The Administration & Economic College Journal
For Economics & Administration & Financial Studies
Vol. 12,N.2, P P. 114-127
ISSN PRINT 2312-7813
ISSN ONLINE 2313-1012
مجلة كلية الإدارة والاقتصاد للدراسات الاقتصادية
والإدارية والمالية
المجلد ١٢، العدد٢، ٢٠٢٠ ص ص ١١٤-١٢٧

Comparison of two methods (MLE & LS) to estimate the parameters and survival function of the Weibull- Rayleigh compound distribution (Simulation study)

*مقارنة طريقتي (MLE &L.S) لتقدير معلمات ودالة البقاء لتوزيع (ويبل – رايلي) المركب (دراسة محاكاة)

**أ.م.د شروق عبد الرضا سعيد ***الباحث احمد عاجل مجلي

Abstract : In this study, the comparison between the method of maximum potential and the method of the lower squares was used to estimate the parameters and the survival function of the (Weibull- Rayleigh) compound distribution, Where the simulation method was used to compare the two methods and through a program written in the language (R), A number of cases were assumed for the parameters and a number of sample sizes, To determine the best method of estimation, the statistical scale (MSE), The results of the simulation showed the superiority of the maximum potential method on the lower square.

المستخلص

تم في هذا البحث المقارنة بين طريقة الامكان الاعظم وطريقة المربعات الصغرى الاعتيادية لتقدير معلمات ودالة البقاء للتوزيع المركب (ويبل – رايلي) ،حيث تم استعمال اسلوب المحاكاة للمقارنة بين الطريقتين وعن طريق برنامج كتب بلغة (R) ، اذ تم افتراض عدد من الحالات للمعلمات وعدد من احجام العينات ، ولمعرفة افضل طريقة في التقدير تم استعمال المقياس الاحصائي (MSE) وقد اظهرت نتائج المحاكاة افضلية طريقة الامكان الاعظم على المربعات الصغرى الاعتيادية .

*بحث مستل

** جامعة كربلاء /كلية الادارة والاقتصاد/قسم الاحصاء

*** طالب ماجستير

المقدمة :تعد التوزيعات المركبة من التوزيعات المهمة في عملية نمذجة الكثير من الظواهر ، حيث ازداد عملية الباحثين في الاونة الاخيرة بدراسة التوزيعات المركبة سواء كانت مستمرة او متقطعة ، وهي توزيعات تنتج من تركيب توزيعين او اكثر اذ تكون هذه التوزيعات اكثر مرونة وملاءمة لاغلب البيانات من التوزيعات القياسية حيث ان بعض البيانات لايمكن تمثيلها بالشكل المطلوب فيحتم على الباحث استعمال التوزيعات المركبة ، ومن هنا تاتي اهمية دراسة طريقتي التقدير والمقارنة بينهما لاختيار افضل طريقة لتقدير معلمات ودالة البقاء للتوزيع المقترح (ويبل – رايلي) وهو توزيع ناتج من تركيب توزيع ويبل مع توزيع رايلي ، وتم توظيف اسلوب المحاكاة في عملية التقدير والمقارنة بين الطرق من خلال المعيار الاحصائي (MSE) .

2-هدف الهدف

هدف البحث هو المقارنة بين طريقتي (LS &MLE) لتقدير معالم ودالة البقاء لتوزيع مقترح جديد هو توزيع (ويبل –رايلي) وهو عبارة عن توزيع مركب من توزيعين هما توزيع ويبل ورايلي وتحديد اي الطريقتين افضل في تقدير معالم ودالة البقاء باستخدام المحاكاة من خلال المعيار الاحصائي (MSE) متوسط مربعات الخطأ .

3-الجانب النظري

1-دالة البقاء [8][10] **(The Survival Function)**

تعرف دالة البقاء بانها احتمال عدم فشل العنصر في الفاصل الزمني (t,0) وبمعنى اخر احتمال بقاء الكائن حيا حتى الوقت المحدد t ويرمز لها بالرمز S(t) ويستعمل مصطلح دالة البقاء عادة في الدراسات الطبية والحياتية وصيغتها الرياضية هي :

$$S(t) = p_r(T > t) = \int_{t}^{t\,max} p(t)\,dt$$

$$S(t) = 1 - p_r(T \le t)$$

$$S(t) = 1 - F(t) \qquad (1)$$

إن دالة البقاء تتناسب تناسباً عكسياً مع الزمن أي بعبارة أخرى إن:

$$S(t = 0) = 1$$

بينما

$$\lim_{t\to\infty} S(t) = 0$$

2- التوزيع الاحتمالي المركب(ويبل- رايلي)[3][4]

Weibull Rayleigh distribution

كان تركيز الباحثين والدراسات في السابق حول تقدير دالة البقاء ودالة المخاطرة على التوزيعات الاحتمالية الاحادية سواءا كانت مستمرة اومتقطعة الا انه في كثير من الحالات لاتعطي هذه التوزيعات الصورة الدقيقة

للتقدير لذا لجا بعض الباحثين الى نوع جديد يسمى (التوزيعات المركبة) وهي توزيعات ناتجة من دمج توزيعين او اكثر مثل(بيتا – ويبل ، الاسي – ويبل ،رايلي – باريتو ،كاما – ويبل ، كاما –– رايلي) وغيرها اذ تعد هذه التوزيعات حالة خاصة من توزيعات اوقات الفشل الشائعة والمستعملة في حقل الموثوقية وفي هذا المبحث سيتم دراسة توزيع احتمالي مركب جديد وهو توزيع (ويبل – رايلي) ذو الثلاث معلمات وصيغة التركيب ستكون كالاتي[5] :

$$F^*_{WR}(t) = \int_0^{\frac{1}{1-F^*(t)}} f^*(t)\ dt \qquad ; \qquad t > 0 \qquad (2)$$

اذ ان $F^*(t)$ دالة التوزيع التجميعية لتوزيع رايلي وتساوي

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{1} - e^{-\theta t^2} \qquad (3)$$

وان $f^*(t)$تمثل دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ويبل وتساوي

$$f^*(t.\lambda,\alpha) = \boldsymbol{\lambda}\alpha t^{\alpha-1}e^{-\lambda t^{\alpha}} \qquad (4)$$

وبتطبيق المعادلتين اعلاة في المعادلة(2) يكون لدينا الاتي :

$$F_{WR}(t;\lambda,\alpha,\theta) = \int_0^{\frac{1}{1-(1-e^{-\theta t^2})}} \lambda\alpha t^{\alpha-1}e^{-\lambda t^{\alpha}}\,dt \qquad (5)$$

$$F_{WR}(t;\lambda,\alpha,\theta) = \int_0^{e^{\theta t^2}} \lambda\alpha t^{\alpha-1}e^{-\lambda t^{\alpha}}dt \qquad (6)$$

$$F_{WR}(t;\lambda,\alpha,\theta) = -\left[e^{-\lambda t^{\alpha}}\right]_0^{e^{\theta t^2}} \qquad (7)$$

$$F_{WR}(t;\lambda,\alpha,\theta) = 1 - e^{-\lambda(\ e^{\theta t^2}\ )^{\alpha}} \qquad (8)$$

ونستطيع كتابة المعادلة اعلاه بالشكل التالي :

$$F_{WR}(t;\lambda,\alpha,\theta) = 1 - e^{-\lambda\left(\ e^{\alpha\theta t^2}\ \right)} \qquad (9)$$

اما دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الاحتمالي المركب تحسب كما يأتي:

$$f_{WR}(t;\lambda,\alpha,\theta) = \frac{dF_{WR}(t;\lambda,\alpha,\theta)}{dt} \qquad (10)$$

$$f_{WR}(t;\lambda,\alpha,\theta) = 0 - e^{-\lambda(\ e^{\alpha\theta t^2}\ )}(-\lambda)(\ e^{\alpha\theta t^2}\ )\ 2\alpha\theta t \qquad (11)$$

$$\therefore f_{WR}(t;\lambda,\alpha,\theta) = 2\lambda\alpha\theta\ t\ e^{\alpha\theta t^2}e^{-\lambda\, e^{\alpha\theta t^2}} \quad ; \quad t > 0 \qquad (12)$$

وللتوزيع المركب خصائص نذكر منها الاتي :

١– دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع المركب

$$f_{WR}(t;\lambda,\alpha,\theta) = 2\lambda\alpha\theta\ t\ e^{\alpha\theta t^2}e^{-\lambda\, e^{\alpha\theta t^2}}$$

ولابد من تحقق الشرطين الآتيين:

$$a-\ f(t) \geq 0 \qquad ,\forall t$$

b- $\int_0^{\infty} f_{WR}(t)dt = 1$

$$f_{WR}(t\,;\,\lambda,\alpha,\theta) = \int_0^{\infty} 2\lambda\alpha\theta\, t\; e^{\alpha\theta t^2} e^{-\lambda\, e^{\alpha\theta t^2}}\; dt$$

$$= -\left[e^{-\lambda\, e^{\alpha\theta t^2}}\right]_0^{\infty}$$

$$= -\left(e^{-\infty} - e^{-\lambda}\right)$$

$$= e^{-\lambda} \qquad (13)$$

ناتج التكامل لايساوي واحد ولتحويلها الى دالة احتمالية هو ضرب المعادلة (12) في مقلوب ناتج التكامل المعادلة (13) :

$$f_{WR}(t) = \frac{2\lambda\alpha\theta\, t\; e^{\alpha\theta t^2} e^{-\lambda\, e^{\alpha\theta t^2}}}{e^{-\lambda}} \qquad (14)$$

$$\therefore f_{WR}(t) = 2\lambda\alpha\theta\, t\; e^{\alpha\theta t^2} e^{\lambda}\; e^{-\lambda\, e^{\alpha\theta t^2}}$$

$$f_{WR}(t) = 2\lambda\alpha\theta\, t\; e^{\alpha\theta t^2} e^{-\lambda\left(e^{\alpha\theta t^2}\; -\; 1\right)} \qquad (15)$$

$$= \int_0^{\infty} 2\lambda\alpha\theta\, t\; e^{\alpha\theta t^2} e^{-\lambda\left(e^{\alpha\theta t^2}\; -\; 1\right)}\, dt \qquad (16)$$

$$= -\left[e^{-\lambda\left(e^{\alpha\theta t^2}\; -\; 1\right)}\right]_0^{\infty}$$

$$= -\left(e^{-\infty} - e^{0}\right)$$

$$= 1$$

٢- دالة التوزيع التراكمية للتوزيع المركب يمكن الحصول عليها كالاتي:

$$F_{WR}(t\,;\,\lambda,\alpha,\theta) = \int_0^{t} f(u)\, du \qquad (17)$$

$$F_{WR}(t\,;\,\lambda,\alpha,\theta) = \int_0^{t} 2\lambda\alpha\theta\, u\; e^{\alpha\theta u^2} e^{-\lambda\left(e^{\alpha\theta u^2}\; -\; 1\right)}\; du$$

$$F_{WR}(t\,;\,\lambda,\alpha,\theta) = -\left[e^{-\lambda\left(e^{\alpha\theta u^2}\; -\; 1\right)}\right]_0^{t}$$

$$F_{WR}(t\,;\,\lambda,\alpha,\theta) = 1 - e^{-\lambda\left(e^{\alpha\theta t^2}\; -\; 1\right)} \qquad (18)$$

٣- دالة البقاء للتوزيع المركب الجديد

$$S_{WR}(t) = 1 - F_{WR}(t)$$

$$S_{WR}(t) = e^{-\lambda\left(e^{\alpha\theta t^2}\; -\; 1\right)} \qquad (19)$$

٤- دالة المخاطرة للتوزيع المركب

$$h_{WR}(t) = \frac{f_{WR}(t)}{S_{WR}(t)}$$

$$h_{WR}(t) = \frac{2\lambda\alpha\theta\, t\; e^{\alpha\theta t^2} e^{-\lambda\left(e^{\alpha\theta t^2}\; -\; 1\right)}}{e^{-\lambda\left(e^{\alpha\theta t^2}\; -\; 1\right)}}$$

$$\therefore h_{WR}(t) = 2\lambda\alpha\theta\, t\; e^{\alpha\theta t^2} \qquad (20)$$

3- طريقة الامكان الاعظم (MLE)[6][1] (MaximumLikelihoodMethod)

تعد طريقة الامكان الاعظم من طرائق التقدير المهمة واكثرها استخداما كونها تمتاز بخصائص عدة منها الكفاية وعدم التحيز وكذلك تمتلك خاصية مهمة هي خاصية الثبات، وان مبدأ اوهدف هذه الطريقة هو ايجاد قيم تقديرية للمعلمات التي نريد تقديرها وذلك بجعل دالة الامكان في نهايتها العظمى ويرمز لدالة الامكان بالرمز (L).

فاذا كان المتغير العشوائي (T) يمتلك دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع المركب(WR) فان دالة الامكان الاعظم للمتغيرات العشوائية المستقلة $T_1, T_2, \dots \dots . T_n$ هي :

$$L(T_1, T_2, \dots, T_n, \lambda, \alpha, \theta) = f\left(t_1, \lambda, \alpha, \theta\right). f(t_2, \lambda, \alpha, \theta) \dots \dots \dots . f(t_n, \lambda, \alpha, \theta) \qquad (21)$$

$$\therefore L = \prod_{i=1}^{n} f(t_i, \lambda, \alpha, \theta) \qquad (22)$$

وبتعويض دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع (WR) في المعادلة(**22**) نحصل على المعادلة الاتية :

$$L = f(t_i, \lambda, \alpha, \theta) = \prod_{i=1}^{n} 2\lambda\alpha\theta\, t\; e^{\alpha\theta t^2} e^{-\lambda(e^{\alpha\theta t^2} - 1)} \qquad (23)$$

وبأخذ اللوغاريتم للطرفين يصبح لدينا التالي:

$$\ln L = n\ln 2 + n\ln\lambda + n\ln\alpha + n\ln\theta + \sum_{i=1}^{n} \ln ti + \alpha\theta \sum_{i=1}^{n} ti^2 - \lambda \sum_{i=1}^{n} (e^{\alpha\theta t^2} - 1)$$

وبإيجاد المشتقة الجزئية بالنسبة للمعلمات $(\lambda, \alpha, \theta)$ ومساواتها للصفر نحصل على:

$$\frac{d\ln L}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} (e^{\alpha\theta t^2} - 1)$$

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} (e^{\alpha\theta t^2} - 1)} \qquad (24)$$

$$\frac{d\ln L}{d\alpha} = \frac{n}{\alpha} + \theta \sum_{i=1}^{n} ti^2 - \lambda \sum_{i=1}^{n} (e^{\alpha\theta t^2} - 1)\, \theta t^2$$

$$\hat{\alpha} = \frac{n}{\lambda\theta \sum_{i=1}^{n} ti^2 (e^{\alpha\theta t^2} - 1) - \theta \sum_{i=1}^{n} ti^2} \qquad (25)$$

$$\frac{d\ln L}{d\theta} = \frac{n}{\theta} + \alpha \sum_{i=1}^{n} ti^2 - \lambda \sum_{i=1}^{n} (e^{\alpha\theta t^2} - 1)\, \alpha t^2$$

$$\hat{\theta} = \frac{n}{\lambda\alpha \sum_{i=1}^{n} ti^2 (e^{\alpha\theta t^2} - 1) - \alpha \sum_{i=1}^{n} ti^2} \qquad (26)$$

المعادلات اعلاه تمثل منظومة معادلات لاخطية لايمكن حلها الا باستخدام احدى الطرائق العددية للحصول على مقدرات طريقة الامكان الاعظم وقد استخدمت طريقة (Nelder–Mead) التكرارية عن طريق خوارزمية موجودة في برنامج (R).

4-طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية [9][7] (Least Squares Method (L.S))

تعتبر طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية من الطرائق المهمة لما تتميز به من خصائص في عملية التقدير، وتعتمد هذه الطريقة على توزيع القيم المرتبة لمفردات العينة ، فأذا كان لدينا عشوائية حجمها n $(\mathbf{x_1, x_2, \dots, x_n})$ من توزيع معين $\mathbf{G(x_{(j)})}$ له دالة Cdf معلومة فان:

$$\mathbf{E\left(G(x_{(j)})\right)= \frac{j}{n+1}}$$

$$\mathbf{V\left(G(x_{(j)})\right) = \frac{j(n-j+1)}{(n+1)^2(n+2)}}$$

وباستخدام التوقع والتباين يمكن الحصول على مقدرات المربعات الصغرى الاعتيادية من خلال تصغير مجموع مربعات الخطأ اقل مايمكن وكالتالي :

$$\sum_{j=1}^{n}\left(G(x_j) - \frac{j}{n+1}\right)^2$$

وبالنسبة لتوزيع(λ, α, θ) WR فأن :

$$K = \sum_{i=1}^{n}\left(1 - e^{-\lambda\left(e^{\alpha\theta x_{(j)}^2} - 1\right)} - \frac{j}{n+1}\right)^2$$

وباخذ المشتقة بالنسبة للمعلمات ومساواتها للصفر نحصل على :

$$\frac{dK}{d\lambda} = 2\sum_{i=1}^{n}\left[\left(1 - e^{-\lambda\left(e^{\alpha\theta x_{(j)}^2} - 1\right)} - \frac{j}{n+1}\right)\right] e^{-\lambda\left(e^{\alpha\theta x_{(j)}^2} - 1\right)}\left(e^{\alpha\theta x_{(j)}^2} - 1\right) \quad (27)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} e^{-\lambda\left(e^{\alpha\theta x_{(j)}^2} - 1\right)}\left(e^{\alpha\theta x_{(j)}^2} - 1\right) - \sum_{j=1}^{n} e^{-2\lambda\left(e^{\alpha\theta x_{(j)}^2} - 1\right)}\left(e^{\alpha\theta x_{(j)}^2} - 1\right) - \sum_{j=1}^{n} e^{-\lambda\left(e^{\alpha\theta x_{(j)}^2} - 1\right)}\left(e^{\alpha\theta x_{(j)}^2} - 1\right)\left(\frac{j}{n+1}\right) = 0 \quad (28)$$

$$\frac{dK}{d\alpha} = 2\sum_{j=1}^{n}\left[\left(1 - e^{-\lambda\left(e^{\alpha\theta x_{(j)}^2} - 1\right)} - \frac{j}{n+1}\right)\right] e^{-\lambda\left(e^{\alpha\theta x_{(j)}^2} - 1\right)}\lambda\left(e^{\alpha\theta x_{(j)}^2} - 1\right)\theta x_{(j)}^2 \quad (29)$$

$$\frac{dK}{d\alpha} = 2\lambda\theta\sum_{j=1}^{n} x_{(j)}^2\left(e^{\alpha\theta x_{(j)}^2} - 1\right)e^{-\lambda\left(e^{\alpha\theta x_{(j)}^2} - 1\right)}\left[\left(1 - e^{-\lambda\left(e^{\alpha\theta x_{(j)}^2} - 1\right)} - \frac{j}{n+1}\right)\right]$$

$$\frac{d\,K}{d\alpha} = \sum_{j=1}^{n} x_{(j)}^{2}\left(e^{\alpha\theta x_{(j)}^{2}} - 1 \right)e^{-\lambda\left(e^{\alpha\theta x_{(j)}^{2}} - 1 \right)} - \sum_{j=1}^{n} x_{(j)}^{2}\left(e^{\alpha\theta x_{(j)}^{2}} - 1 \right)e^{-2\lambda\left(e^{\alpha\theta x_{(j)}^{2}} - 1 \right)} - \sum_{j=1}^{n} x_{(j)}^{2}\left(e^{\alpha\theta x_{(j)}^{2}} - 1 \right)e^{-\lambda\left(e^{\alpha\theta x_{(j)}^{2}} - 1 \right)}\left(\frac{j}{n+1}\right) = 0 \qquad (30)$$

$$\frac{d\,K}{d\theta} = 2\sum_{j=1}^{n}\left[\left(1 - e^{-\lambda\left(e^{\alpha\theta x_{(j)}^{2}} - 1 \right)} - \frac{j}{n+1}\right)\right]e^{-\lambda\left(e^{\alpha\theta x_{(j)}^{2}} - 1 \right)}\lambda\left(e^{\alpha\theta x_{(j)}^{2}} - 1 \right)\alpha x_{(j)}^{2} \qquad (31)$$

$$\frac{d\,K}{d\theta} = 2\lambda\alpha\sum_{j=1}^{n} x_{(j)}^{2}\left(e^{\alpha\theta x_{(j)}^{2}} - 1 \right)e^{-\lambda\left(e^{\alpha\theta x_{(j)}^{2}} - 1 \right)}\left[\left(1 - e^{-\lambda\left(e^{\theta x_{(j)}^{2}} - 1 \right)^{\alpha}} - \frac{j}{n+1}\right)\right] = \sum_{j=1}^{n} x_{(j)}^{2}\left(e^{\alpha\theta x_{(j)}^{2}} - 1 \right)e^{-\lambda\left(e^{\alpha\theta x_{(j)}^{2}} - 1 \right)} - \sum_{j=1}^{n} x_{(j)}^{2}\left(e^{\alpha\theta x_{(j)}^{2}} - 1 \right)e^{-2\lambda\left(e^{\alpha\theta x_{(j)}^{2}} - 1 \right)} - \sum_{j=1}^{n} x_{(j)}^{2}\left(e^{\alpha\theta x_{(j)}^{2}} - 1 \right)e^{-\lambda\left(e^{\alpha\theta x_{(j)}^{2}} - 1 \right)}\left(\frac{j}{n+1}\right) = 0 \qquad (32)$$

المعادلات اعلاه تمثل منظومة معادلات لاخطية لايمكن حلها الا باستعمال احدى الطرائق العددية للحصول على مقدرات طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية وقد استخدمت طريقة (Nelder–Mead) التكرارية وطبقت عن طريق خوارزمية موجودة في برنامج (R).

3–الجانب التجريبي

1–المحاكاة [1][2] (Simulation)

عملية المحاكاة هي تشبيه تقريبي للنظام في الواقع الحقيقي وتمثيله بصورة طبق الاصل دون اخذ النظام نفسه اي يمكننا القول بإن المحاكاة هى عملية تقليد لظاهرة حقيقية فى وجود مجموعة من المعادلات الحسابية – الرياضية – ضمن برامج الكومبيوتر المتقدمة من أجل الدراسة والتقييم ،فهي اسلوب رقمي لانجاز بعض التجارب

على الحاسب الالكتروني من خلال عمليات رياضية ومنطقية لوصف هيكلية وسلوك النظام الحقيقي ضمن مدة زمنية معينة ، ومن اهم مميزات تجربة المحاكاة هي مرونتها حيث ان لها القابلية على الاختبارات وتكرار التجربة مرات عديدة وذلك من خلال تغيير مدخلات عملية التقدير في كل مرة وكذلك لها اهمية في عشوائية توليد الارقام حيث ان في كل تجربة تكون سلسلة الارقام العشوائية مستقلة عن الاخرى، اسلوب المحاكاة يرفدنا بمعلومات مفيدة حول الواقع الحقيقي الذي يقلده فضلاً عن تكرار التجربة حيث أن المدخلات المتغيرة في كل مرة تعطي شرحاً وافياً لطبيعة العملية الرياضية المستعملة، وبذلك فإن مرونة عملية المحاكاة في دراسة مسائل مختلفة تعطي القدرة على التجريب واجراء التعديلات والتغييرات من أجل استثمار المال والوقت والجهد المبذول.

2-مراحل تجربة المحاكاة

تضمنت تجربة المحاكاة خمسة مراحل وهي

المرحلة الاولى

اختيار قيم افتراضية للمعالم وجرى تحديد ثلاث نماذج مختلفة وكما مبينة في الجدول الاتي:

جدول رقم(1)

القيم الافتراضية لمعالم التوزيع المركب

Model	α	θ	λ
1	1.5	1	0.5
2	1	2	0.5
3	3	0.5	0.7

واختيار حجوم مختلفة للعينة لمعرفة مدى تاثير حجم العينة على دقة النتائج المستحصلة من طرق التقدير المستخدمة في البحث حيث كانت احجام العينات (100-50-30) صغيرة – متوسطة – كبيرة .

المرحلة الثانية

في هذه المرحلة تم توليد بيانات عشوائية تخضع لتوزيع (ويبل- رايلي) وذلك بتطبيق طريقة التحويل المعكوس من خلال استخدام دالة التوزيع التجميعية للتوزيع المركب وتوليد قيم مشاهدات تتبع التوزيع المنتظم على الفترة (0,1) وباستعمال الصيغة التالية:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda\left(e^{\alpha\theta t^2} - 1\right)}$$

بافتراض ان $F(t)=u$

$$u = 1 - e^{-\lambda\left(e^{\alpha\theta t^2} - 1\right)}$$
$$1 - u = 1 - e^{-\lambda\left(e^{\alpha\theta t^2} - 1\right)}$$
$$\log(1-u) = -\lambda\left(e^{\alpha\theta t^2} - 1\right)$$
$$e^{\alpha\theta t^2} = \frac{\lambda - \log(1-u)}{\lambda}$$

$$\alpha\theta t^2 = \log[\frac{\lambda - \log(1-u)}{\lambda}]$$

$$t = \sqrt{\frac{\log[\frac{\lambda - \log(1-u)}{\lambda}]}{\alpha\theta}} \qquad (33)$$

المرحلة الثالثة

تعتبر هذه المرحلة من اهم مراحل تجربة المحاكاة والتي تتم فيها عملية تقدير المعلمات ودالة البقاء لتوزيع (ويبل– رايلي) وباستعمال الطريقتين (MLE&LSD) التي تم التطرق اليها في الجانب النظري .

المرحلة الرابعة

هذه المرحلة تضمنت المقارنة بين الطريقتين واختيار الطريقة الافضل باستعمال المعيار الاحصائي (MSE) متوسط مربعات الخطأ وفق الصيغة الاتية :

$$MSE(S(t)) = \frac{1}{R}\sum_{i=1}^{R}(S(t_i) - \hat{S}(t_i))^2$$

المرحلة الخامسة

تم في هذه المرحلة تحليل وعرض نتائج المحاكاة باستخدام طرائق التقدير لدالة البقاء لتوزيع (ويبل – رايلي) باختيار افضل مقدر للتقدير بالاعتماد على متوسط مربعات الخطأ(MSE) والجداول التالية توضح نتائج المحاكاة :–

جدول رقم(2)

قيم معلمات التوزيع الاحتمالي المركب بالطريقيتين للانموذج الثالث

Model	n	Parameter	MLE	L.S
M=1	30	α	1.586149	1.527727
		θ	1.077919	1.019122
		λ	0.512102	0.577596
	50	α	1.574698	1.500835
		θ	1.007561	1.018745
		λ	0.529107	0.572218
	100	α	1.584148	1.486823
		θ	0.983018	1.009342
		λ	0.506094	0.564019

جدول رقم(3)

قيم معلمات التوزيع

الاحتمالي المركب بالطريقيتين للانموذج الثاني

Model	n	Paramter	MLE	L.S
M=2	30	α	1.069713	1.012027
		θ	2.094519	2.012436
		λ	0.544156	0.595593
	50	α	1.011667	1.000802
		θ	2.099879	1.988854
		λ	0.526729	0.589128
	100	α	0.982303	1.003781
		θ	2.106775	1.999221
		λ	0.511142	0.560357

جدول رقم(4)
قيم معلمات التوزيع المركب الاحتمالي

بالطريقيتين للانموذج الثالث

Model	n	Paramter	MLE	L.S
M=3	30	α	3.108179	2.964124
		θ	0.545342	0.541102
		λ	0.787178	0.777440
	50	α	3.141681	2.965924
		θ	0.527646	0.532491
		λ	0.737574	0.758377
	100	α	3.100469	2.959165
		θ	0.501618	0.508836
		λ	0.722434	0.777426

جدول رقم (5)
قيم دالة البقاء الحقيقية

والتقديرية بالطريقتين للأنموذج الاول

Model	n	t_i	$S(t_i)$	$\hat{S}_{MLE(t_i)}$	$\hat{S}_{LS(t_i)}$
M=1	30	0	1	1	1
		0.2	0.9695548	0.9710189	0.9693250
		0.4	0.8731704	0.8788861	0.8730998

جدول (6) قيم البقاء رقم دالة

		0.6	0.6990707	0.7095685	0.7008948
		0.8	0.4467089	0.4541331	0.4500977
		1	0.1753722	0.1699419	0.1784505
M=1	50	0	1	1	1
		0.2	0.9695548	0.9699312	0.9691251
		0.4	0.8731704	0.8749510	0.8722702
		0.6	0.6990707	0.7031296	0.6992686
		0.8	0.4467089	0.4506361	0.4488626
		1	0.1753722	0.1740621	0.1780469
M=1	100	0	1	1	1
		0.2	0.9695548	0.9699198	0.9689885
		0.4	0.8731704	0.8746536	0.8716360
		0.6	0.6990707	0.7019650	0.6978778
		0.8	0.4467089	0.4491000	0.4477484
		1	0.1753722	0.1741753	0.1785611

الحقيقية والتقديرية بالطريقتين للأنموذج الثاني

Model	n	t_i	$S(t_i)$	$\hat{S}_{MLE(t_i)}$	$\hat{S}_{LS(t_i)}$
M=2	30	0	1	1	1
		0.2	0.9592116	0.9600849	0.9581526
		0.4	0.8281476	0.8318311	0.8256545
		0.6	0.5902456	0.5953860	0.5886924
		0.8	0.2729901	0.2683590	0.2728623
		1	0.0409859	0.0380457	0.0480098
M=2	50	0	1	1	1
		0.2	0.9592116	0.9597280	0.9581157
		0.4	0.8281476	0.8304499	0.8255161

جدول (7) قيم البقاء رقم دالة

		0.6	0.5902456	0.5940861	0.5890174
		0.8	0.2729901	0.2722765	0.2749286
		1	0.0409859	0.0398251	0.0472961
M=2	100	0	1	1	1
		0.2	0.9592116	0.9593458	0.9583846
		0.4	0.8281476	0.8287542	0.8259369
		0.6	0.5902456	0.5908583	0.5882293
		0.8	0.2729901	0.2707003	0.2725154
		1	0.0409859	0.0395301	0.0441011

الحقيقية والتقديرية بالطريقتين للأنموذج الثالث

Model	n	t_i	$S(t_i)$	$\hat{S}_{MLE(t_i)}$	$\hat{S}_{LS(t_i)}$
M=3	30	0	1	1	1
		0.2	0.957638	0.958534	0.957517
		0.4	0.827063	0.830839	0.827284
		0.6	0.605800	0.612077	0.607055
		0.8	0.323619	0.323829	0.323655
		1	0.087407	0.082276	0.089746
M=3	50	0	1	1	1
		0.2	0.957638	0.958650	0.957878
		0.4	0.827063	0.831037	0.828477
		0.6	0.605800	0.612553	0.609051
		0.8	0.323619	0.326641	0.325981
		1	0.087407	0.084614	0.089657
M=3	100	0	1	1	1
		0.2	0.957638	0.957941	0.957158
		0.4	0.827063	0.828342	0.826005

		0.6	0.605800	0.608033	0.605521
		0.8	0.323619	0.324272	0.324715
		1	0.087407	0.086067	0.090002

جدول (8) قيم رقم

متوسط مربعات الخطأ لدالة البقاء بالطريقتين ولجميع النماذج

Model	n	**MSE** ($\hat{S}_{MLE(t_i)}$)	**MSE** ($\hat{S}_{OLS(t_i)}$)	Best
M=1	30	0.002120256	0.002118352	L.S
	50	0.001879154	0.001919981	MLE
	100	0.000905403	0.000969991	MLE
M=2	30	0.001827058	0.001776314	L.S
	50	0.001617277	0.001693988	MLE
	100	0.000860526	0.000928184	MLE
M=3	30	0.002913958	0.002950904	MLE
	50	0.001363186	0.001445049	MLE
	100	0.000663658	0.000733811	MLE

جدول رقم (9)

افضلية الطرق في تقدير دالة البقاء باستعمال مقياس المقارنة MSE حسب حجم العينة

الطريقة	حجم العينة			عدد مرات الافضلية
	n1=30	n2=50	n3=100	
MLE	1	3	3	7
LS	2	0	0	2

4- الإستنتاجات (Conclusions)

فيما يأتي عرض ملخص لأهم الاستنتاجات التي تم التوصل اليها من خلال هذا البحث:

١- تفوق طريقة الامكان الاعظم على المربعات الصغرى الاعتيادية للنماذج الثلاث وعند حجم عينة (50-100) في عملية تقدير معلمات ودالة البقاء للتوزيع المركب كونها قد امتلكت اقل متوسط مربعات خطأ .

٢- كانت الافضلية لطريقة المربعات الصغرى الاعتيادية للنموذج الاول والثاني عند حجم عينة (30) وعند النموذج الثالث كانت الافضلية لطريقة الامكان الاعظم في عملية تقدير دالة البقاء للتوزيع المركب .

٣- تتقارب قيم المعلمات المقدرة وقيم دالة البقاء من القيم الافتراضية للطريقتين ولجميع احجام العينة حيث كلما زاد حجم العينة كانت القيم اقرب للقيم الافتراضية .

6- التوصيات (Recommendations)

١- استعمال طريقة الامكان الاعظم في تقدير معلمات ودالة البقاء للتوزيعات المركبة بالنسبة لأحجام العينات الكبيرة والمتوسطة .

٢- استعمال طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية في تقدير معلمات التوزيعات المركبة بالنسبة لاحجام العينات الصغيرة.

المصادر

اولا:المصادر العربية

1-البياتي، حسام نجم (2002) "مقارنة طرائق تقدير أنموذج ويبل للفشل باستخدام المحاكاة" أطروحة دكتوراه . كلية الإدارة والاقتصاد/ جامعة بغداد .

2-عويد ، غزوان رفيق (2012) ،"مقارنة مقدرات بيز لمعلمة ودالتي المعولية ومعدل الفشل لتوزيع رالي باستعمال دوال خسارة متزنة وغير متزنة " رسالة ماجستير ، كلية الادارة والاقتصاد – الجامعة المستنصرية.

ثانيا: المصادر الاجنبية

3- Abed.M.Q and Alwan.E.B and Kneehr.A.L.(2018) Proposing A New Mixture Statistical Distribution Exponential- Kumaraswamy https://www.researchgate.net/publication/325194601.

4- Al-Kadim.K.A,and Mohammed.B.D,(2018) Rayleigh Pareto Distribution journal of Babylon University/Pure and Applied Sciences/ No.(1)/ Vol.(26): 2018.

5-AL-Kadim .k. A. and . Boshi. M. A.(2013) "Exponential –Pareto Distribution " . Mathematical Theory and Modeling., Vol . 3, No.5 , pp.135-146.

6- Coit, D.W., and JIN, T. (2000), "Gamma Distribution Parameter Estimation for Field Reliability Data with Missing Failure Times", IEEE Transactions, 32, 1161- 1166.

7- Gupta, R.K., and Kundu, D., (2000), Generalized Exponential Distribution: different method of estimations, Journal of statistical computation and simulation, vol.00, pp 1-20.

8-Hasting ,N and Evans ,M and Peacock ,B.(2000)" statistical Distribution ,3rd ed",New York Wiley , p.13,.

9-Merovci, F., & Elbatal, I. (2014). Transmuted Lindley-geometric distribution and its applications. Journal of Statistics Applications. Pro. 3, No. 1, 77-91.

10- Qamruz, Z.; and Karl, P.;(2011);"Survival Analysis Medical Research";http://interstat.statjournals.net/YEAR/2011/abstracts/1105005.php.