مقارنة طريقة Kernel اللامعلمية مع طرائق معدلة لتقدير أنموذج عمليات بواسون غير المتجانسة

د.اسماعيل هادي جلوب

Abstract

Non Homogeneous Poisson Process has property with wide application in most scientific fields specialty communication systems fields and engineering fields queuing theory and reliability theory and repairable systems and others the much from phenomenon's which attached occur it with change time.

In this research, Kernel function is using and suggested from be two researcher Lewis and Shedler for estimate non homogeneous Poisson process model ,researcher suggested weights for Kernel function to be modified method , Kernel function comparison with modified method.

المـ

عـ من

المجالات العلمية ولاسيما مجالات أنظمة الاتصالات والمجالات الهندسية ونظرية صفوف الانتظار ونظرية المعولية والأنظمة القابلة للإصلاح وغيرها الكثير من الظواهر التي يرتبط حدوثها بتغير الزمن .

وفي هذا البحث تم استخدام دالة Kernel والمقترحة من قبل الباحثان Lewis and Shedler لتقدير أنموذج عمليات بواسون غير المتجانسة ،إذ تم اقتراح أوزان لدالة kernel لتصبح طرائق معدلة وتمت مقارنة دالة Kernel مع الطرائق المعدلة ،إذ تم استخدم مقياس AIC كمقياس للمقارنة والذي يعتمد بدوره على مقياس متوسط مربعات الخطأ ولأجل المقارنة بين الطرائق أعلاه تم استخدم حجوم العينات (٥٠, ١٠٠

(١) Massey, W. Parker, G. and Whitt, W.(١٩٩٣),"Estimating The Parameters of Non Homogeneous Poisson Processes With Linear Rate", www.columbia.edu/~ww٢٠٤٠/rate.pdf.

(٢) Kuhl, M . E,

(١٠،٢٠،٣٠,،إذ أظهرت النتائج تفوق طريقة Kernel على الطرائق المعدلة لأغلب القيم الافتراضية.

١- المقدمة وهدف البحث

إن العمليات بواسون التي يكون فيها المعدل الزمني لحدوث الحوادث (نسبة الحدوث) $\lambda(t)$ متغيراً" لكل قيم t أي أنها تتأثر بالزمن t في سلوكها،فأنها تسمى عمليات بواسون غير متجانسة (Non Homogeneous Poisson Process) .

أجريت الكثير من الدراسات حول عمليات بواسون ، في عام (١٩٩٣) قام الباحثون (Massey – Parker &Whitt) بمقارنة مقدرات طريقتي (OLS, WLS) لعمليات بواسون غير المتجانسة لأنموذج الانحدار الخطي البسيط حيث قاموا بتجزئة الفترة [t, ٠) إلى عدد من الفترات الجزئية (Subintervals) [١]. وفي عام (١٩٩٨) قام الباحثان (kuhl & Wilson) باستخدام الطرائق اللامعلمية لتقدير دالة القيمة المتوسطة (mean value function) لعمليات بواسون غير المتجانسة (NHPP) التي لها اتجاه عام طويل أو تأثيرات دورية وقد استخدم أسلوب المحاكاة لتقدير تلك الدالة [٢]. وفي عام (٢٠٠٥) قام الباحثان (Mallas , Zhao) بتحليل نماذج الأنظمة القابلة للإصلاح الكاملة (complete repairable systems) لعمليات بواسون غير المتجانسة وكان ذلك من خلال استخدام طريقة الإمكان الأعظم [٣]. وفي عام ٢٠٠٦ قام الباحث Shibata وآخرون بتطبيق المصفوفات التي تعتمد في نماذج المعولية البرمجية على نماذج عمليات بواسون غير المتجانسة [٤] .وفي عام (٢٠٠٧) قام الباحث (Bjarte) بمقارنة عدد من دوال عمليات بواسون غير المتجانسة من خلال استخدام خاصية (Sufficiency) في تكوين اختبار حسن المطابقة المضبوط (Exact goodness-of fit test) لمعلمات عمليات بواسون غير المتجانسة (NHPP) [٣].وفي نفس العام قام الباحثون Okamura , Tateishi Dohi , باستخدام الاستدلال الإحصائي لتوليد فيروس الحاسوب الذي يستخدم عمليات بواسون غير المتجانسة[١].وفي عام ٢٠٠٩ قام الباحث Honzhi وآخرون باستخدام أنموذج عمليات بواسون غير المتجانسة على الصيانة للسيطرة على انواع حوادث الحريق[٢].

وفي هذا البحث تم تقدير انموذج عمليات بواسون غير المتجانسة بعدة طرائق منها طريقة Kernel وقد تمت مقارنة هذه الطريقة مع طرائق معدلة .

٢- عمليات بواسون غير المتجانسة Non Homogeneous Poisson Process [٣], [٤]

قبل الدخول في طرائق التوليد لابد لنا من تعريف عمليات بواسون غير المتجانسة وكما يلي:

(١) Okamura, H., Tateishi ,k. and Dohi,T.,(٢٠٠٧),"Statistical inference of computer virus propagation non-homogeneous Poisson process "Journal International symposium on software reliability ,pp:١٤٩-١٥٨\IEEE.

(٢) Honzhi, T., Junhui, Y.,Longji, H. and Feng, L.,(٢٠٠٩),"On-condition maintenance based on non-homogeneous Poisson process

عملية العد { N(t) , t ≥ ٠ } يقال لها عمليات بواسون غير المتجانسة (NHPP) بدالة شدة (Intensity Function) λ (t) ، t ≥ ٠ إذا توافرت الشروط الآتية :-

(i) عدد الحوادث بالزمن صفر يساوي صفر N.
N(٠) =٠

(ii) عملية العد {N (t), t ≥ ٠}اي عدد الحوادث بالزمن t لها زيادات مستقلة ولكنها غير مستقرة.

(iii) احتمال حدوث أكثر من حادثة في المدة الزمنية h يقترب من الصفر $P\{N(t+h) - N(t) \geq ٢\} = O(h)$

(iv) احتمال حدوث حادثة واحدة خلال الزمن h $P\{N(t+h) - N(t) = ١\} = \lambda(t)h + O(h)$

٣- طريقة التوليد لأنموذج عمليات بواسون غير المتجانسة [١]

في عام ١٩٨٩ اعتمد الباحث Joe على الخطوات التالية وذلك بالاعتماد على توليد أزمنة البينية وتجميع تلك الأزمنة ثم اختبارها ثم قبول أو رفض تلك الأزمنة:

<u>خوارزمية Joe</u>

- اجعل I=٠.
- I=I+١
- U(I)=RND .
- توليد زمن بيني يتبع التوزيع الآسي $(t(I) = -\frac{1}{P} * \log(1 - U(I)))$
- T(I)=T(I)+E(I).
- V(I)=RND.
- إذا كانت $V(I) > \frac{\lambda(t)}{\lambda}$ ارجع إلى الخطوة رقم ٢.
- إذا كان I > N انتقل إلى الخطوة التالية وإلا ارجع إلى الخطوة ٢.
- النهاية.

٤- أنموذج قانون القوة Power Law Model [١]

يسمى هذا النموذج بأنموذج قانون القوة،اذ يستخدم كدالة للمعدل الزمني للحدث بمعلمتين θ , β إذ تم استخدام هذا الأنموذج في توليد عمليات بواسون غير المتجانسة والدالة :-

(١) Rigdon,S.E.and Basu,A.P.,(٢٠٠٠), "Statistical Methods for the Reliability of Repairable Systems", John Wiley & Sons,Inc.

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\theta}(\frac{t}{\theta})^{\beta-1} \quad \text{.....}$$

(١)

إذ إن:

إذ إن $\beta , \theta > 0$

β : تمثل معلمة الشكل

θ : تمثل معلمة القياس

٥- تقدير Kernel [٢]

في عام ١٩٧٦ اقترح الباحثان Lewis and Shedler دالة Kernel التقديرية لتقدير أنموذج عمليات بواسون غير المتجانسة وهي كما يلي:

$$\hat{\lambda}_{Kernel}(t) = \frac{1}{b(n)}\sum_{i=1}^{n} Q(\frac{t_i - T}{b(n)}) \quad \text{.....}$$

(٢)

إذ إن:

$b(n)$: هي دالة تقترب من الصفر عند ضربها ب(n) إي إن تحقق الشرط التالي $nb(n) \to 0$.

Q:دالة التوزيع الطبيعي القياسي بوسط حسابي صفر وبانحراف قياسي σ.

t_i : هي أزمنة المتولدة من أنموذج عمليات بواسون غير المتجانسة.

T :الزمن الكلي .

وقد اقترح الباحث أوزان لدالة Kernel وهي كما في الصيغة التالية:

١- $W_i = \exp(\frac{t_i}{\sum_{i=1}^{n} t_i})$ ..... (٣)

٢- $W_i = \frac{I(I+1)}{N(I+N)}$ ..... (٤)

إذ إن:

t_i : أزمنة المتولدة من انموذج عمليات بواسون غير المتجانسة.

I: رتب أوقات الفشل لأنموذج عمليات بواسون غير المتجانسة.

إذ يتم ضرب كل وزن من هذه الأوزان بدالة Kernel لتصبح طريقة معدلة ثانية وثالثة.

٦- الجانب التجريبي

تم استخدام المحاكاة لغرض المقارنة بين الطرائق المختلفة تجريبيا ، حيث يتميز هذا الأسلوب بالمرونة ويوفر الكثير من الوقت والجهد والمال

وفيه يتم توليد البيانات نظريا من دون الحصول عليها عمليا وأيضا دون الإخلال بدقة النتائج المطلوبة وتتلخص هذه الطريقة بالخطوات التالية:

١- تحديد القيم الافتراضية: تم اختيار خمسة حجوم للعينات هي , ١٠٠) (١٠ , ٢٠ , ٣٠ , ٥٠ واسُتخدمت قيم افتراضية لأوقات T لتوليد أنموذج عمليات بواسون غير المتجانسة حسب طريقة Kernel كما تم تحديد قيم افتراضية لمعلمة الشكل β ومعـلمة القياس θ كما تم افتـراض لقـيمة P وهــي $P = 50$ وكما في الجدول التالي:

t_1	θ	β
1.2	0.4	0.6
		0.7
	0.5	0.6
		0.7
2.5	0.4	0.6
		0.7
	0.5	0.6
		0.7
3.5	0.4	0.6
		0.7
	0.5	0.6
		0.7
4.5ش	0.4	0.6
		0.7
	1ض	0.6
		0.7

٢- توليـد البيانـات: تـم توليـد أزمنـة لأنمـوذج عمليـات بواسـون غيـر المتجانسة وحسب الطريقة المذكورة سابقا.

٣- تـم توليـد متغيـر Z١ يتبـع التوزيـع الطبيعـي وكمـا فـي الخطـوات التالية[٩]:

١-U_1=RND.

..... (٥)

٢- U_2=RND.

..... (٦)

٣- $x = \sqrt{-2 * \log(U_1)} * \cos(2 * 3.14 * U_2)$ . ..... (٧)

٤- $y = \sqrt{-2 * \log(U_1)} * \sin(2 * 3.14 * U_2)$ ..... (٨)

٥- $Z1 = x^2 + y^2$.

..... (٩)

٤- بعـد توليـد متغيـر Z١ الـذي يتبـع التوزيـع الطبيعـي يـتم تحويـل هـذا المتغير الى التوزيع الطبيعي القياسي بوسط حسابي افتراضـي $\bar{x} = 0.09$ وبانحراف معياري افتراضي $\sigma = 0.05$ وكما يلي:

$$Z = \sigma Z1 + \overline{x} \quad \text{.....}$$

(١٠)

٥- تم تعويض الأزمنة المتولدة لأنموذج عمليات بواسون غير المتجانسة في صيغة دالة Kernel ودوال Kernel المعدلة لاستخراج القيمة التقديرية لأنموذج عمليات بواسون غير المتجانسة $\hat{\lambda}(t)$.

٦- مقياس المقارنة: أولا تم الاعتماد على مقياس متوسط مربعات الخطأ وفق الصيغة التالية:

$$MSE\ (\hat{\lambda}(t)) = \frac{\sum_{i=1}^{L} (\hat{\lambda}(t) - \lambda(t))^2}{L} \quad \text{.....}$$

(١١)

إن:

L= عدد مرات التجربة

$\hat{\lambda}(t)$ = مقدر الطريقة المعتمدة

$\lambda(t)$ =القيمة حسب الأسلوب المستخدم

وثانيا على معيار (AIC (Akaike information criteria والذي يمكن كتابة معادلته بالصيغة التالية[٢]

$$AIC = N \log(\ MSE\ (\hat{R}(t)) + 2n \quad \text{.....}$$

(١٢)

إذ إن:

N = حجم العينة.

n = عدد المعالم.

إذ تم استخراج متوسط مربعات الخطأ لأنموذج عمليات بواسون غير المتجانسة وتعويضها في المقياسAIC والذي يعتبر مقياس حديث الاستخدام ولهذا السبب تم استخدامه من قبل الباحث في هذا البحث.

إذ تم تكرار التجربة إلى (١٠٠٠) مرة.

٧-الاستنتاجات

١- أظهرت النتائج بان طريقة Kernel هي الأفضل لأغلب القيم الافتراضية من باقي الطرائق وذلك لامتلاكها اقل AIC .

٢- بينت النتائج بان طريقة المعدلة الأولى هي أفضل من باقي الطرائق بالنسبة للقيم الافتراضية لمعلمتي الشكل والقياس $\theta = 0.4, \beta = 0.7$ وللزمن الافتراضي البيني T=١,٢ ولجميع حجوم العينات كما بينت النتائج بان الطريقة المعدلة الأولى الأفضل من باقي الطرائق بالنسبة للقيم

الافتراضية لمعلمتي الشكل والقياس $\beta = 0.7$ وللقيم $\theta = 0.5,0.4$ الافتراضية للزمن البيني ٢,٥ , T=١,٢ ولحجوم العينات (٥٠ , ١٠٠ , ١٠, ٢٠).

٣- أظهرت النتائج تقارب طريقة Kernel مع الطريقة المعدلة الأولى من حيث AIC ولجميع حجوم العينات ولكافة القيم الافتراضية.

٤- حصلت الطريقة المعدلة الثانية على المرتبة الأخيرة ضمن نتائج التقدير ولجميع حجوم العينات.

٥- بينت النتائج بان مقياس AIC يقل كلما زادت حجم العينة وهذا يتفق مع النظرية الإحصائية.

٨- التوصيات

- يوصي الباحث باعتماد طريقة Kernel في تقدير أنموذج عمليات بواسون غير المتجانسة.
- يوصي الباحث بتوسيع نطاق البحث وذلك بمقارنة طرائق معلمية وغير معلمية.

٩- الجداول

الجداول أدناه تبين نتائج التقدير لحجوم العينات (١٠ , ٢٠ , ٣٠ , ٥٠ , ١٠٠) وكما يلي:

جدول رقم (١)

يبين نتائج التقدير لمقياس AIC لحجم العينة (١٠)

t_i	θ	β	الطريقة Kernel	الطريقة المعدلة الأولى	الطريقة المعدلة الثانية	الأفضل
1.2	0.4	0.6	-11.93917	-11.68855	-4.99548	Kernel
		0.7	-7.893773	-8.103084	-3.211685	طريقة المعدلة الأولى
	0.5	0.6	-13.47529	-12.29267	-4.072569	Kernel
		0.7	-11.15279	-11.20321	-4.298972	طريقة المعدلة الأولى
2.5	0.4	0.6	-15.33394	-14.13179	-6.232856	Kernel
		0.7	-11.29446	-11.42802	-4.795115	طريقة المعدلة الأولى
	0.5	0.6	-14.74056	-13.04507	-4.997966	Kernel
		0.7	-14.18716	-13.61847	-5.481517	Kernel
3.5	0.4	0.6	-15.93078	-14.53554	-6.654617	Kernel
		0.7	-12.06863	-12.06444	-5.325826	Kernel
	0.5	0.6	-14.86842	-13.12182	-5.267681	Kernel
		0.7	-14.88227	-14.10106	-5.989534	Kernel
4.5	0.4	0.6	-16.08636	-14.64915	-6.895594	Kernel
		0.7	-12.31048	-12.08172	-5.657368	Kernel
	0.5	0.6	-14.91431	-13.11672	-5.369998	Kernel
		0.7	-14.91059	-14.12748	-6.349543	Kernel

جدول (٢)
يبين نتائج التقدير لمقياس AIC لحجم العينة (٢٠)

t_i	θ	β	الطريقة Kernel	الطريقة المعدلة الأولى	الطريقة المعدلة الثانية	الأفضل
1.2	0.4	0.6	-27..84745	-27.33367	-14.58588	Kernel
		0.7	-17.5467	-17.80991	-9.078686	طريقة المعدلة الأولى
	0.5	0.6	-28.86287	-27.63001	-11.78123	Kernel
		0.7	-25.21143	-25.34616	-12.54885	طريقة المعدلة الأولى
2.5	0.4	0.6	-33.53413	-32.45787	-17.82993	Kernel
		0.7	-24.52131	-24.61567	-12.73657	طريقة المعدلة الأولى
	0.5	0.6	-31.74926	-30.29884	-13.84602	Kernel
		0.7	-31.22165	-31.16592	-15.3539	Kernel
3.5	0.4	0.6	-34.59494	-33.24186	-18.77367	Kernel
		0.7	-26.15662	-26.00665	-13.85886	Kernel
	0.5	0.6	-32.20742	-30.7035	-14.51174	Kernel
		0.7	-32.54733	-32.07978	-16.45249	Kernel
4.5	0.4	0.6	-34.77057	-33.30305	-19.07565	Kernel
		0.7	-26.4494	-26.22124	-14.34105	Kernel
	0.5	0.6	-32.12658	-30.56395	-14.79061	Kernel
		0.7	-32.67857	-32.01723	-16.97141	Kernel

جدول (٣)
يبين نتائج التقدير لمقياس AIC لحجم العينة (٣٠)

t_i	θ	β	الطريقة Kernel	الطريقة المعدلة الأولى	الطريقة المعدلة الثانية	الأفضل
1.2	0.4	0.6	-44.62319	-44.02198	-24.20308	Kernel
		0.7	-28.94669	-29.26292	-16.17773	طريقة المعدلة الأولى
	0.5	0.6	-37.58807	-36.35046	-13.46312	Kernel
		0.7	-41.43786	-41.31218	-22.10933	طريقة المعدلة الأولى
2.5	0.4	0.6	-53.63294	-52.86904	-28.79097	Kernel
		0.7	-39.65501	-39.46078	-22.04278	Kernel
	0.5	0.6	-42.99934	-41.72522	-16.98071	Kernel
		0.7	-50.05545	-49.68638	-26.26724	Kernel
3.5	0.4	0.6	-55.62661	-54.62037	-30.35468	Kernel
		0.7	-41.99759	-41.77649	-23.67028	Kernel
	0.5	0.6	-44.07069	-42.68831	-18.23259	Kernel
		0.7	-52.27629	-51.60501	-27.63031	Kernel
4.5	0.4	0.6	-55.54236	-54.45652	-31.03871	Kernel
		0.7	-42.62138	-42.3723	-24.44944	Kernel
	0.5	0.6	-44.279	-42.79857	-18.88614	Kernel
		0.7	-52.4532	-51.79314	-28.33586	Kernel

جدول (٤)
يبين نتائج التقدير لمقياس AIC لحجم العينة (٥٠)

ti	θ	β	الطريقة Kernel	الطريقة المعدلة الأولى	الطريقة المعدلة الثانية	الأفضل
1.2	0.4	0.6	-70.42444	-69.72969	-38.40297	Kernel
		0.7	-50.13684	-50.68389	-29.31981	طريقة المعدلة الأولى
	0.5	0.6	-75.15251	-73.92441	-32.80608	Kernel
		0.7	-71.37745	-71.5565	-39.11913	طريقة المعدلة الأولى
2.5	0.4	0.6	-83.78267	-82.77263	-46.64063	Kernel
		0.7	-68.9944	-69.22799	-38.01956	طريقة المعدلة الأولى
	0.5	0.6	-82.4847	-81.18208	-38.08682	Kernel
		0.7	-86.71469	-86.32719	-45.66887	Kernel
3.5	0.4	0.6	-87.42244	-86.33052	-48.72574	Kernel
		0.7	-73.59783	-73.54068	-40.45089	Kernel
	0.5	0.6	-83.63499	-82.26275	-40.03519	Kernel
		0.7	-90.03762	-89.42751	-47.59337	Kernel
4.5	0.4	0.6	-88.50742	-87.33601	-49.69536	Kernel
		0.7	-74.98536	-74.80087	-41.72682	Kernel
	0.5	0.6	-83.49188	-81.98963	-41.01325	Kernel
		0.7	-90.27711	-89.76017	-48.526	Kernel

جدول (٥)

يبين نتائج التقدير لمقياس AIC لحجم العينة (١٠٠)

ti	θ	β	الطريقة Kernel	الطريقة المعدلة الأولى	الطريقة المعدلة الثانية	الأفضل
1.2	0.4	0.6	-148.3147	-147.7345	-79.43697	Kernel
		0.7	-104.2881	-104.8198	-67.07429	طريقة المعدلة الأولى
	0.5	0.6	-156.4176	-154.9753	-67.72749	Kernel
		0.7	-149.2243	-149.3134	-85.64435	طريقة المعدلة الأولى
2.5	0.4	0.6	-171.6	-170.487	-95.37496	Kernel
		0.7	-139.9561	-140.0758	-84.36279	طريقة المعدلة الأولى
	0.5	0.6	-169.6927	-168.0362	-77.60788	Kernel
		0.7	-177.381	-176.7983	-98.07446	Kernel
3.5	0.4	0.6	-176.1046	-174.8861	-99.42342	Kernel
		0.7	-147.8309	-147.9049	-89.4477	طريقة المعدلة الأولى
	0.5	0.6	-170.6209	-168.8213	-81.58074	Kernel
		0.7	-182.8744	-182.1232	-102.4819	Kernel
4.5	0.4	0.6	-176.7192	-175.4412	-100.7678	Kernel
		0.7	-148.9795	-148.9429	-92.04132	Kernel
	0.5	0.6	-169.5784	-167.7856	-83.57593	Kernel
		0.7	-182.5232	-181.7032	-104.8325	Kernel

المصادر

١- الحمداني،علي بندر ،(٢٠٠٩)،" مقارنة تقديرات طريقتي(WLS) &MLلبعض نماذج عمليات بواسون غير المتجانسة "رسالة ماجستير- كلية الإدارة والاقتصاد – جامعة بغداد.

٢- جلوب، إسماعيل هادي،(٢٠١١)،"ايجاد التوزيع الثنائي باستخدام دوال رابطة مختلفة مع تطبيق في المجال الحيوي"، أطروحة دكتوراه فلسفة في الإحصاء مقدمة إلى كلية الإدارة والاقتصاد في الجامعة بغداد.

٣- Bjarte, R. (٢٠٠٧),"Exact statistical Inference in Non homogeneous Poisson Processes, Based on Simulations".www.math.tamu.edu/~joel.zinn/papers/pois.pdf.

٤- Honzhi, T., Junhui, Y.,Longji, H. and Feng, L.,(٢٠٠٩),"On- condition maintenance based on non-homogeneous Poisson process model", Journal International conference on Electronic measurement and amp, Instrument , pp:١-٥\IEEE.

٥- Joe, H .,(١٩٨٩),"Statistical Inference for General Order Statistics and Non Homogeneous Poisson Processes Software Reliability Models ", IEEE Transaction on Software Engineering November ١٩٨٩ (vol.١٥, No .١١)pp.١٤٨٥-١٤٩٠.

٦- Kuhl, M . E, Damerdji, and Wilson, J.R. (١٩٩٨)."Least Squares Estimation of Non

Homogeneous Poisson Processes", In Proceeding of The Winter Simulation Conference, eds.D.J. Medeiros, E.F. Watson J. S. Carson and M.s. Maniranran,٦٣٧-٦٤٥.

٧- Lewis , P.A., and Shedler,G.S.(١٩٧٦),"Statistical Analysis of Non-stationary Series of Events in a Data Base System "IBM Journal of Research and Development,٢٠,pp.٤٦٥-٤٨٢.

٨- Massey, W. Parker, G. and Whitt, W.(١٩٩٣),"Estimating The Parameters of Non Homogeneous Poisson Processes With Linear Rate", www.columbia.edu/~ww٢٠٤٠/rate.pdf.

٩- Melamed ,B. and Rubinstein ,(١٩٩٨),"Modern Simulation and Modeling ", John Wiley & Sons,Inc.

١٠- Okamura, H., Tateishi ,k. and Dohi,T.,(٢٠٠٧),"Statistical inference of computer virus propagation non-homogeneous Poisson process "Journal International symposium on software reliability ,pp:١٤٩-١٥٨\IEEE.

١١- Rigdon,S.E.and Basu,A.P.,(٢٠٠٠),"Statistical Methods for the Reliability of Repairable Systems", John Wiley & Sons,Inc.

١٢-Shibata,K.,Rinsaka,K. and Dohi,T.,(٢٠٠٦),"Matrices –based software reliability models using non-homogeneous Poisson process" Journal International symposium on software reliability engineering,pp:٥٢-٦١\IEEE.

١٣- Wong, H.L., Hsieh, S. H. and Tu,Y.H.,(٢٠٠٩),"Application of non Homogeneous Poisson Process modeling to containership arrival rate", Journal International conference on Innovative computing ,pp:٨٤٩-٨٥٤\IEEE.

١٤- Zhao, W., and Mallas, "Modeling and Analysis of Repairable Systems With General Repair". www.reliasoft.com/pubs/٢٠٠٥rm_٠٧B_٠٣.pdf.