) & \rho_{13}(\ell) & \dots & \rho_{1k}(\ell)\\ \rho_{21}(\ell) & \rho_{22}(\ell) & \rho_{23}(\ell) & \dots & \rho_{2k}(\ell)\\ \vdots & & & & \\ \rho_{m1}(\ell) & \rho_{m2}(\ell) & \rho_{m3}(\ell) & \dots & \rho_{kk}(\ell)\end{bmatrix};\ \ell=0,+1,+2,\ \dots$$

$$\rho_{ij}(\ell)=\frac{\gamma_{\mathrm{ij}}(\ell)}{[\gamma_{ii}(0).\gamma_{\mathrm{jj}}(0)]^{\frac{1}{2}}}=\frac{\mathrm{cov}(X_{it},X_{jt})}{std(X_{it})\ std(X_{jt})},\quad 1\le i,j\le k \qquad (4)$$

ونلاحظ أن:

$$\begin{cases}\boldsymbol{\Gamma}(\ell)=\boldsymbol{\Gamma}'(-\ell)\\ \boldsymbol{\rho}(\ell)=\boldsymbol{\rho}'(-\ell)\end{cases} \qquad (5)$$

تسمى دوال مصفوفات التغاير والارتباط المشترك واحيانا تسمى دوال مصفوفات التغاير المشترك الذاتي والارتباط الذاتي. ولتسهيل التعامل مع القيم في مصفوفة الارتباطات المتقاطعة ، فيشار إلى القيم المعنوية الموجبة بـ(+) والمعنوية السالبة بـ(−) وإلى القيم غير المعنوية (.)، (Guan et. al, 2007) (Stefanakos and Schinas, 2013) (Zivot and Wang, 2005) .

4- نماذج متجه Vector ARMA Models ARMA:

باستخدام $\{X_{1t}\}$، ....، $\{X_{kt}\}$ إذ إن $(t=0\pm1,\pm2,\cdots)$ يمكن الاشارة إلى أَنَّ k من المتسلسلات الزمنية المسجلة بأوقات زمنية متساوية ، وتكتب عادة بشكل $\mathbf{X_t}=[X_{1t},X_{2t},\cdots,X_{kt}]'$ إذ إن($\mathbf{X_t}$) هو متجه متسلسلة زمنية بـk من الأبعاد.

إنَّ الافتراضات المطبقة مع نماذج ARIMA الأُحادية من حيث المراوحة والسلوك العشوائي للمتسلسلة الزمنية يمكن أَن يمتد النماذج متجه ARMA(p,q) ، وهو تعبير أَكثر عمومية ، إذ نستبدل المتسلسلة X_t بالمتجه $\mathbf{X_t}$ ،الذي يتكون من واحدة او أَكثر من المتسلسلات الزمنية المنفردة. وأَن أُنموذج متجه ARMA(p,q) لـ k من المتسلسلات الزمنية يأَخذ الصيغة الآتية:

$$\boldsymbol{\varphi}(B)\mathbf{X}_t=\mathbf{C}+\boldsymbol{\theta}(B)\mathbf{a_t} \qquad (6)$$

$$\boldsymbol{\varphi}(B)=\mathbf{I}-\boldsymbol{\varphi_1}B-\cdots-\boldsymbol{\varphi_p}B^p \qquad (7)$$
$$\boldsymbol{\theta}(B)=\mathbf{I}-\boldsymbol{\theta_1}B-\cdots-\boldsymbol{\theta_q}B^q$$

إن $\boldsymbol{\varphi}(B)$ و $\boldsymbol{\theta}(B)$ هي مصفوفات متعددات الحدود في **B** ذات بعد (kxk). وأَن **C** هو متجه ثوابت ببعد (kx1) وأَن $\mathbf{a_t}$ هي متتابعة من متجهات الصدمة العشوائية المتماثلة التي تتوزع بشكل مستقل كتوزيع طبيعي بوسط صفري ، ومصفوفة تغاير مشترك $\boldsymbol{\Sigma}$، (Liu, 2006).

4-1 نماذج متجه الانحدار الذاتي Vector Autoregressive Models:

إنَّ أُنموذج متجه الانحدار الذاتي من المرتبة الأُولى(1)AR (اي $p=1,\ q=0$) يكون بالصيغة الآتية، (Burke and Hunter, 2005) (Zivot and Wang, 2005):

$$(\mathbf{I}-\boldsymbol{\varphi}B)\mathbf{X_t}=\mathbf{C}+\mathbf{a_t} \qquad (8)$$

إذ إن **C** هي متجه ببعد(kx1) وأَن $\boldsymbol{\varphi}$ مصفوفة ذات بعد (kxk) واذا كانت k=2 فإن الأُنموذج يكون كما يلي:

$$\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\phi_{11} & \phi_{12}\\ \phi_{21} & \phi_{22}\end{bmatrix}B\right)\begin{bmatrix}X_{1t}\\ X_{2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_1\\ C_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a_{1t}\\ a_{2t}\end{bmatrix} \qquad (9)$$

من الضروري أَن تكون جميع جذور محدد متعددات الحدود $|\boldsymbol{\varphi}(B)|$ تقع خارج دائرة الوحدة ، وتكون جذور المعادلة $|\boldsymbol{\varphi}(B)|=|\mathbf{I}-\boldsymbol{\varphi}B|$ خارج دائرة الوحدة اذا وفقط اذا كانت جميع الجذور المميزة λ_i هي داخل دائرة الوحدة (Liu, 2006) (Wei, 1990).

بصورة عامة من الممكن كتابة عملية متجه الانحدار الذاتي من المرتبة(p) بصورة عامة بالصيغة الآتية(Zivot and Wang, 2005) (Wei, 2006) :

$$(\mathbf{I}-\boldsymbol{\varphi}_1B-\boldsymbol{\varphi}_2B^2-\cdots\ -\boldsymbol{\varphi}_pB^p)\mathbf{X_t}=\mathbf{C}+\mathbf{a_t} \qquad (10)$$

or

$$\mathbf{X_t}=\mathbf{C}+\boldsymbol{\varphi}_1\mathbf{X_{t-1}}+\boldsymbol{\varphi}_2\mathbf{X_{t-2}}+\cdots\ +\boldsymbol{\varphi}_p\mathbf{X_{t-p}}+\mathbf{a_t} \qquad (11)$$

ولكي تكون العملية مراوحة فإن جذور محدد المعادلة $\left|\mathbf{I}-\boldsymbol{\varphi_1}B-\boldsymbol{\varphi}_2B^2-\cdots\ -\boldsymbol{\varphi}_pB^p\right|$ تقع خارج دائرة الوحدة ، او بشكل مماثل فإن جذور $\lambda_I{}^p-\lambda^{p-1}\boldsymbol{\varphi_1}-\ldots-\boldsymbol{\varphi}_p$ تكون داخل دائرة الوحدة وبالتالي يمكن ان يكتب الأُنموذج على النحو الآتي:

$$\mathbf{X_t}=\left[\boldsymbol{\varphi_p}(B)\right]^{-1}\mathbf{a_t} \qquad (12)$$

4-2 نماذج متجه المتوسطات المتحركة Vector Moving Average Models:

يمكن كتابة أُنموذج متجه المتوسطات المتحركة من المرتبة الأُولى(1)MA ، أَي (P=0 و q=1) ليكون بالشكل الآتي (Liu, 2006):

$$\mathbf{X_t} = \mathbf{C} + (\mathbf{I} - \boldsymbol{\theta} B)\mathbf{a_t} \qquad (13)$$

عندما k=2 فإن الأُنموذج سيكون بالصيغة الآتية:

$$\begin{bmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} \\ \theta_{21} & \theta_{22} \end{bmatrix} B \right) \begin{bmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \end{bmatrix} \qquad (14)$$

إنَّ عملية متجه (1)MA تعد عملية مراوحة ، ولا تحتاج إلى شرط محدد لضمان المراوحة، ولغرض التعبير عن أُنموذج متجه (1)MA بصيغة انحدار ذاتي (صيغة انعكاسية inverted form) فإنه من الضروري فرض قيود على مصفوفة المعلمات $\boldsymbol{\theta}$. إنَّ الصيغة المنعكسة للأُنموذج (12) يمكن كتابتها على النحو الآتي:

$$(\mathbf{I} - \boldsymbol{\theta} B)^{-1}(\mathbf{X_t} - \mathbf{C}) = \mathbf{a_t} \qquad (15)$$

من الضروري أَن تكون جميع جذور محددة متعددة الحدود $|\mathbf{I} - \boldsymbol{\theta} B|$ تقع خارج دائرة الوحدة، وهذا هو الشرط العام لانعكاسية أُنموذج MA، ويمكن اعادة كتابة الأُنموذج (12) على النحو الآتي :

$$(\mathbf{I} + \boldsymbol{\theta} B + \boldsymbol{\theta}^2 B^2 + \boldsymbol{\theta}^3 B^3 + \cdots)^{-1}(\mathbf{X_t} - \mathbf{C}) = \mathbf{a_t}$$

بصورة عامة إن أُنموذج متجه المتوسطات المتحركة من المرتبة q MA(q) يكون بالصيغة الآتية:

$$\mathbf{X_t} = \mathbf{C} + (\mathbf{I} - \boldsymbol{\theta}_1 B - \boldsymbol{\theta}_2 B^2 - \cdots - \boldsymbol{\theta}_q B^q)\mathbf{a_t} \qquad (16)$$

نلاحظ ان العملية دائماً مراوحة، واذا كانت العملية قابلة للانعكاس Invertiable فيجب ان تقع جميع جذور محددة متعددة الحدود $\boldsymbol{\theta}_\mathbf{q}(B)$ خارج دائرة الوحدة (Liu, 2006) (Wei, 2006).

4-3 نماذج متجه الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة:

Vector Autoregressive and Moving Average Models

ان أُنموذج متجه الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة من المرتبة الأُولى(1,1)ARMA اي(p=1 و q=1) يمكن كتابته على النحو الآتي:

$$(\mathbf{I}-\boldsymbol{\varphi}(B))\mathbf{X_t}=\mathbf{C}+(\mathbf{I}-\boldsymbol{\theta}(B))\mathbf{a_t} \quad (17)$$

وإن العناصر في صيغة المصفوفات والمتجهات عندما k=2 هي:

$$\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\phi_{11} & \phi_{12}\\ \phi_{21} & \phi_{22}\end{bmatrix}B\right)\begin{bmatrix}X_{1t}\\ X_{2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_1\\ C_2\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\theta_{11} & \theta_{12}\\ \theta_{21} & \theta_{22}\end{bmatrix}B\right)\begin{bmatrix}a_{1t}\\ a_{2t}\end{bmatrix} \quad (18)$$

بما ان أُنموذج متجه ARMA(1,1) هو خليط من أُنموذج متجه AR(1) ، وأَنموذج متجه MA(1)، فإن المراوحة لأُنموذج متجه ARMA(1,1) تشبه مثيلتها في أُنموذج متجه AR(1) وشرط الانعكاسية تشبه مثيلتها في أُنموذج متجه MA(1)، (Liu, 2006) .

بصورة عامة إن نماذج متجه الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة ARMA(p,q) تكتب بالصيغة الآتية:

$$\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{p}}(B)\mathbf{X_t}=\mathbf{C}+\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{q}}(B)\mathbf{a_t} \quad (19)$$

يكون الأُنموذج مراوحاً اذا كانت جذور المعادلة $|\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{p}}(B)|$ تقع خارج دائرة الوحدة. اذن فإن العملية $\mathbf{X_t}$ يمكن ان تكتب بصيغة MA:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{X_t}&=[\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{p}}(B)]^{-1}(\mathbf{C}+\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{q}}(B)\mathbf{a_t})\\ &=\boldsymbol{\psi}(B)\mathbf{a_t}\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

وبشكل مماثل فإن الأُنموذج يكون منعكساً اذا كانت جذور المعادلة $|\theta_q(B)|$ تقع خارج دائرة الوحدة. لذلك فيمكن تمثيل الأُنموذج بصيغة AR:

$$\left.\begin{aligned}&[\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{q}}(B)]^{-1}\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{p}}(B)\mathbf{X_t}=\mathbf{a_t}\\ &\boldsymbol{\pi}(B)\mathbf{X_t}=\mathbf{a_t}\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

.(Stefanakos and Schinas, 2014) (Becker and Fried, 2013)

4-4 نماذج متجه ARMA الموسمية الضربية:

Multiplicative Seasonal Vector ARMA Models

الأُنموذجان (6) و(8) يلائمان المتسلسلات غير الموسمية، وللمتسلسلات الزمنية الموسمية فمن المفيد افتراض الصيغة الآتية المضاعفة لأُنموذج متجه ARMA:

$$\boldsymbol{\varphi}(B)\boldsymbol{\Phi}(B^s)\mathbf{X_t} = \mathbf{C} + \boldsymbol{\theta}(B)\boldsymbol{\Theta}(B^s)\mathbf{a_t} \qquad (22)$$

إذ إن $\boldsymbol{\varphi}(B)$و $\boldsymbol{\theta}(B)$هي مصفوفات غير موسمية متعددة الحدود في **B** ، معرفتان في (7) وأَن:

$$\boldsymbol{\Phi}(B^s) = \mathbf{I} - \boldsymbol{\Phi_1}B^s - \cdots - \boldsymbol{\Phi_p}B^{ps} \qquad (23)$$
$$\boldsymbol{\Theta}(B^s) = \mathbf{I} - \boldsymbol{\Theta_1}B^s - \cdots - \boldsymbol{\Theta_q}B^{qs}$$

هي مصفوفات موسمية متعددة الحدود في B إذ إن $\boldsymbol{\varphi's}$ و $\boldsymbol{\theta's}$ هما مصفوفتان للموسم s مشابهتان للحالة غير الموسمية، وفي حالات المتسلسلات الزمنية غير المراوحة الموسمية فإن الأُنموذج (22) يتسع للصيغة:

$$\boldsymbol{\varphi}(B)\boldsymbol{\Phi}(B^s)\mathbf{D}(B)\mathbf{X_t} = \mathbf{C} + \boldsymbol{\theta}(B)\boldsymbol{\Theta}(B^s)\mathbf{a_t} \qquad (24)$$

إذ إن $\mathbf{D}(B)$هي مصفوفة قطرية تمثل مؤثر الازاحة للخلف بفروق موسمية او غير موسمية مثل $(1\text{-}B)^{d1}$ او $(1\text{-}B^s)^{d2}$ او كلاهما)، (Liu, 2006).

4-5 نماذج المتجه غير المراوحة Nonstationary Vector Models :

عمليا غالبا ما نواجه في تحليل المتسلسلات الزمنية متسلسلات غير مراوحة أَكثر من المتسلسلات المراوحة ، فعلى سبيل المثال يمكن ان يكون هنالك نمط متوسط غير ثابت او انماط دورية او عدم التجانس في التباين او غيرها. وعند دراسة المتجهات فإن عدم المراوحة في احدى المتسلسلات تقود إلى عدم المراوحة في المتسلسلات الاخرى(Liu, 2002) . ومن المعروف أَنه تتم معالجة عدم المراوحة بأَخذ الفروق. فمثلا المتسلسلة المفردة غير المراوحة X_t يمكن ان تحول إلى متسلسلة مراوحة عن طريق: $(1-B)^d X_t \quad , d > 0$ فيمكن كتابة المتسلسلة المفردة:

$$\phi(B)(1-B)^d X_t = C + \theta(B)a_t \qquad (25)$$

إذ إن $\boldsymbol{\varphi}(B)$ و $\boldsymbol{\theta}(B)$ معرفة في(22) و ان d هو عدد الفروق ونادراً ما يكون أَكبر من الواحد، ولغرض توسيع هذا المفهوم إلى عملية متجه فإن:

$$\boldsymbol{\varphi}(B)(\mathbf{I} - \mathbf{I}B)^d \mathbf{X_t} = \mathbf{C} + \boldsymbol{\theta}(B)\mathbf{a_t} \qquad (26)$$

التعبير في اعلاه يشير إلى أَن جميع مكونات المتسلسلة قد أَخذ الفرق لها بعدد المرات نفسها بافتراض أَنه يمكن تحويل العملية إلى مراوحة بتطبيق مؤثر الازاحة الخلفي في $\mathbf{X_t}$ إذ إن:

$$\mathbf{D}(B)=\begin{bmatrix}(1-B)^{d_1} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & (1-B)^{d_2} & \vdots & \vdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & (1-B)^{d_m}\end{bmatrix} \qquad (27)$$

وأَن $(d_1,d_2, \ldots,d_m)$ هي مجموعة من الثوابت غير السالبة وهكذا فإن الأُنموذج (24) يمكن أَن يعمم إلى أُنموذج متجه ARMA غير المراوح:

$$\boldsymbol{\varphi}(B)\mathbf{D}(B)\mathbf{X_t}=\boldsymbol{\theta}(B)\mathbf{a_t} \qquad (28)$$

إذ إن جذور $|\boldsymbol{\varphi}(B)|$ و $|\boldsymbol{\theta}(B)|$ تقع خارج دائرة الوحدة، (Liu, 2006).

5- بناء نماذج متجه Building Vector Models:

في متجه المتسلسلات الزمنية نحاول ايجاد الأُنموذج الذي يمثل بشكل ملائم الاعتمادية في البيانات وبأَقل عدد ممكن من المعلمات ، بتوسيع استراتيجية بناء الأُنموذج التي طورها Box and Jenkins في عام (1976) وتوظيفها في نماذج متجه ARMA فإن مراحل بناء الأُنموذج هي: (Liu, 2006) (Box and Tio, 1981)

5-1 التعرف الاولي Tentative Identification:

إن السمة المهمة لأُنموذج متجه ARMA في (6) هو عدد المعلمات المتضمنة، إذ إن الأُنموذج ARMA احادي المتغير يحتوي على (p+q+1) من المعلمات (بضمنها الحد الثابت واهمال تباين متتابعة الأَخطاء σ^2)، وفي حالة المتجه فإن أُنموذج متجه ARMA المعطى في (6) يحتوي على $(k^2(p+q)+k)$ من المعلمات(ايضا بإهمال مصفوفة التغاير المشترك) ، علماً بأَنه حتى اذا كان الأُنموذج المدروس هو AR(1) او MA(1) فربما يعني هذا وجود 6 معلمات في الأُنموذج ذي المتسلسلتين ، عندئذ فمن المهم النمذجة بتقليص عدد المعلمات قدر الامكان. ومن اهم ادوات مرحلة التعرف الأولي:

5-1-1 عينة مصفوفات الارتباط المتقاطع: Sample Cross Correlation Matrices

ان عينة مصفوفات الارتباط المتقاطع (Sample CCM) المعرفة في الفقرة (3) إذ عناصر المصفوفة $\hat{\rho}_{ij}(\ell)'s$ تقديرات للقيم النظرية $\rho_{ij}(\ell)'s$ وهي عملياً مفيدة عند التعرف على نماذج متجه MA ذات المراتب الدنيا، إذ إنه يظهر من خلال أُنموذج متجه MA(q) ان:

$$\boldsymbol{\rho}(\ell)=\mathbf{0} \quad if\ \ell>q \qquad (29)$$

فاذا كان $\mathbf{X_t}$ يتبع أُنموذج متجه MA(q) عندئذ سيكون لدينا:

$$\hat{\boldsymbol{\rho}}(\ell) \xrightarrow{p} \mathbf{0}, \quad \ell > q \tag{30}$$

إذ إن $\xrightarrow{p}$ تشير إلى الاقتراب بالاحتمالية، وهذه الخاصية تعني أَنَّ عينة CCM تهبط إلى الصفر بعد q من التخلفات تماماً مثل عينة الارتباطات الذاتية التي تهبط إلى الصفر بعد التخلف q في حالة احادي المتغير(Liu, 2006).

5-1-2 مصفوفات الانحدار الذاتي الجزئية:

Partial Autoregression Matrices (PARM)

اثناء بناء نماذج أحادية المتغير تكون دالة الارتباط الذاتيACF أَداة مهمة في تحديد المرتبة الدنيا لعملية MA(q) وتكون عينة دالة الارتباط الذاتي الجزئي PACF مفيدة في تحديد مرتبة عملية AR(p)، وإن عينة مصفوفات الارتباط المتقاطع CCM هي تعميم مباشر لعينة الارتباطات الذاتية ، فإن عينة الارتباطات الذاتية الجزئية لا تمتد بصورة مباشرة إلى حالة متعدد المتغيرات. بملاحظة تفسير الانحدار لـPACF وتوظيف هذه النظرية المتضمنة النماذج الخطية متعددة المتغيرات، فإنه يمكن الحصول على مقياس مفيد لتعريف المرتبة الدنيا من نماذج متجه AR(p).

بما أَنَّ الارتباطات الذاتية الجزئية للمتسلسلة المنفردة فمن الممكن ايجادها من خلال مطابقة الانحدار المتتابع للمتسلسلة للتخلفات $(\ell = 1,2,3,...)$ ℓ والاحتفاظ بتقدير الحد الاخير عند كل مطابقة. إذ إن كل قيمة متعاقبة هي مقياس الاهمية النسبية من خلال اضافة مرتبة أعلى عن المطابقة السابقة، ان عينة الارتباطات الذاتية الجزئية تعطينا معلومات مباشرة عن مرتبة AR(p) ، التي يجب ان تهبط إلى الصفر بعد التخلفp.

ويمكن تعميم هذا المفهوم إلى حالة متعدد المتغيرات إلا أَنه يجب ان يبقى في الذهن ان العمل مع متجهات ومصفوفات وليس قيماً مفردة. وباتباع أُنموذج متجه AR(p) لدينا:

$$\mathbf{X_t} = \mathbf{C} + \boldsymbol{\Phi_1}\mathbf{X_{t-1}} + \boldsymbol{\Phi_2}\mathbf{X_{t-2}} + ... + \boldsymbol{\Phi_p}\mathbf{X_{t-p}} + \mathbf{a_t} \tag{31}$$

ومن خلال استخدام طريقة المربعات الصغرى متعددة المتغيرات، لإيجاد تقديرات لمصفوفات المعلمات، للتنبؤ بالقيم المستقبلية، كما في المعادلة:

$$\mathbf{X'_t} = \mathbf{C'} + \mathbf{X'_{t-1}}\,\boldsymbol{\varphi'_1} + ... + \mathbf{X'_{t-p}} + \mathbf{a'_t} \qquad t = p+1,..., \ n \tag{32}$$

يمكن توسيع فكرة PACF أُحادية المتغير ، والأَخذ بنظر الاعتبار عينة مصفوفة الانحدار الذاتي الجزئي ولتكن $\boldsymbol{\Phi}_{\ell\ell}$ عند $\ell = 1,2,3,...$. $\boldsymbol{\Phi}_{\ell\ell}$ هي مصفوفة المعاملات المرتبطة مع أعلى مرتبة تخلف عند كل مطابقة متعاقبة. فاذا كان $\mathbf{X_t}$ يتبع أُنموذج متجه AR(p)عندئذ $\boldsymbol{\Phi}_{\ell} = \mathbf{0}$

عند $\ell > P$. وبالمقابل فإن جميع عناصر المصفوفة $\mathbf{\Phi}_{\ell\ell}$من المتوقع ان تكون صغيرة. وباستخدام طريقة المربعات الصغرى فإن التقديرات لتباينات عناصر $\mathbf{\Phi}_{\ell\ell}$ ممكن ايجادها، (Liu, 2002) (Tiao and Box, 1981).

5-1-3 جدول اصغر الارتباطات القانونية: Smallest canonical correlation table

تمكن كل من Tio & Tsay (1985) من تطوير افضل طريقة لتحديد مرتبة أُنموذج ARIMA المختلط ، الذي يمكن استخدامه مع المتسلسلات المراوحة وغير المراوحة ، كذلك مع المتسلسلات الموسمية وغير الموسمية إلا أنها تكون أكثر نجاحاً مع المتسلسلات الزمنية غير الموسمية، فقد تم توظيف تحليل اصغر الارتباطات القانونية (SCAN) لمتجه المتسلسلة الزمنية، وحيث تضمنت الارتباطات القانونية لمتجه المتسلسلة والقيم المميزة الاصغر للمصفوفة المحسوبة. وتتضمن هذه الطريقة جدولاً ذا اتجاهين ، الذي هو عبارة عن احصاءات ، وأن كل احصائية هي دالة من القيم المميزة الأصغر من المصفوفة المشتقة من التباين الذاتي المشترك للمتسلسلة. ويدعى جدول أصغر الارتباطات القانونية (SCAN).

إن جدول (SCAN) المعد لمتجه المتسلسلة يتكون من قيم مقاسة أو (رموز المعنوية المقاسة) "O" و "X"، ومن خلالها يتم التعرف على المراتب العليا للأُنموذج المختلط ARIMA(p,q) من خلال الزاوية العليا اليسرى من الرموز غير المعنوية"O" في الجدول المذكور، (Liu, 2002) (Liu and Hudak, 1994).

5-2 تقدير المعلمات Parameter Estimation:

حينما يتم اختيار مرتبة الأُنموذج (6) بشكل أولي فإن التقديرات الكفوءة لمصفوفات المعلمات المقترنة $\boldsymbol{\varphi} = [\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_p]$ و $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_q]$ و $\mathbf{C}$و $\mathbf{\Sigma}$يتم تحديدها من خلال تعظيم دالة الامكان ، كما أن الأخطاء المعيارية ومصفوفة الارتباط لتقديرات عناصر كل من $\phi's$ و $\theta's$ و Cيمكن ايضا الحصول عليها. وفي مجال تقدير المعلمات يمكن استخدام كل من:

5-2-1 دالة الامكان الشرطية Conditional Likelihood Function:

لأُنموذج ARMA(p,q) الآتي:

$$\mathbf{a_t} = \mathbf{X_t} - \mathbf{C} - \boldsymbol{\varphi_1}\mathbf{X_{t-1}} - \cdots - \boldsymbol{\varphi_p}\mathbf{X_{t-p}} + \boldsymbol{\theta_1}\mathbf{a_{t-1}} + \cdots + \boldsymbol{\theta_q}\mathbf{a_{t-q}} \qquad (34)$$

ان دالة الامكان يمكن ان تقرب من خلال دالة الامكان الشرطية، إذ إن المتسلسلة تعد مكونة من متجه ذي (n-p) من المشاهدات $(X_{p+1}, \cdots, X_n)$ ، فإن دالة الامكان عندئذ تحدد من خلال $(a_{p+1}, \cdots, a_n)$ باستخدام القيم الابتدائية $(X_1, \cdots, X_p)$وشرطية مع القيم الصفرية لـ $(a_p, \cdots, a_{p-q-1})$ وبذلك فإن:

$$\ell_c(\mathbf{C},\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\Sigma}|\mathbf{X}) = |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{n-p}{2}} \exp(-1l2tr\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\sum_{t=p+1}^{n}\mathbf{a_t}\mathbf{a_t}') \qquad (35)$$

ان تقديرات $\boldsymbol{\Sigma}$ و$\boldsymbol{\theta}$ و$\boldsymbol{\varphi}$ و$\mathbf{C}$ يمكن ايجادها من خلال التقدير غير الخطي ، الذي يعظم دالة الامكان في (35)، (Liu,2006).

5-2-2 دالة الامكان المضبوطة Exact Likelihood Function:

دالة الامكان غير التقريبية او المضبوطة لأُنموذج متجه ARMA(p,q) المراوح اشتقها من Hillmer and Tiao (1979) وهذه الدالة تأَخذ الصيغة الآتية:

$$\ell(\mathbf{C},\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\Sigma}|\mathbf{X}) = \ell_c(\mathbf{C},\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\Sigma}|\mathbf{X})\ell_1(\mathbf{C},\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\Sigma}|\mathbf{X}) \qquad (36)$$

فاذا كانت q=0 فإن ℓ_1 تعتمد على $(X_1,\cdots,X_p)$ أَما اذا كانت q≠0 فإنها تعتمد على كل متجهات البيانات $(X_1,\cdots,X_n)$. إن خوارزمية التقدير المضبوط امتدت إلى أُنموذج متجه MA(q) بافتراض ان $\boldsymbol{\theta}_\mathbf{q}(B)$ لها الصيغة الموسمية المنضربة الآتية:

$$\boldsymbol{\theta}_\mathbf{q}(B) = \boldsymbol{\theta}_{q1}(B)(\mathbf{I}-\boldsymbol{\Theta}_\mathbf{s}B^s) \qquad (37)$$

عندئذ تطبيق نتائج MA(q) مع W_t إذ إن t= p+1,…, n باستخدام هذا التقريب فإن طريقة التقدير المضبوط سوف تطبق فقط مع نماذج فيها معلمات MA. وهي لا تؤثر في نماذج بمعلمات AR فقط.

إن تقديرات معلمات المتوسطات المتحركة باستخدام الامكان المضبوط هي الافضل من حيث التقدير، وأَن الزمن المستغرق في طريقة الامكان المضبوط يستغرق دائماً أَضعاف الوقت الذي تحتاجه طريقة الامكان الشرطية، لذا فإن الافضل توظيف طريقة الامكان الشرطية في المراحل الابتدائية من بناء الأُنموذج ، ثم التحول إلى طريقة الامكان المضبوط في المراحل الاخرى، (Liu, 2006) (Tiao and Box, 1981).

5-3 الفحوص التشخيصية لأُنموذج متجه ARMA:

Diagnostic Cheeking of Vector ARMA Mode

نماذج متجه ARMA يمكن ان تفحص تشخيصيا باستخدام طرائق متعددة. إلا أَنَّ أَهمها فحص مصفوفات الارتباط المتقاطع للبواقي وفحص العلاقات الخطية للتخلفات المضبوطة.

5-3-1 مصفوفات الارتباط المتقاطع للبواقي:

Residual Cross Correlation Matrices

إن الأُنموذج غير المحدد يمكن تفحصه من خلال تحليل بواقي الأُنموذج وفي حالة متجه ARMA فإن تلك البواقي تكون في صيغة المصفوفات، إذ إن:

$$\hat{\mathbf{a}}_t = \mathbf{X}_t - \mathbf{C} - \hat{\boldsymbol{\varphi}}_1 \mathbf{X}_{t-1} - \cdots - \hat{\boldsymbol{\varphi}}_p \mathbf{X}_{t-p} + \hat{\boldsymbol{\theta}}_1 \mathbf{a}_{t-1} + \cdots + \hat{\boldsymbol{\theta}}_q \mathbf{a}_{t-q} \quad (38)$$

إن مصفوفات الارتباط المتقاطع للبواقي يجب ان تمثل عملية تشويش ابيض إذ لا يوجد ارتباط بين متجه البواقي الحالي واية تخلفات للبواقي، ولأَنَّ نماذج المتجه تتضمن متسلسلة تصادفية فمن المحتمل ان لا تكون جميع الارتباطات المتقاطعة للبواقي غير معنوية احصائيا فعلى سبيل المثال لمتجه متسلسلات بواقي مكون من 100 ارتباط متقاطع من الممكن ان يحتوي على 5 ارتباطات معنوية ، ويمكن عدّها ملائمة عند مستوى معنوية 0.05. لذا فإن النمط العام لمصفوفات الارتباط المتقاطع للبواقي وموقع المصفوفة المعنوي يجب أَن يكون دليلاً لملائمة الأُنموذج. ان مصفوفات الارتباط المتقاطع للبواقي يجب أَن تكون غير معنوية أَو على الأَكثر تحتوي على عناصر معنوية قليلة عند تخلفات ومواقع عشوائية، هذا يعني أَنَّ الارتباطات المتقاطعة المعنوية يجب ان لا تكرر نفسها في الموقع نفسه ضمن مصفوفات الارتباط المتقاطع للبواقي، كذلك فإن الارتباطات المتقاطعة التي تظهر عند التخلفات البعيدة عموماً أَقل أَهمية من الارتباطات المعنوية التي تظهر عند التخلفات القريبة، (Liu, 2006).

5-3-2 العلاقات الخطية للتخلفات المضبوطة:

Exact Contemporance Linear Relationships

إنَّ القيم المميزة الصفرية لمصفوفة التغاير المشترك للبواقي $\boldsymbol{\Sigma}$ تعني أَنه توجد علاقة تخلف مضبوطة ضمن المتسلسلات التي نُمذِجت، وهذا مكافئ للقول بأَن k من المتسلسلات في الأُنموذج اصبحت تقاد بعدد اقل من k من المتسلسلات العشوائية. ان ظهور القيم المميزة الصفرية ينذر بأَنَّ الأُنموذج المبني يتضمن اعتماديات خطية بين المتسلسلات، ولذلك فإن بعض المتسلسلات يجب ان تحذف من الأُنموذج للحصول على حل غير شاذ، (Liu, 2006).

6- التنبؤ باستخدام أُنموذج متجه ARMA:

Forecasting Using Vector ARMA Models

بافترض وجود $X_t's$ من المشاهدات متاحة حتى الزمن n ومن المرغوب التنبؤ بالمشاهدات $\mathbf{X}_{n+\ell}$ إذ إن $\ell \geq 1$. تحت شرط الانعكاسية، ونستطيع كتابة $\mathbf{X}_{n+\ell}$ بالصيغة:

$$\mathbf{X}_{n+\ell} = \hat{\mathbf{X}}_{\mathbf{n}}(\ell) + \mathbf{e}_{\mathbf{n}}(\ell) \quad (39)$$

إذ إن $\hat{\mathbf{X}}_{\mathbf{n}}(\ell)$ تمثل التنبؤ لـ $\mathbf{X}_{n+\ell}$ وأَن $\mathbf{e}_{\mathbf{n}}(\ell)$ متجه أَخطاء التنبؤ المقابلة لها، وكما في التنبؤ لنماذج ARIMA أُحادية المتغير فإن القيمة الصغرى لمتوسط مربع خطأ التنبؤ لـ $\mathbf{X}_{n+\ell}$ هو التوقع الشرطي لـ $\mathbf{X}_{n+\ell}$ ، الذي هو:

$$\hat{\mathbf{X}}_{\mathbf{n}}(\ell) = E(X_{n+\ell} X_n, X_{n-1}, \ldots) \quad (40)$$

وإنَّ

$$\mathbf{e_n}(\ell) = \mathbf{X_{n+\ell}} - \hat{\mathbf{X}}_\mathbf{n}(\ell) \qquad (41)$$

عمليا يتم ايجاد متجه التنبؤ $\hat{\mathbf{X}}_\mathbf{n}(\ell)$ تكراريا باستخدام الصيغة:

$$\hat{\mathbf{X}}_\mathbf{n}(\ell) = \mathbf{C} + \boldsymbol{\varphi}_\mathbf{1}\hat{\mathbf{X}}_\mathbf{n}(\ell-1) + \cdots + \boldsymbol{\varphi}_\mathbf{p}\hat{\mathbf{X}}_\mathbf{n}(\ell-p) - \boldsymbol{\theta}_\mathbf{1}E(\mathbf{a_{n+\ell-1}}) - \cdots - \boldsymbol{\theta}_\mathbf{q}E(\mathbf{a_{n+\ell-q}}) \qquad (42)$$

إذ إن:

$$\hat{\mathbf{X}}_\mathbf{n}(j) = \mathbf{X}_{n+j} \quad for \quad j \le 0 \quad , E(\mathbf{a_{n+j}}) = \mathbf{0} \quad for \quad j > 0 \quad , E(\mathbf{a_{n+j}}) = \mathbf{a_{n+j}} \quad for \quad j \le 0$$

بافتراض أَنَّ $\mathbf{C}$ و$\boldsymbol{\theta}_\mathbf{i}'\mathbf{s}$ و$\boldsymbol{\varphi}_\mathbf{i}'\mathbf{s}$ معلومة، وعملياً تكون غير معلومة ، وتستبدل بقيم مقدراتها. كذلك تحت فرض أَن $\{a_t\}$هي متتابعة تشويش أَبيض فإِن متجه الأَخطاء $\mathbf{e_n}(\ell)$ يتوزع توزيعاً طبيعياً بمتجه متوسط صفري ومصفوفة تغاير مشترك $\mathbf{I}$ ، (Liu, 2006) (Wei, 2006).

7- الجانب التطبيقي:

7-1 عينة البحث:

إن الهدف من هذا البحث هو الحصول على أُنموذج متجه ARMA الذي يتكون من ثلاث متسلسلات لظواهر جوية لمدينة الموصل هي المعدلات الشهرية لدرجات الحرارة العظمى مقاسة بـ (م^o) والمتمثلة بـ (X_1) ، والمعدلات الشهرية لدرجات الحرارة الصغرى مقاسة بـ (م^o) والمتمثلة بـ (X_2) والمعدلات الشهرية للتبخر والمقاسة بالـ (ملم) والمتمثل بـ (X_3).

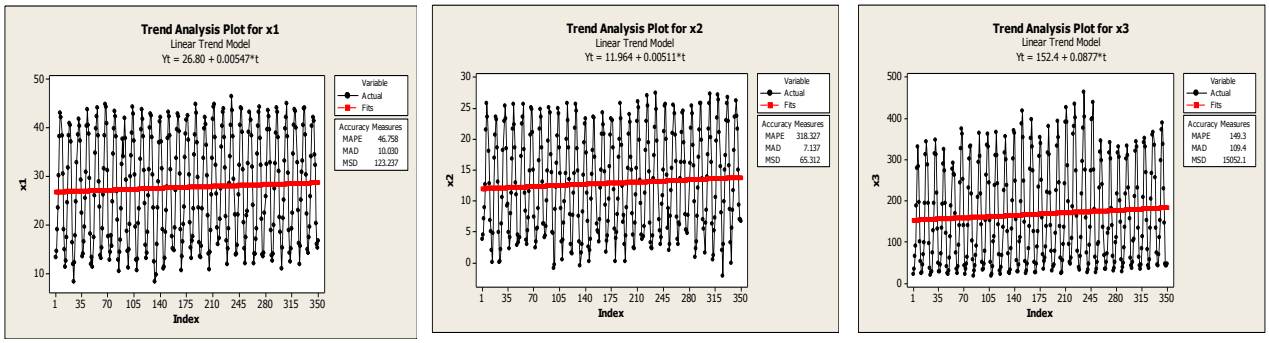
لغرض النمذجة بأُسلوب متجه نماذج ARMA فإِن عينة البيانات التي تم الحصول عليها من دائرة الانواء الجوية والرصد الزلزالي الرشيدية/نينوى تتكون من 360 مشاهدة لكل متغير منذ شهر كانون الثاني 1981 ولغاية كانون الاول 2010 استخدمت في عملية النمذجة ، فيما حجزت بيانات الشهور العشرة الاخيرة من عام 2010 لأغراض المقارنة كعينة بعدية Out of Sample مع التنبؤات التي يتم الحصول عليها، ثم اختيار الأُنموذج الأفضل للتنبؤ من خلال الاعتماد على معيار MSE.

7-2 بناء أُنموذج متجه ARMA

1- التعرف التجريبي Tentative Identification

الشكل(1) يبين رسم الاتجاه العام للمتسلسلات الثلاث(X_1,X_2,X_3) ، يتبين أَنَّ المتسلسلات الثلاث غير مراوحة، والشكل (2) يوضح مصفوفات الارتباط المتقاطع لمتجه المتسلسلات الثلاث،

ويظهر جلياً وجود سلوك موسمي غير مراوح نتيجة وجود مصفوفات ارتباط متقاطع معنوية عند التخلفات 12 و24.



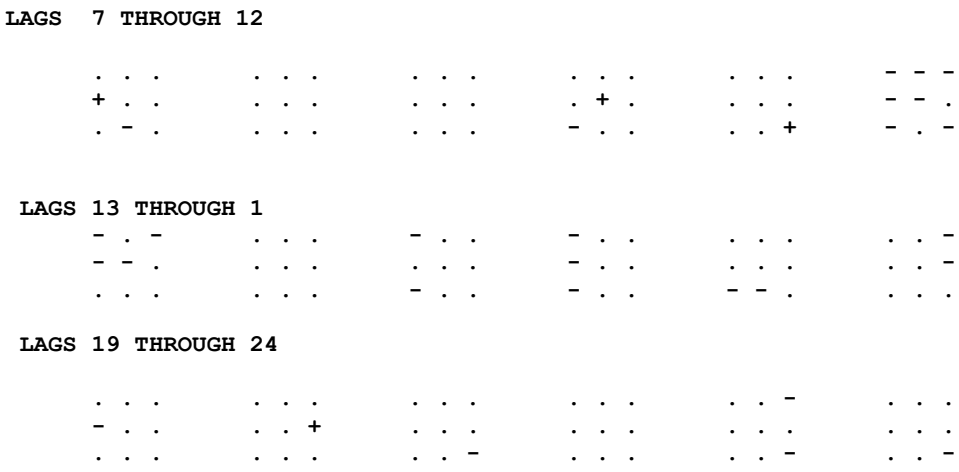
(*a*) (*b*) (*c*)

الشكل(1)(a): يوضح رسم الاتجاه العام للمعدلات الشهرية لدرجات الحرارة العظمى و(b): رسم الاتجاه العام للمعدلات الشهرية لدرجات الحرارة الصغرى و(c): رسم الاتجاه العام للمعدلات الشهرية للتبخر

```
CROSS CORRELATION MATRICES IN TERMS OF +,-,.
LAGS  1 THROUGH  6

      + + +      + + +      . . +      - - -      - - -      - - -
      + + +      + + +      . . .      - - -      - - -      - - -
      + + +      + + +      - - .      - - -      - - -      - - -

 LAGS  7 THROUGH 12

      - - -      - - -      . . -      + + +      + + +      + + +
      - - -      - - -      . . -      + + +      + + +      + + +
      - - -      - - -      + + .      + + +      + + +      + + +

 LAGS 13 THROUGH 18

      + + +      + + +      . . +      - - -      - - -      - - -
      + + +      + + +      . . .      - - -      - - -      - - -
      + + +      + + +      - - .      - - -      - - -      - - -

 LAGS 19 THROUGH 24

      - - -      - - -      . . -      + + +      + + +      + + +
      - - -      - - -      . . .      + + +      + + +      + + +
      - - -      - - -      + . .      + + +      + + +      + + +
```

الشكل(2): يوضح مصفوفات الارتباط المتقاطع لمتجه المتسلسلات الثلاث

```
CROSS CORRELATION MATRICES IN TERMS OF +,-,.
LAGS  1 THROUGH  6

      + . +      + . +      + . .      + + +      + . +      . . +
      + + .      . . .      . . .      + . .      + . +      . . +
      + . +      + . +      + . +      + . +      + . .      . . .
```



الشكل (3): يوضح الارتباطات المتقاطعة لمتجه المتسلسلات الزمنية بعد أخذ الفرق الموسمي الاولS=12

إن وجود ارتباطات متقاطعة معنوية (+) عند التخلفات الموسمية 12 و 24 دفع الباحثين إلى أخذ الفرق الموسمي الاول لكل متسلسلة، والشكل (3) يوضح مصفوفات الارتباط المتقاطع بعد أخذ الفروق الملائمة ، ويظهر جلياً تحقق المراوحة في سلوك المتسلسلات الثلاث. كما نلاحظ من الشكل (3) أنَّ الارتباطات المتقاطعة لم تهبط إلى الصفر بعد تخلفات دنيا . وهذا يدل على أنَّ متجه المتسلسلات لا يمكن ان يمثل بأُنموذج متجه متوسطات متحركة MA(q) من الرتب الدنيا، وكذلك نجد من عينة مصفوفات الانحدار الذاتي الجزئي الجدول (1) أنها لا تنقطع بشكل تام عند التخلفات الدنيا وهذا يدل ايضاً على أنه لا يمكن تمثيل متجه المتسلسلات الزمنية من خلال أُنموذج متجه انحدار ذاتي AR(p) من الرتب الدنيا.

من الجدول (1) وجد أنه لم يكن بالإمكان تشخيص متجه المتسلسلات بأُنموذج انحدار ذاتي خالص او أُنموذج متوسطات متحركة خالص من اية مرتبة، لذلك كان الاتجاه نحو الحصول على جدول أصغر الارتباطات القانونية ، الذي تبرز أهميته في النماذج المختلطة، إذ إن أعلى مرتبة لأُنموذج ARIMA(p,q) تقع في الزاوية اليسرى العليا من الرموز غير المعنوية.

من الجدول (2) الذي يمثل نتائج الارتباطات القانونية نلاحظ أنَّ الزاوية العليا اليسرى من القيم غير المعنوية تقع عند النقطة (1,0) ، أي إنه يمكن اقتراح أُنموذج ARMA(1,0)، كذلك يلاحظ وجود زاوية عليا يسرى من القيم غير المعنوية عند النقطة (12,0) ، كذلك عند النقطة (0,12) مما يؤدي إلى اقتراح الجزء الموسمي SARMA(1,1) ولكون الجدول المذكور في أعلاه مطبقاً على بيانات قد تم أخذ الفرق الموسمي لها فيكون الأُنموذج المقترح هو $SARIMA(1,0,0)*(1,1,1)_{12}$.

الجدول (1): يوضح الانحدار الذاتي المتسلسل ومصفوفات الانحدار الذاتي الجزئي

LAG	RESIDUAL VARIANCES	EIGENVAL. OF SIGMA	CHI-SQ TEST	AIC	SIGNIFICANCE OF PARTIAL AR COEFF.
1	.563E+01 .372E+01 .676E+03	.252E+01 .629E+01 .676E+03	95.52	9.331	+ − . + ... +
2	.552E+01 .369E+01 .662E+03	.251E+01 .620E+01 .662E+03	12.50	9.343	. . + ... +
3	.539E+01 .365E+01 .661E+03	.250E+01 .607E+01 .661E+03	9.14	9.366	+ . . . .
4	.528E+01 .357E+01 .638E+03	.245E+01 .594E+01 .639E+03	23.66	9.342	. . . . . . + − .
5	.526E+01 .346E+01 .627E+03	.241E+01 .583E+01 .628E+03	16.17	9.342	. . . . . + . . .
6	.521E+01 .345E+01 .622E+03	.240E+01 .577E+01 .622E+03	7.16	9.370	. . . .
7	.514E+01 .337E+01 .602E+03	.234E+01 .571E+01 .603E+03	20.83	9.353	. . . + . . . − .
8	.501E+01 .337E+01 .598E+03	.232E+01 .563E+01 .598E+03	8.62	9.376	. . . .
9	.492E+01 .335E+01 .583E+03	.231E+01 .557E+01 .583E+03	11.65	9.389	. . + ... +
10	.491E+01 .332E+01 .560E+03	.230E+01 .555E+01 .560E+03	14.59	9.391	. . . . . . − . .

الجدول (2): يوضح ملخص نتائج الارتباطات القانونية

SIMPLIFIED SCAN TABLE (1%) LEVEL:

Q MA :	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
AR															
0 :	X	X	O	X	O	O	O	O	O	O	X	X	O	O	O
1 :	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	X	O	O	O
2 :	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	X	O	O	O
3 :	X	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	X	O	O	O
4 :	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	X	O	O	O
5 :	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	X	O	O	O
6 :	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	X	O	O	O
7 :	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
8 :	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
9 :	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
10 :	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
11 :	X	X	X	X	X	X	X	X	O	O	O	O	O	O	O
12 :	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
13 :	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
14 :	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O

لقد أَشار كل من (Wei, 1990) و (Liu, 2006) إلى أَنه بالإمكان عدم أَخذ الفرق اذا كانت البيانات غير مراوحة في النماذج متعددة المتغيرات، لذا فقد قام الباحثون بتوفيق ما يقرب من 60 أُنموذجاً بأَخذ الفرق وبدون أَخذ الفرق لغرض الوصول إلى افضل النماذج وتم ترشيح 7 نماذج ، التي استوفت شرط صحة الأُنموذج ، وتم استخدام معيار SIC لغرض التوصل إلى افضل أُنموذج في تمثيل البيانات ، الذي تكون صيغته، (Burke and Hunter, 2004):

$$SIC = \ln\left|\hat{\boldsymbol{\Sigma}}\right| + K\frac{\ln(n)}{n}$$

ويتضح من الجدول (3) أَن أَقل قيمة SIC هي للأُنموذج المرشح SARIMA(1,0,0) $*(0,1,1)_{12}$.

الجدول (3): يوضح النماذج المرشحة لتمثيل متجه ARMA لمتسلسلات الظواهر الجوية وقيمة معيار SIC لكل منها

أُنموذج	$\|\Sigma\|$	SIC
SARIMA(1,0,0)*$(1,1,1)_{12}$	3167.224946	2637.05
SARIMA(1,0,0)*$(1,1,0)_{12}$	5690.907825	2821.721
SARIMA(1,0,0)*$(0,1,1)_{12}$	2244.478194	2612.009
SARIMA(1,0,0)*$(0,1,0)_{12}$	10877.77625	3138.059
SARIMA(1,0,0)*$(1,0,0)_{12}$	5242.673977	2897.906
SARIMA(1,0,0)*$(1,0,1)_{12}$	2579.595554	2664.726
SARIMA(1,1,0)*$(1,0,1)_{12}$	5437.642065	2907.421

2- تقدير المعلمات Estimation of Parameter:

تم التقدير الاولي لمعلمات الأُنموذج المسمى بأسم (weather) باستخدام طريقة الامكان الأعظم الشرطي ، فقد بلغ عدد المعلمات (18) معلمة متكونة من مصفوفتين، الأُولى تمثل مصفوفة معلمات الانحدار الذاتي ، والثانية مصفوفة معلمات المتوسطات المتحركة الموسمية. إن الأُنموذج يحتوي على مكون MA، فتمت اعادة تقدير الأُنموذج النهائي باستخدام الخوارزمية المضبوطة Exact Algorithm ، ثم تمت اعادة عملية تقدير المعلمات بعد حذف المعلمات غير المعنوية اخيراً ، تم الحصول على النتائج الآتية:

```
FINAL MODEL SUMMARY WITH MAXIMUM LIKELIHOOD PARAMETER ESTIMATES
 ----- PHI MATRICES -----
 ESTIMATES OF    PHI(  1 ) MATRIX AND SIGNIFICANCE

      .334     .000     .000      + . .
      .191     .184     .000      + + .
      .000     .000     .636      . . +

 ESTIMATES OF  THETA( 12 ) MATRIX AND SIGNIFICANCE

      .915     .000     .000      + . .
      .000     .895    -.004      . + -
      .000     .000     .964      . . +
```

ويمكن كتابة أُنموذج $SARIMA(1,0,0)*(0,1,1)_{12}$ متعدد المتغيرات بصيغ منفردة كما يلي:

$$\left.\begin{aligned} X_{1t} &= 0.334X_{1(t-1)} + a_{1t} - 0.915a_{1(t-12)} \\ X_{2t} &= 0.191X_{1(t-1)} + 0.184X_{2(t-1)} + a_{2t} - 0.895a_{2(t-12)} + 0.004a_{3(t-1)} \\ X_{3t} &= 0.636X_{3(t-1)} + a_{3t} - 0.964a_{3(t-12)} \end{aligned}\right\} \qquad (46)$$

نلاحظ من المعادلات المذكورة في أَعلاه أَن معدلات درجات الحرارة العظمى لشهر معين تتاثر بدرجات حرارة الشهر السابق بمقدار 0.334 ، كذلك تتأثر بأَخطاء السنة (الموسم) السابقة بمقدار0.915. في حين أَنَّ معدلات درجات الحرارة الصغرى لشهر معين تعتمد على معدلات درجات الحرارة العظمى للشهر السابق بمقدار 0.191 ، على درجات الحرارة الصغرى للشهر السابق بمقدار 0.184 وكذلك على أَخطاء درجات الحرارة الصغرى للسنة الماضية بمقدار0.895 ، أَخطاء التبخر للسنة الماضية بمقدار0.004، واخيراً المعدلات الشهرية للتبخر لشهر معين تعتمد على معدلات الشهر السابق بمقدار 0.636 وعلى أَخطاء السنة السابقة للتبخر بمقدار0.964.

وقد حسبت الجذور المميزة للمصفوفة PHI(1) ، كانت القيم الذاتية هي0.18403 و 0.33386 و 0.63561 ، التي كل منها اقل من (1) . وهذا يدل على أَنَّ الأُنموذج مراوح. في حين أَنَّ الجذور المميزة للمصفوفة THETA وكانت القيم الذاتية 0.91456 و0.89525 و 0.96395 ، التي جميعها اقل من (1) مما يدل على ان الأُنموذج يمتلك خاصية قابلية الانعكاس.

3- الفحوص التشخيصية Diagnostic Checking :

يبين الشكل (4) مصفوفات الارتباط المتقاطع لعشر تخلفات لبواقي الأُنموذج $SARIMA(1,0,0)*(0,1,1)_{12}$

```
CROSS CORRELATION MATRICES IN TERMS OF +,-,.
 LAGS  1 THROUGH  6
      . . .      . . .      . . .      + . .      . . .      . . .
      . . .      . . .      . . .      . . .      . . .      . . .
      . . .      . . .      . . .      . - .      + . .      . . .
 LAGS  7 THROUGH 10
      . . +      . . .      . . +      . . .
      + . .      . . .      . . .      . . .
      . . .      . . .      . . +      . . .
--
```

الشكل (4): يوضح مصفوفات الارتباط المتقاطع لبواقي الأُنموذج$SARIMA(1,0,0)*(0,1,1)_{12}$

نلاحظ من الشكل (4) أَنَّ مصفوفات الارتباط المتقاطعة لبواقي الأُنموذج $SARIMA(1,0,0)*(0,1,1)_{12}$ تمثل عملية تشويش أَبيض ، إذ نجد أَنَّ اغلب مصفوفات الارتباط المتقاطع غير معنوية مع وجود ارتباطات معنوية قليلة عند تخلفات ومواقع عشوائية ولا تكرر نفسها في الموقع نغسه ضمن مصفوفات الارتباط المتقاطع للبواقي.

وقد حسبت الجذور المميزة لمصفوفة التغاير المشترك(Σ) ، وكانت القيم الذاتية تساوي 419.69994 و3.53448 و1.51303 إذ إنَّ هذه القيم غير صفرية ، هذا يعني ان الأُنموذج $SARIMA(1,0,0)*(0,1,1)_{12}$ لا يتضمن اعتمادية خطية بين المتسلسلات ولا يجب حذف اية متسلسلة من المتسلسلات الثلاث.

4- التنبؤ Preddiction:

بعد ان تم تقدير معلمات الأُنموذج والفحوص التشخيصية لصحة الأُنموذج ، تم اجراء عشرة تنبؤات بخطوة واحدة إلى الأَمام One Step Ahead Forecast وكما مبين في الشكل (5) المذكورة في ادناه.

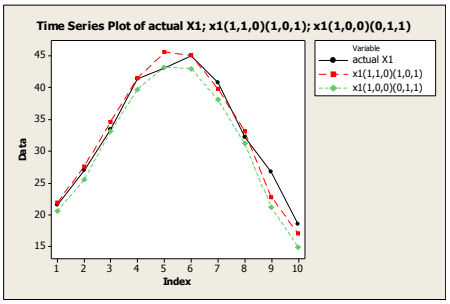
```
 ----------------------------------------
  10 FORECASTS, BEGINNING AT ORIGIN = 350
 ----------------------------------------
SERIES:       X1                  X2                  X3

 TIME     FORECAST  STD ERR   FORECAST  STD ERR   FORECAST  STD ERR

  351      20.529    1.767      8.614    1.503     82.658   20.478
  352      25.458    1.863     12.718    1.589    119.597   24.265
  353      33.158    1.873     17.228    1.601    218.089   25.637
  354      39.725    1.875     22.630    1.603    314.907   26.170
  355      43.234    1.875     25.548    1.603    355.896   26.383
  356      42.993    1.875     25.482    1.603    316.501   26.468
  357      38.071    1.875     20.287    1.603    224.138   26.503
  358      31.161    1.875     15.049    1.603    129.027   26.517
 359      21.130    1.875      7.444    1.603     59.118   26.522
 360      14.900    1.875      4.056    1.603     29.283   26.524
```

الشكل(5): يوضح قيم التنبؤ من خلال أُنموذج متجه $ARIMA(1,0,0)*(0,1,1)_{12}$

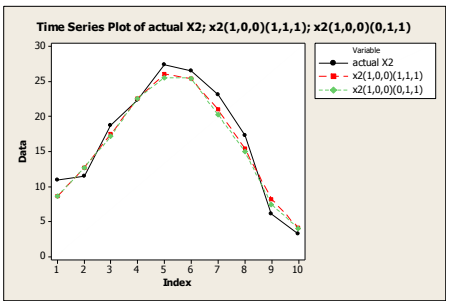
كذلك لاحظ الباحثون، (انظر الجدول (4)) أَنَّ الأُنموذج $ARIMA(1,1,0)*(1,0,1)_{12}$ على الرغم من عدم امتلاكه أقل قيمة لمعيار SIC إلاّ أَنه قدم تنبؤات لمعدلات درجات الحرارة العظمى أدق ، واعتماداً على قيمة MSE من تلك التي قدمها الأُنموذج $ARIMA(1,0,0)*(0,1,1)_{12}$ الذي امتلك أَقل قيمة لمعيار SIC. كذلك فقد قدم الأُنموذج $ARIMA(1,0,0)*(1,1,1)_{12}$ تنبؤات لمعدلات درجات الحرارة الصغرى أَدق اعتماداً على معيار MSE من بقية النماذج. ولوحظ ايضاً أَن الأُنموذج $ARIMA(1,0,0)*(1,0,1)_{12}$ قدم تنبؤات للمعدلات الشهرية للتبخر واعتمادا على معيار MSE أَدق من بقية النماذج.

الجدول (4): يوضح قيم MSE للتنبؤ بمتسلسلات البحث الثلاث من خلال النماذج $ARIMA(1,0,0)*(0,1,1)_{12}$و $ARIMA(1,1,0)*(1,0,1)_{12}$ و $ARIMA(1,0,0)*(1,1,1)_{12}$ و $ARIMA(1,0,0)*(1,0,1)_{12}$

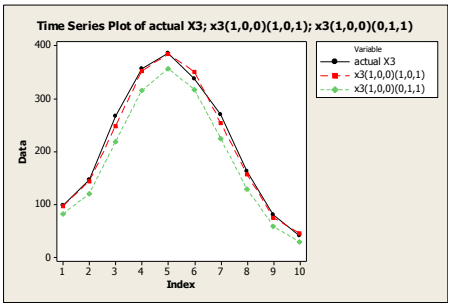
Model	X_1	X_2	X_3
$ARIMA(1,0,0)*(0,1,1)_{12}$	6.2243661	2.8753074	1015.151355
$ARIMA(1,1,0)*(1,0,1)_{12}$	2.8144219	5.5273265	294.4137922
$ARIMA(1,0,0)*(1,1,1)_{12}$	4.4042311	2.3917233	294.7026353
$ARIMA(1,0,0)*(1,0,1)_{12}$	4.4899057	2.9664442	95.072961



(a)



(b)



(c)

الشكل (6)(a): يوضح رسم القيم الحقيقية لمعدلات درجات الحرارة العظمى مع تنبؤات كل من الأُنموذجين $ARIMA(1,0,0)*(0,1,1)_{12}$ و$ARIMA(1,1,0)*(1,0,1)_{12}$ و(b): رسم القيم الحقيقية لمعدلات درجات الحرارة الصغرى مع تنبؤات كل من الأُنموذجين $ARIMA(1,0,0)*(0,1,1)_{12}$و $ARIMA(1,0,0)*(1,1,1)_{12}$ و(c): رسم القيم الحقيقية لمعدلات التبخر مع تنبؤات كل من الأُنموذجين $ARIMA(1,0,0)*(0,1,1)_{12}$ و $ARIMA(1,0,0)*(1,0,1)_{12}$

يبين الشكل (6) رسم القيم الاصلية والقيم التنبؤية لأُنموذجين الاول الذي يمتلك أَقل قيمة لمعيار SIC ، الذي يعد الافضل في تمثيل البيانات . والأُنموذج الثاني الذي يعد الافضل في التنبؤ بالاعتماد على معيار MSE. لكل متغير ، الذي منه يظهر أَن هذه النماذج رغم اختلافها تسلك سلوك القيم الحقيقية نفسها.

8- الاستنتاجات:

1- الأُنموذج المقترح في تمثيل البيانات قيد الدراسة هو $ARIMA(1,0,0)*(0,1,1)_{12}$ ، اعتماداً على معيار المعلومات SIC .

2- أَدق التنبؤات للمعدلات الشهرية لدرجات الحرارة العظمى كانت للأُنموذج ARIMA $(1,1,0)*(1,0,1)_{12}$ ، اعتماداً على أَقل قيمة لمعيار MSE.

3- أَدق التنبؤات للمعدلات الشهرية لدرجات الحرارة الصغرى كانت للأُنموذج ARIMA $(1,0,0)*(1,1,1)_{12}$ ، اعتماداً على أَقل قيمة لمعيار MSE.

4- أَفضل التنبؤات للمعدلات الشهرية للتبخر كانت للأُنموذج $ARIMA(1,0,0)*(1,0,1)_{12}$ بالاعتماد على معيار MSE.

5- الاستنتاجات السابقة تؤكد ما توصل اليه باحثون سابقون من أَن الأُنموذج الافضل في تمثيل البيانات ليس بالضرورة هو الادق في التنبؤ ، إذ يمكن ان يقدم الأُنموذج الافضل في تمثيل البيانات تنبؤات ضعيفة خارج العينة.

9- التوصيات:

1- التنبؤات التي تم الحصول عليها من النماذج المذكورة في اعلاه سلكت سلوك القيم الاصلية نفسها على نحو كبير، لذا بإمكان دائرة الانواء الجوية في الموصل توظيف هذه النماذج والاستفادة منها في عملية التنبؤ.

2- استخدام مصفوفات الارتباط المتقاطع الموسعة في تشخيص مراتب أُنموذج متجه ARMA(p,q) والتي تستخدم في حالة المتسلسلات الزمنية غير الموسمية.

3- استخدام اسلوب الشبكات العصبية للتنبؤ بالمتغيرات الثلاثة ومقارنة نتائج التنبؤ مع تلك المستحصل عليها باستخدام نماذج متجه ARMA.

4- تعميم الدراسة بإدخال ظواهر جوية اخرى مثل سرعة الرياح والسطوع الشمسي وغيرها لمعرفة العلاقة بينهما والتنبؤ بها.

المصادر:

1- فاندل، والتر ،(1983)، "**السلاسل الزمنية من الوجهة التطبيقية ونماذج بوكس–جنكنز**"، تعريب ومراجعة عبد المرضي حامد عزام، دار المريخ للنشر(1992)، الرياض، المملكة العربية السعودية.

2- Becker, C. and Fried, R. ,(2013), **"Sliced Inverse Regression for High-dimensional Time Series**", Universit¨at Dortmund, D-44221 Dortmund, Germany.

3- Burke, S.P. and Hunter, J.,(2005)," **Modelling Non-Stationary Time Series"**, Antony Rowe Ltd, Chippenham and Eastbourne, New York.

4- Guan, H. Jiang,Q. and Hong, Z., (2007)," **A New Metric for Classification of Multivariate Time series"**, Journal of Fourth International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery , Volume 1, 453-457 .

5- Liu, L.-M.,(2002), "**Forecasting and Time Series Analysis Using the SCA Statistical System**" , Volume 2 , Scientific Computing Associates Crop, Chicago.

6- Liu,L.-M.,(2006),"**Time Series Analysis and Forecasting** ",2nd ed., Scientific Computing Associates Crop.,Illinois, USA.

7- Liu, L.-M. and Hudak, G.B. ,(1994), "**Forecasting and Time Series Analysis Using the SCA Statistical System**" , Volume 1 , Scientific Computing Associates Crop, Chicago .

8- Stefanakos, Ch. N and Schinas, O. ,(2014), **"Forecasting bunker prices; A nonstationary, multivariate methodology"**, Transpor- tation Research Part C, Volume 38, 177-194 .

9- Tiao, G.C. and Box, G.E.P. ,(1981) , "**Modeling Multiple Time Series with Applications**" , Journal of American Statistical Association , Vol. 76 , 802-816.

10- Wei, W.W.S. , (1990) , "**Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods**" , Addison-Wesley Publishing Company , United States of America.

11- Wei, W.W.S. , (2006) , "**Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods**" , 2nd Edition, Addison-Wesley, United States of America.

12- Zivot, E. and Wang, J.(2006),"**Modeling Financial Time Series with S-Plus"**, Springer Science+Business Media, Inc United States of America.