ISSN1813-1719

مجلة تكريت للعلوم الإدارية والاقتصادية

تعنى بالبحوث الإدارية والاقتصادية
والمحاسبية والمعلوماتية

دورية فصلية علمية محكمة

استخدام أنظمة الدالة التكرارية في توليد اشكال كسرية

م.م.عوني محمد كفطان
جامعة تكريت/ كلية الادارة والاقتصاد

استخدام أنظمة الدالة التكرارية في توليد اشكال كسرية

١. المقدمة

يتكون العالم الذي نعرفه من أجسام موجودة بأبعاد صحيحة، كالخطوط ذات البعد الواحد، والأشكال المسطحة ذات البعدين كالدوائر والمربعات ، والأجسام الصلبة ثلاثية الأبعاد كالكرات والمكعبات. مع هذا فان هناك الكثير من الأشياء في الطبيعة يمكن وصفها بواسطة أبعاد تمثل بأعداد نسبية وغير صحيحة.

قبل العام ١٩٢٥م ظهر السؤال الرياضي التالي((**ماهي درجة التعقيد التي يبلغها الخط لينتقل من كونه شكل ذو بعد واحد إلى شكل ثنائي الأبعاد**))، وخلال تلك الفترة بذل علماء الرياضيات جهودا كبيرة جدا فيما يتعلق بهذه المسألة إلى أن تم استنباط مفهوم الأبعاد الكسرية من قبل العالم فيلكس هاوسدورف (Felix Hausdorff) الذي استند بهذا المفهوم على أساس انه لا يمكن وصف طبيعة الأشكال الهندسية بشكل وافي بواسطة الأبعاد الصحيحة (Integer Dimensions) ، لذلك تم الاستعاضة عن الأبعاد الصحيحة بالأبعاد الكسرية، اذ يمكن أن يكون البعد لخط معين على سبيل المثال (1.3412) .وعلى هذا الأساس وضع هاوسدورف بعض المعايير والشروط لتعيين الأبعاد لأشكال هندسية مختلفة وكذلك وصف الخصائص الأساسية للمجموعة الكسرية.

من الممكن ان يكون التعبير المطلوب لوصف شكل ذي بعد كسري أمرا في غاية البساطة، إلا إن عملية إنشاء وتكوين الشكل نفسه تتطلب حسابات تكرارية قد تبلغ عدة ألاف في بعض الأحيان. وبالإمكان توليد أشكال هندسية ذات أبعاد كسرية وذلك بتكرار عمليات حسابية معينة (حسب نوع الشكل المطلوب) لآلاف المرات، هذه العمليات تكون سهلة جدا باستخدام الحاسبة، بينما تكون مملة ومتعبة ومعقدة جدا عند احتسابها يدويا، لذلك فان هذا الحقل لم يحصل فيه أي تطور إلى أن ظهرت الحاسبات الالكترونية المتطورة الحديثة.

قام العالم ماندلبروت (Benoit Mandelbrot) بدراسات واسعة وشاملة حول تلك الأشكال وسلوكها، وهو أول من أطلق كلمة كسري (Fractal) عام ١٩٧٠ (وهي مشتقة من الكلمة اللاتينية (Frangere) وتعني قابلية الكسر والصفة المرادفة لها (Fractus) وتعني شيئا غير منتظم ومتشظي) [7] ، وعرفها على أنها وسيلة لتصنيف المركبات الهندسية التي تتصف بان أبعادها ليست أرقاما صحيحة. وكانت الملاحظات التي سجلها ماندلبروت عن الاستمرارية في المنحنيات الخاصة بالحالات المرضية (Pathological Curves)، فضلا على سمة الاستمرارية التي تضمنتها أشكال أخرى، من بين الأسباب التي أوصلته إلى الأساس الموحد لبناء الهندسة الكسرية [8],[9].

استخدم هذا النوع من الهندسة لوصف بعض المظاهر الطبيعية التي يصعب تعريفها والتعامل معها عن طريق الهندسة الاقليدية، وعلى سبيل المثال طول السواحل البحرية وكثافة الغيوم وتفرعات الأشجار[8].

٢.هدف البحث

يهدف البحث الى توليد نماذج من الاشكال الكسرية واستخراج قيم المتغيرات المرافقة لعملية التوليد تلك مع الاحتمالية المرافقة لكل متغير باستخدام انظمة الدالة التكرارية وذلك بتنفيذ برنامج خاص تم اعداه لهذا الغرض.

3.الهندسة الكسرية والكسور

3-١. الهندسة الكسرية

تعد الهندسة الكسورية من الحقول (النظريات) الحديثة في الرياضيات وتختلف من حيث الأساس عن الهندسة الاقليدية التقليدية. تختص الهندسة الكسرية بوصف الأجسام ذات التماثل الذاتي (Self Similar) او الأجسام ذات المقياس المتناظر (Symmetric Scale) [7]، وهذا يعني انه لو تم تكبير هذه الأجسام فان أجزاءها تعطي صورة مطابقة للجسم الكلي وهذا التماثل يستمر مع أجزاء الأجزاء إلى مالا نهاية [5].

ترجع جذور الهندسة الكسرية الى أواخر القرن التاسع عشر عندما تحدى بعض علماء الرياضيات مبادئ اقليدس، ولكن لم تجر مناقشة الأبعاد الكسرية (Fractional Dimensions) حتى عام ١٩١٩ عندما وضع عالم الرياضيات هاوسدورف افكارا تتعلق بمقاييس التراكيب الصغيرة للأشكال الرياضية. لقد دام هذا الحال حتى منتصف القرن العشرين عندما عمل ماندلبروت عالم الفرنسي في دراسة الحالات التماثلية (Similarities) للتقلبات الصغيرة والكبيرة في سوق البورصة واتجه الى دراسة الظواهر التي تشتمل على تقسيمات وتدرجات غير قياسية (Non Standard Scaling) مثل الحركة المضطربة للموائع وتوزيع المجرات في الفضاء الكوني[8].

وفي حين تتعامل الهندسة الاقليدية مع الأجسام التي توجد فيها بأبعاد صحيحة (Integer Dimensions) فان الهندسة الكسورية تتعامل مع الأجسام في ابعاد غير صحيحة (Non Integer Dimensions) [10].

وتوصف الهندسة الاقليدية من خلال الخطوط والقطوع الناقصة، والدوائر وغيرها، في حين توصف الهندسة الكسرية من خلال اللوغاريتمات ومجموعة من الخطوات الخاصة بتوليد الشكل الكسري (Fractal) [2].

النقطة في الهندسة الاقليدية لها بعد مقداره صفر (Zero Dimension) واذا ما تحركت النقطة فسوف ينتج خط وهو شكل ذو بعد واحد (One Dimension)، واذا ما تحرك الخط باتجاه متعامد مع نفسه فسيتكون مربع وهو شكل ذو بعدين (Two Dimensions) كما ينتج عن حركة المربع باتجاه عمودي على نفسه شكل مكعب وهو ذو ابعاد ثلاثة (Three Dimensions).

لنفترض انه تم إنشاء شكل متعرج على سطح مستو بحيث لايتقاطع مع نفسه، ان الوضع النهائي لهذه الحالة يتمثل في انه عندما يملأ الخط المتعرج مساحة المستوي بكاملها، بحسب الهندسة الاقليدية فان هذا الخط لايزال يمتلك بعدا واحدا الا انه بالإدراك الحسي يمتلك بعدين.

والسؤال هنا هو **((متى يبدأ هذا الانتقال او التحول في الأبعاد؟ او ما مدى مايبلغه الخط قبل ان يتوقف عن كونه شكلا ذا بعد واحد ويصبح ذا بعدين)).**

الشكل الهندسي للاجزاء له خاصيتان أساسيتان [7] :

أولاهما ، ان معظم الصور المكبرة للاجزاء لايمكن تمييزها عن النمط الأصلي (غير المكبر)، وتسمى خاصية عدم التغيير هذه (مع التغيير في القياس) خاصية التماثل الذاتي (Self Similarity).
والخاصية الثانية ، وجود أبعاد كسرية لتلك الاجزاء.

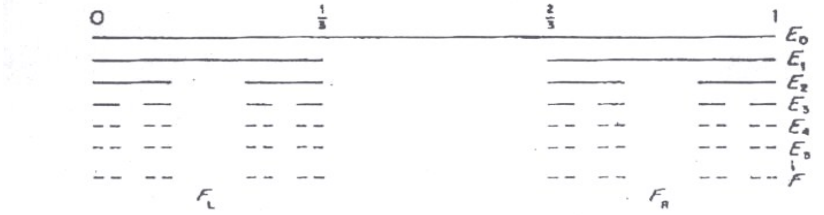
٣-٢.الاشكال الكسرية

الاشكال الكسرية رياضيا هي أشكال هندسية لها تراكيب ذات تعقيد معين تحافظ على تفاصيلها لأي مستوى تكبير[3]، ويمكن ان تكون متشابهة ذاتيا بمعنى ان أي جزء صغير منها يحمل نفس خصائص الشكل الأصلي.

وتعد مجموعة كانتور (Cantor Set) مثالا جيدا للشكل الكسري الابتدائي (الاولي) ، حيث ان عملية تكوين هذا الشكل في غاية البساطة ، اذ تتولد هذه المجموعة عن طريق تكرار تطبيق عملية احادية على خط ذو وحدة طول واحدة، وهذه العملية تتمثل بتقسيم هذا الخط الى ثلاثة قطع متساوية الطول ثم نقوم برفع (حذف) الثلث الوسطي لهذا الخط.

وعند تكرار العملية بحذف الثلث الوسطي لكل قطعة مستقيمة من المجموعة السابقة ، ومع زيادة حالات التكرار يقترب عدد القطع المستقيمة المحذوفة من المالانهاية في حين يقترب طول كل قطعة من الصفر، وان تركيب القطعة الواحدة تحت التكبير لايختلف عن تركيب المجموعة بكاملها، مما يجعلها ذات تماثل ذاتي[10]، وكما مبين في الشكل **(٣-١)**

شكل (٣-١) مجموعة كانتور

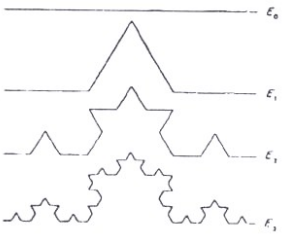


ويمكن تاشير الملاحظات والخصائص التالية على مجموعة كانتور[7]:

١. المجموعة F لها تماثل ذاتي، ويبدو ذلك واضحا في اجزاءها في الفترتين [0,1/3] و [2/3,1] وتكون مشابهة هندسيا لـ F ضمن مقياس (1/3)، وهذا الحال موجود ايضا في مقياس اخر (ضمن المقياس (1/9) مثلا).
٢. المجموعة F لها تركيب دقيق وهذا يعني اننا لو اخذنا جزءا صغيرا منها فانه يحمل صفات الجزء الاكبر نفسها.
٣. المجموعة F تكون غير معدودة (Uncountable) ، ويكون حجمها غير قابل للقياس بالاساليب التقليدية ، مثلا يكون مقياس (measure) المجموعة Fصفر وفق التعريفات المتداولة.

كما يمكن توليد الاشكال الكسرية ايضا من خلال عمليات (الاضافة على / التبديل في) الاشكال الهندسية وليس الحذف فقط، مثال ذلك منحنى كوخ (Koch Curve) [2]و [9]والمبين في الشكل (٣-٢) ادناه:

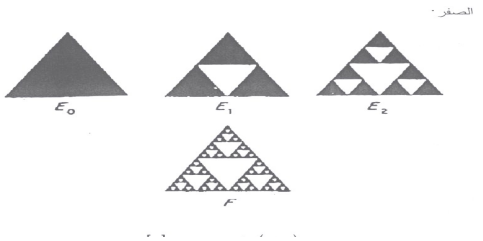
شكل (٣-٢) منحنى كوخ



يعد توليد هذا الشكل الكسري من الامور البسيطة جدا، اذ يتم البدء بخط مستقيم طوله وحدة واحدة ثم يقسم الى ثلاثة اجزاء متساوية ويتم رفع الجزء الوسطي واحلال مثلث متساوي الاضلاع محل الجزء الوسطي الذي تم رفعه من الخط المستقيم، وبعد تكرار العملية مرة واحدة يزداد الطول بمقدار (٤/٣)، مع تكرار هذه العملية نلاحظ اقتراب طول الشكل الجديد من المالا نهاية في حين يقترب طول الضلع لكل مثلث جديد من الصفر، مع افتراض ان عمليات التكرار هذه يمكن اجراؤها الى ما لانهاية من المرات فان النتيجة ستكون شكلا ذا تموج لانهائي لايحتوي على اية خطوط مستقيمة.

كما يمكننا ايضا توليد شكلا كسريا اخر من خلال الحذف اللانهائي بدلا من الاضافة اللانهائية كما في المثال السابق ومثال على ذلك مثلث سربنسكي (Sierpinski's Triangle) الذي يتولد نتيجة حالات تكرار لحذف لانهائي (Infinite Removals) [7]وكما في الشكل (٣-٣)، اذ يتم تقسيم كل مثلث الى اربعة مثلثات صغيرة متساوية المساحة مع ازالة ورفع المثلث الذي يكون موقعه في المركز، ومع تكرار هذه العملية ما لا نهاية من المرات، فان المساحة الكلية للمجموعة تقترب من ما لا نهاية واقتراب مساحة كل مثلث جديد من الصفر.

شكل (٣-٣) مثلث سربنسكي



٣-٢-١.البعد الكسري

كما ورد سابقا فمن السهولة معرفة ابعاد بعض الاشكال الهندسية كالمستقيم والمربع والمكعب وان هنالك اتجاه واحد للحركة على المستقيم واتجاهان على المربع وثلاثة اتجاهات على المكعب. والان السؤال هو : ماذا بشأن الاشكال الكسرية؟.

احيانا تكون الحركة في الاشكال الكسرية ضمن عدد معين من الاتجاهات واحياناً اخرى يمكن ان تكون ضمن عدد مختلف من الاتجاهات وقد تكون هذه الحركات شبه عشوائية وهذا ما يجعل الابعاد الكسرية تمثل اعدادا غير صحيحة (Non-Integers) [9].

3-٢-٢.المعادلة العامة للاشكال الكسرية

بغية اشتقاق معادلة عامة تعمل مع جميع الأشكال الكسرية وبالتالي تحديد وحساب البعد الكسري لكل شكل يتم توليده، يجب علينا أولا أن نستعرض الكيفية التي يتم استخدامها لحساب الأبعاد للأشكال المعروفة بالهندسة الاقليدية (المستقيم، المربع، المكعب) ، فالمستقيم مثلا يمكن تقسيمه الى (n^1) من القطع ويكون طول كل قطعه منها ($1/n^1$) من مقدار القطعة المستقيمة الكلية، اما لو جرى تكبير أي قطعة من هذه القطع (n) من المرات فسوف تبدو كالقطعة الأصلية تماما اما بالنسبة للمربع فانه يمكن تقسيمه الى (n^2) من القطع، اما المكعب فالمفهوم نفسه نستطيع تطبيقه عليه اذ يكون لدينا (n^3) من القطع وان حجم كل قطعة من هذه القطع هو ($1/n^3$) من الحجم الكلي للمكعب الأصلي. ونلاحظ هنا ان الأس في كل هذه الأمثلة يمثل البعد للشكل المعني.

ألان لنأتي إلى اشتقاق المعادلة العامة للاشكال الكسرية باستخدام المفاهيم المعروفة لدينا: لنأخذ قطعة مستقيمة طولها (L) ونقسمها الى مجموعة من القطع طول كل منها (K) ، فيكون عدد هذه القطع :

$$N=L/K$$

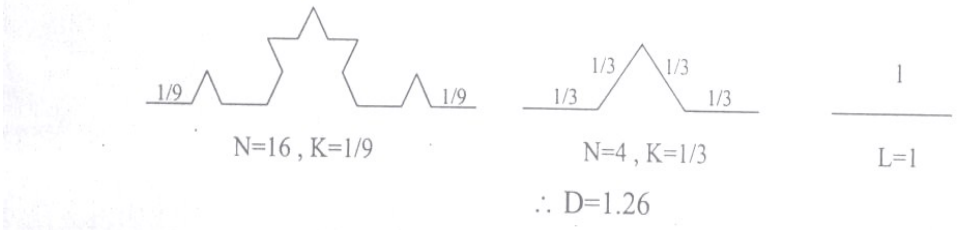
والان لو كان لدينا منحنٍ (بدرجة تعقيد معينة) ، لقياس هذا المنحني قياسا دقيقا يجب علينا تجزئته الى عدد من القطعٍ وان هذا العدد يزداد اسيا للحصول على دقة عالية، ليصبح لدينا:

$$N=(L/K)^D$$

ومن هنا نحصل على قيمة (D) التي تمثل البعد الكسري:

$$D=Log (N) / Log (L/K)$$

وكما يتضح في المثال التالي[10] :



4.انظمة الدالة التكرارية Iterated Function Systems(IFS)

لاحظنا انه يمكن ان نولد الشكل الكسري عن طريق دالة ما (قد تكون عددا صحيحا او قد تكون احداثيات نقطة)، ثم يتم تطبيق تحويل (Transformation) معين على هذه الدالة. بعدها يطبق التحويل نفسه على نتائج التطبيق السابق وتكرر العملية نفسها ، وهكذا. فاذا لم يكن هناك حد معين للتوقف عن تطبيق هذا التكرار فانه سيتكرر الى ما لا نهاية.

تعتمد آلية انظمة الدالة التكرارية على التحويلات الافينية (Affine Transformation) لتعريف صورة ما (Image)[1]. والتحويل الافيني هو تركيب من عمليات التدوير (Rotation)والتحريك (Transformation) والتكبير او التصغير (Scaling) للاشكال في فضاء متعدد الابعاد [1] , [4].

الان لو اخذنا فضاء ذو بعدين فان التحويل الافيني لهذا الفضاء يكون [6] :

$$W=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ax+by+e \\ cx+dy+f \end{bmatrix}$$

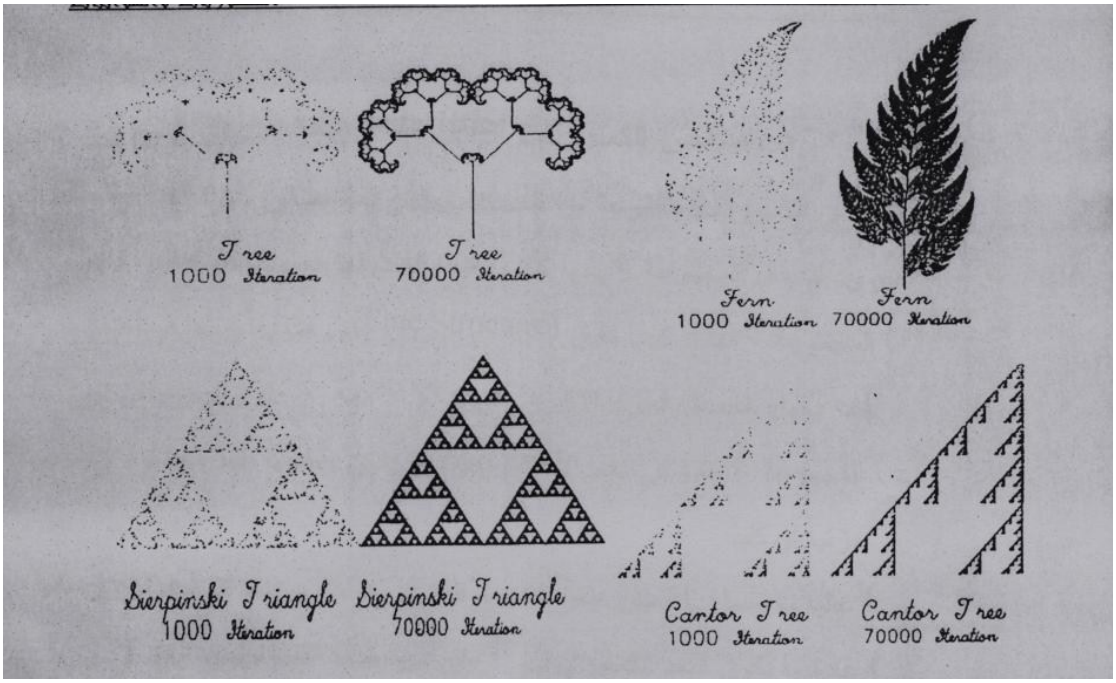
اذ يمثل كل من (a,b,c,d) معاملات الدوران (Rotation Factors)، في حين يمثل كل من (e,f) معاملات الانتقال، والملاحظ في هذه العملية انه عند تطبيق التحويل على صورة معينة فان الناتج هو أنموذج مصغر من الصورة الأصلية.

ويشمل نظام الدالة التكرارية العديد من تلك التحويلات ، ولكل تحويل احتمالية خاصة به ، وان مجموع جميع الاحتمالات للتحويلات ضمن النظام الواحد يساوي واحد [4]. وتم كتابة وإعداد برنامج خاص تم فيه استخدام طريقة انظمة الدالة التكرارية للحصول على أشكال كسرية مختلفة كما تم حساب قيم المتغيرات لكل شكل كسري من هذه الأشكال مع حساب الاحتمالية المرافقة لكل من المتغيرات في هذه الأشكال وادناه الخوارزمية الخاصة بهذا البرنامج:

```
Main Procedure
  Step1: Put Initial Value a,b,c,d,e,f,p, Max-iteration
  Step2: Call Image-Draw
  Step3: end
  Image-Draw Procedure
    Step1: Set X=0, Y=0
    Step2: For I=1 To   Max-iteration
    Step3: J=rand( )
    Step4: k= (J<P[0]) ?0: ((J<P[1] ?1: (J<P[2]) ?2:3))
    Step5: new X=a[k]* X + b[k]*Y+ e[k]
    Step6: Y= X=c[k]* X + d[k]*Y+ f[k]
    Step7: X= new X
```

Step8: Putpixel (X,Y, Color)
Step9: Next I
Step10: Return
Step11: End

وبعد تنفيذ البرنامج الخاص بالخوارزمية اعلاه حصلنا على الاشكال الكسرية التالية:



ونلاحظ هنا مدى تاثير عدد التكرارات في وضوح الشكل الكسري.
ومن تنفيذ البرنامج ايضا : ادناه جدولا لقيم المتغيرات المولدة للاشكال الكسرية السابقة واحتمالية كل منها

Name اسم الشكل	No.of Function	a	b	c	d	e	f	P الاحتمالية
Fern	1	0.0	0.0	0.0	0.16	0.0	0.0	0.01
	2	0.2	-0.26	0.23	0.22	0.0	1.6	0.07
	3	-0.15	0.28	0.26	0.24	0.0	0.44	0.07
	4	0.85	0.04	-0.04	0.85	0.0	1.6	0.85
Sum of p								1.00
Tree	1	0.0	0.0	0.0	0.5	0.0	0.0	0.05
	2	0.1	0.0	0.0	0.1	0.0	0.2	0.15
	3	0.42	-0.42	0.42	0.42	0.0	0.2	0.4
	4	0.42	0.42	-0.42	0.42	0.0	0.2	0.4

Sum of p								1.00
Cantor Tree	1	0.333	0.0	0.0	0.333	0.0	0.0	0.3333
	2	0.333	0.0	0.0	0.333	1.0	0.0	0.3333
	3	0.667	0.0	0.0	0.667	0.5	0.5	0.3334
Sum of p								1.0000
Sierpiniski Traingle	1	0.5	0.0	0.0	0.5	0.0	0.0	0.3333
	2	0.5	0.0	0.0	0.5	1.0	0.0	0.3333
	3	0.5	0.0	0.0	0.5	0.5	0.5	0.3334
Sum of p								1.0000

ومن هذا الجدول نلاحظ قلة عدد الارقام التي استخدمت لتوليد الاشكال الكسرية ، ويمكن مقارنة ذلك مع الاف الارقام التي نحتاجها لتعريف وتحديد كل نقطة في الصورة.

المصادر

1. Ning Lu, Fractal Imaging, Academic Press, San Diego (1997).
2. Kenneth Falconer, Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications, John Wiley & Sons Ltd., Chi Chester (1999).
3. Microsoft Encyclopedia Encarta. Microsoft Co., (2000).
4. Roger T. Stevens, Graphics Programming in C, M&T Publishing Inc., Redwood City, California (1990).
5. Wadia Faid Al-Shameri, Some Results on Fractals, M.S. Thesis, University of Baghdad (1997).
6. J.C. Sprott, Automatic Generation of Iterated Function Systems, Computer and Graphics, Vol.18,No.3,pp 417 – 425 (1994).
7. H. Kroger; Fractal Geometry In Quantum Mechanics, Field Theory and Spin Systems; Dep. Of Physics, University of Laval, Quebec, Canada, (2000).
8. J.J. Binney, N.J.Dowrick, M.E. Newman; The Theory Of Critical Phenomena; Oxford University Press; (1992).
9. M.S. Naschie, O.E.Rossler; Quantum Mechanics, Diffusion and Chaotic Fractals, Elsevier, Amsterdam, (1995).

١٠. عبدالرزاق محمد لازم الربيعي ، دراسة العوامل المؤثرة في خصائص الهوائيات الكسورية، رسالة ماجستير ، الجامعة التكنولوجية، العلوم التطبيقية، (٢٠٠٢).

This document was created with Win2PDF available at http://www.win2pdf.com.
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.
This page will not be added after purchasing Win2PDF.