استخدام اسلوب الاسقاط المنحدر (Gradient Projection) في تقدير معلمات الانموذج AR (2)

د.حسام نجم البياتي د.جواد كاظم الموسوي
قسم الاحصاء والمعلوماتية / كلية الرافدين الجامعة

المستخلص

هناك العديد من طرائق التقدير قد تم استخدامها في مجال السلاسل الزمنية وبالاخص لنماذج بوكس–جنيكنر والتي تتمثل بمقدرات الامكان الاعظم (MLE) المضبوطة (exact) والتقريبية (approx.) وايضاً مقدرات المربعات الصغرى الاعتيادية (ols) وغيرها.

وفي بحثنا هذا تم التعامل مع احد طرائق البرمجة غير الخطية وهي طريقة الاسقاط المنحدر (Gradient Projection) وتوظيفها لايجاد مقدرات نموذج الانحدار الذاتي من الرتبة الثانية AR(2). وتم الحصول على نتائج مقبولة من خلال التطبيق.

Using Gradient Projection approach in estimating The parameters of AR(2) Model

Dr. Jawad K. Al-Moussawi Dr. Husam Najem Al-Bayati
Department of Statistics and Informatics

Abstract

Many of estimation Methods in Time Series study such as Box-Jenkins Models which represented with Exact and approximate maximum likelihood Estimators and ordinary least squares estimators are used.

In our research , non-linear programming methods such as Gradient Projection approach is considered. The estimators of AR(2) model by using the suggested method with application are found.

المقدمة :

تعد نماذج بوكس جينكنز (Box-Jenkins) عام 1970 من اهم النماذج التي اسهمت وبشكل فعال في تحليل السلاسل الزمنية والتي تفترض ان عنصر الخطأ العشوائي يتبع وفقاً للتحليل الاحصائي التوزيع الطبيعي $N(0,\sigma_a^2)$. وقد قام العديد من الباحثين والمختصين في هذا المجال بدراسة مسألة التقدير لمعلمات هذه النماذج والتي تعتبر من اهم مراحل بناء النماذج التي وضعها بوكس جينكنز. كما طرحت العديد من طرائق التقدير من قبل كل من (Quenouille,1957) و (whittle,1962) و(Hannan,1970) و(Anderson,1975) و(Ansley and Newbold,1981) و(Bahansali,1993)وغيرهم. وقد تمثلت هذه الطرائق باسلوب الامكان الاعظم المضبوطة (Exact Maximum Likelihood) والتقريبية (Approximate Maximum Likelihood) واسلوب المربعات الصغرى الاعتيادية (ordinary least squares) واسلوب بيز (Bayes Estimation) وغيرها.

وفي بحثنا هذا تم استخدام اسلوب البرمجة غير الخطية في عملية تقدير معلمات نموذج الانحدار الذاتي من المرتبة الثانية AR(2) وذلك من خلال تطبيق اسلوب الاسقاط المنحدر (Gradient projection) ، وذلك بالاعتماد على مجموع مربعات الخطأ للنموذج المدروس.

الانموذج AR(2) :

يمكن كتابة صيغة الانموذج بدلالة المعادلة العشوائية للفروق كما يأتي :

$$(1-\phi_1 B-\phi_2 B^2)\,X_t = a_t \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

ولكي تكون السلسلة مستقرة ينبغي ان تقع جذور المعادلة $\phi(B)=1-\phi_1 B-\phi_2 B^2=0$ خارج الدائرة ذات نصف القطر (1). وسواء كانت الجذور حقيقية ام مركبة فأن شرط الاستقرارية يكون

$$-1<\phi_1<1 \quad , \quad -2<\phi_2<2$$

طرائق تقدير الانموذج :

١. **دالة الامكان : Likelihood Function**

يمكن الحصول على تقديرات الامكان الاعظم المضبوطة للسلسلة الزمنية (1) كما يأتي :

$$L(\phi_1,\phi_2,\sigma^2)=(2\pi\sigma_a^2)^{-\frac{n}{2}}(1+\phi_2)\left\{(1-\phi_2)^2-\phi_1^2\right\}^{\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{s(\phi_1,\phi_2)}{2\sigma_a^2}\right] \ldots. \quad (2)$$

حيث ان :

$$S(\phi_1,\phi_2)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} m_{ij}^{(2)}\, X_i X_j+\sum_{t=3}^{n}(X_t-\phi_1 X_{t-1}-\phi_2 X_{t-2})^2$$

$$\left\{m_{ij}^{(2)}\right\}=\begin{bmatrix}1-\phi_2^2 & -\phi_1(1+\phi_2)\\ -\phi_1(1+\phi_2) & 1-\phi_1^2\end{bmatrix}$$

وبأخذ اللوغاريتم للمعادلة (2) واشتقاقها بالنسبة الى ϕ_1, ϕ_2 ومساواتها الى الصفر :-

$$\frac{\partial \text{Ln L}}{\partial \hat{\phi}_1}=\frac{-\hat{\phi}_1}{(1-\phi_2)^2-\hat{\phi}_1^2}+D_{12}-\hat{\phi}_1 D_{22}-\hat{\phi}_2 D_{32}=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$\frac{\partial \text{Ln L}}{\partial \hat{\phi}_2}=\frac{-2\hat{\phi}_2(\hat{\phi}_2-1)-\hat{\phi}_1^2}{(1+\hat{\phi}_2)\left\{(1-\hat{\phi}_2)^2-\hat{\phi}_1^{\,2}\right\}}+D_{13}-\hat{\phi}_1 D_{23}-\hat{\phi}_2 D_{33}=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

حيث ان :

$$D_{ij}=X_i X_j+X_{i+1} X_{j+1}+\ldots+X_{n+1-j} X_{n+1-i}$$

وبحل المعادلتين (3) , (4) نحصل على $\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2$.

وعندما يكون حجم العينة كبير جداً فأنه يمكن ايجاد مقدر الامكان الاعظم التقريبي وكما يأتي:

$$\hat{\phi}_1=\frac{\frac{(n-4)}{(n-2)}D_{13}D_{23}-\frac{(n-3)}{(n-1)}D_{12}D_{33}}{\left(\frac{n-4}{n-3}\right)D_{23}^2-\frac{(n-3)}{(n-2)}D_{22}D_{33}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$\hat{\phi}_2=\frac{\frac{(n-2)}{(n-1)}D_{12}D_{23}-\frac{(n-3)}{(n-2)}D_{22}D_{13}}{\left(\frac{n-2}{n-3}\right)D_{23}^2-\frac{(n-3)}{(n-4)}D_{22}D_{33}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

٢. <u>المربعات الصغرى</u> :-

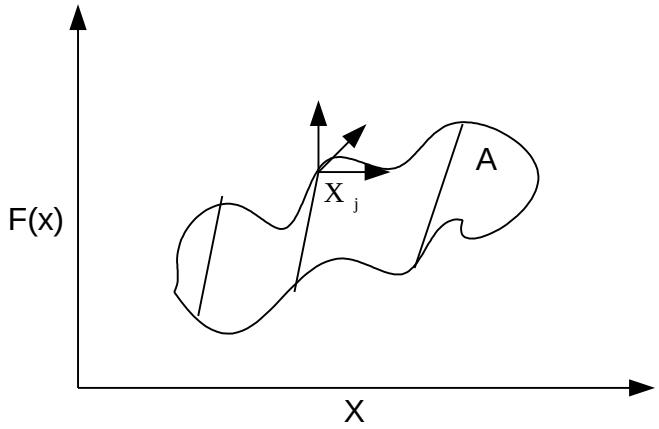
ان مقدرات المربعات الصغرى تكون بالشكل الآتي :

$$\hat{\phi}_1=\frac{D_{13}D_{23}-D_{12}D_{33}}{D_{23}^2-D_{22}D_{33}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

$$\hat{\phi}_2=\frac{D_{12}D_{23}-D_{22}D_{13}}{D_{23}^2-D_{22}D_{33}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

٣. <u>اسلوب الاسقاط المنحدر</u> :-

مما لاشك فيه من ان المركبة الاساسية في البرمجة غير الخطية تتمثل بميل الدالة وانحدارها ولكي نعرف طبيعة الانحدار للدالة المدروسة نفترض وجود النقطة (X_j) في الشكل رقم (١).

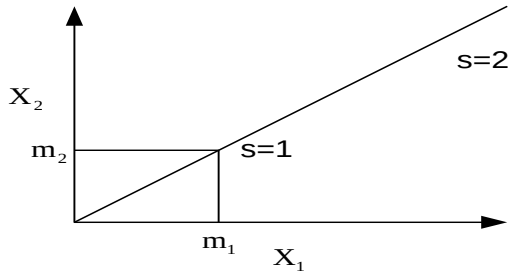


وعند هذه النقطة يتم البحث في ايجاد القيمة العظمى المجهولة للدالة f(x) والتي نفترض انها تظهر عند النقطة (A).اضافة الى ذلك فانه سيتم التأكيد على الامثلية والتي تتمثل بالقيم المحلية والمستقلة على الاحداثيات لمتجه الحل الممكن. ولاجل الاستفادة من المعلومات المحلية فقط نفترض الانتقال من النقطة (X_j) الى نقطة جديدة ولنكن (X_{j+1}) والذي عندها سيتم الاقتراب من الامثلية بمعدل اسرع.

وبشكل خاص نفترض بأنه تم التحرك بمسافة مقدارها (s) من النقطة (X_j) الى النقطة الجديدة (X_{j+1}) والتي سوف تشكل بهذا التحرك الحل الامثل المطلوب. وعليه فأن القيمة الجديدة يمكن كتابتها بالمركبة الاتية :-

$$X_{j+1}^{(i)} = X_j^{(i)} + m_i s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

حيث ان m_i تمثل اتجاه الحركة للمركبة (i) (انظر الشكل رقم ٢)



وعلى افتراض ان التقدم يتم بخطوات صغيرة مقدارها (ds) فان دالة الهدف y=f(x) تتزايد وتتناقص بقدر معين. ولذلك فان المسافة المقدرة لهذه الحركة تكون :

$$ds = \sqrt{d x_1^2 + d x_2^2 + ... + d x_n^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

وبافتراض ان (y) دالة قابلة للاشتقاق فان التغير في (y) والمرتبط بمجموعة الازاحة (dx_i) يكون بالشكل الآتي :-

$$dy = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right) dx_i$$

$$\therefore \quad dy = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right) \frac{dx_i}{ds} \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

وبذلك فان المجموعة الخاصة بالازاحات ستجعل $\frac{dy}{ds}$ صغيرة او كبيرة على قدر الامكان. وهذا هو اتجاه مبدأ الانحدار التصاعدي او التنازلي (steepest ascent or descent). ولعرض مسألة الامثلية فانه ينبغي تعظيم او تصغير الدالة (11) بحيث ان الصيغة (10) تتحقق كما يأتي :

$$\text{Maximize / Minimize:} \frac{dy}{ds} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right) \frac{dx_i}{ds}$$

S.t.

$$ds = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d x_i^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

وعند صياغة دالة لاكرانج نحصل على ما يلي :-

$$\text{Maximize / Minimize:} \quad \sum \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right) \frac{dx_i}{ds} - \lambda \left[1 - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{dx_i}{ds} \right)^2 \right]$$

وبالاشتقاق بالنسبة الى $\frac{dx_i}{ds}$ يكون :-

$$\frac{\partial y}{\partial s} - 2\lambda \left(\frac{dx_i}{ds} \right) = 0, \qquad i = 1, 2, ..., n$$

وبالاشتقاق بالنسبة الى λ يكون :

$$\sum \left(\frac{dx_i}{d\,ds} \right)^2 = 1$$

وبذلك يكون :-

$$\frac{1}{4\lambda^2} \sum \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 = 1$$

$$\therefore \; 2\lambda = \pm \sqrt{\sum \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2}$$

وبذلك فان التغيير في المركبة (i) يكون معطى بالشكل الاتي :-

$$\frac{\partial x_i}{\partial s} = \frac{\partial y}{\partial x_i} * \frac{1}{2\lambda} \quad , \quad i = 1,2,...,n$$

وبذلك يكون :-

$$X_{j+1}^{(i)} = X_j^{(i)} + \left[\frac{\partial y}{\partial X_i} * \frac{1}{2\lambda} \right] s$$

$$= X_j^{(i)} + m_i s$$

$$\therefore m_i = \frac{\frac{\partial y}{\partial x_i}}{\sqrt{\sum \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2}} \quad , \quad i = 1,2,...,n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

اما اعظم تناقص فانه يكون :-

$$m_i = \frac{-\frac{\partial y}{\partial x_i}}{\sqrt{\sum \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2}} \quad , \quad i = 1,2,...,n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

التطبيق :

تم استخدام مشاهدات عينه مؤلفة من (50) مفردة تمثل نتاجات مادة كيمياوية في المنشأة العامة للصناعات الكيمياوية مقاسة بالطن (انظر الملحق). وبعد تطبيق نماذج بوكس–جنيكنز تبين ان البيانات تخضع للانموذج AR(2). اما فيما يخص اقيام المقدرات التقليدية المدروسة فكانت كما يأتي :-

جدول رقم (1) يبين اقيام المعلمتين $\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2$ مع مجموع مربعات الخطأ (SSE)

Estimator	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_1$	SSE
MLE (Exact)	0.4889	0.5182	31.151
MLE (Approx.)	0.5129	0.4663	34.184
OLS	0.4757	0.5348	31.189

اسلوب الاسقاط المنحدر :-

عند تطبيق هذا الاسلوب فأن دالة الهدف تتمثل بتصغير مجموع مربعات الخطأ للانموذج AR(2) وكما يأتي :-

$$\text{Min.} \sum a_i^2 = \sum \left(X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2}\right)^2$$

$$\text{or} \quad y = \sum X_t^2 - 2\phi_1 \sum X_t X_{t-1} - 2\phi_2 \sum X_t X_{t-2} + 2\phi_1\phi_2 \sum X_{t-1} X_{t-2} + \phi_1^2 \sum X_{t-1}^2 + \phi_2^2 \sum X_{t-2}^2$$

$$\ldots\ldots\ldots (15)$$

وبعد ايجاد اقيام المجاميع ليتم تعويضها بالمعادلة (15) وكما يأتي :-

$$\text{Min } y = 3161 - 6218\phi_1 - 6174\phi_2 + 6112\phi_1\phi_2 + 3100\phi_1^2 + 3054\phi_2^2 \quad \ldots\ldots (16)$$

المرحلة الاولى :-

$$\frac{dy}{d\phi_1}\Big|_{(\phi_1,\phi_2)} = -6218 + 6112\phi_2 + 6200\phi_1\Big|_{(0,0)} = -6218$$

$$\frac{dy}{d\phi_2}\Big|_{(\phi_1,\phi_2)} = -6174 + 6112\phi_1 + 6018\phi_2\Big|_{(0,0)} = -6174$$

$$m_1^{(1)} = \frac{-\frac{dy}{d\phi_1}}{\sqrt{\left(\frac{dy}{d\phi_1}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\phi_2}\right)^2}} = \frac{-(-6218)}{\sqrt{(-6218)^2 + (-6174)^2}} = 0.7096$$

$$m_2^{(1)} = \frac{-\frac{dy}{d\phi_2}}{\sqrt{\left(\frac{dy}{d\phi_1}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\phi_2}\right)^2}} = \frac{-(-6174)}{\sqrt{(-6218)^2 + (-6174)^2}} = 0.7046$$

$$\therefore \phi_1^{(2)} = 0 + 0.7096\,S = 0.7096\,S$$

$$\phi_2^{(2)} = 0 + 0.7046\,S = 0.7046\,S$$

وبتعويض قيمة $\phi_1^{(2)}, \phi_2^{(2)}$ في المعادلة رقم (16) واشتقاقها بالنسبة الى (S) نحصل على قيمة (S) تساوي (S=0.7144).

$$\phi_1^{(2)} = (0.7096)(0.7144) = 0.5069$$

$$\phi_2^{(2)} = (0.7046)(0.7144) = 0.5033$$

وعند تعويضها في المعادلة رقم (16) تكون قيمة y مساوية الى (31.182).

المرحلة الثانية :-

$$\frac{dy}{d\phi_1}\Big|_{(0.5069,0.5033)} = -6218 + 6112(0.5033) + 6200(0.5069) = 0.9496$$

$$\frac{dy}{d\phi_2}\Big|_{(0.5069,0.5033)} = -1.6708$$

$$m_1^{(2)} = \frac{-0.9496}{\sqrt{(0.9496)^2 + (-1.6708)^2}} = -0.4941$$

$$m_2^{(2)} = 0.8694$$

$$\phi_1^{(3)} = \phi_1^{(2)} + m_1^{(2)} S$$
$$= 0.5069 - 0.4941 S$$
$$\phi_2^{(3)} = \phi_2^{(2)} + m_2^{(2)} S$$
$$= 0.5033 + 0.8694 S$$

وبتعـويض اقيـام $\phi_1^{(3)}, \phi_2^{(3)}$ بالصـيغة (16) واشـتقاقها بالنسـبة لـ S نجـد ان قيمتهـا تسـاوي (S=0.00219) وبذلك فان اقيام المقدرات في هذه المرحلة مساوية الى :-

$$\phi_1^{(3)} = 0.5069 - (0.4941)(0.00219) = 0.5058$$
$$\phi_2^{(3)} = 0.5033 - (0.8694)(0.00219) = 0.5052$$

وان قيمة (y) تكون مساوية الى (y=31.178).

وبتكرار العملية نحصل على اقيام هذه المقدرات كما في الجدول الآتي :-

جدول رقم (2) يبين اقيام $\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2$ مع مجموع مربعات الخطأ

Iteration	m_1	m_2	S	ϕ_1	ϕ_2	$\sum a_i^2 = SSE$
0	-	-	-	0	0	3161
1	0.7096	0.7046	0.7144	0.5069	0.5033	31.185
2	- 0.4941	0.8694	0.0022	0.5058	0.5052	31.178
3	- 0.1327	0.0742	0.0106	0.5043	0.5094	31.176
4	- 0.1234	0.0711	0.0281	0.5008	0.5114	31.170
5	- 0.1103	0.0708	0.1039	0.4893	0.5188	31.165
6	- 0.1100	0.0812	0.1356	0.4743	0.5298	31.265

حيث يتضح من خلال الجدول بان القيمة المثالية للمعلمتين ϕ_1, ϕ_2 هي (0.4893) و (0.5188) على التوالي وان مجموع مربعات الخطأ (31.165).

في الجدول رقم (1) نجد ان الاسلوب المقترح (الاسقاط المنحدر) يمتلك اقل (SSE) من الاسلوبين MLS (Approx.) و (OLS).

<u>ملخص النتائج</u> :

تبين من خلال ما ورد في الجانب التطبيقي بان اسلوب الاسقاط المنحدر قد اعطى نتائج مقبولة الى حد بعيد وذلك بالاعتماد على مجموع مربعات الخطأ (SSE) فكانت قيمته اقل مما هو عليه في اسلوبي دالة الامكان التقريبية والمربعات الصغرى الاعتيادية اضافة الى ذلك فان اسلوب الاسقاط المنحدر يتمتع بخاصية رياضية سهلة التطبيق ولا تخضع لشروط معينة كأن يكون معرفة طبيعية توزيع المشاهدات الاصلية او عنصر الخطأ العشوائي او ما شابه ذلك.

ملحق رقم (1)

يمثل مشاهدات نتاجات كيمياوية في المنشأة العامة للصناعات الكيمياوية مقاسة بالطن

0.227	5.265	6.721	10.041	10.031
1.653	5.739	7.201	10.228	10.517
1.533	4.929	8.051	10.763	9.675
1.448	5.481	9.440	10.602	10.197
2.035	5.345	8.767	10.665	9.877
2.531	6.832	10.383	10.207	9.470
2.990	4.672	8.366	10.282	8.922
3.614	6.209	9.465	10.445	7.834
4.419	4.846	9.006	11.104	6.753
4.593	7.252	10.295	11.324	7.978

المصادر :

1. Anderson , T.W. (1975), "MLE of Parameters of Autoregressive Process with Moving average Residuals and other covariance matrices with linear structure", The Annals of stat. ,3,5, 1283-1304.
2. Bhansali , R.J. , (1993) , Estimation of prediction error variance and an R2 measure by Auto regression model Fitting" , J. of. Time Series Analysis Vol. 14 , No. 2 , pp 125-146.
3. Box , G.E.P , and Jenkins , G.M. (1976). Time Series Analysis : Forecasting and Control. (Holden day , San Francisco).
4. Hannan , E. J. (1970) 'Multiple Time Series . John wiley and sons , Inc. USA.
5. Phillips , D.T. and Ravindran , A. (1976). "Operations Research : Principles and practice. John wiley and sons , Inc.
6. Quenouille , M.H. (1957). The Analysis of multiple Time Series (charles , Griffin , London).