مقارنة بين طرائق التقدير لمعلمات نموذج الانحـــدار الـــذاتي(AR(1 باســـتخدام المحـــاكـــاة [+]

COMPARISON BETWEEN METHODS OF PARAMETERS ESTIMATION FOR FIRST-ORDER AUTOREGRESSIVE MODEL BY SIMULATION .

سالم بدر محمد [*]

المستخلص :.

ان هدف الدراسة هو لتقدير معلمات نموذج الانحدار الذاتي من الدرجة الاولى (AR(1 اذ هناك مدرستان هما :

١ - المدرسة التقليدية وتتضمن :

أ- طريقة العزوم (MM)

ب- طريقة المربعات الصغرى (OLS)

ت- طريقة الامكان الاعظم التقريبية (AML)

ث- طريقة الامكان الاعظم المضبوطة (EML)

٢ - مدرسة بيز وتتضمن :

أ- اسلوب بيز القياسي (SBE)

ب- اسلوب بيز التجريبي (EBE)

وكذلك للمقارنة بين هذه الطرائق المختلفة باستخدام المحاكاة واستخدام (MSE) كاساس للمقارنة .

اذ تبين افضلية طرق بيز في التقدير .

Abstract

This study aims to studying the problem of estimation of Gaussian First-order autoregressive model AR(1) cofficient , There are two schools , The first is (the classical school) , there are serveal methods for estimating (Φ_1) :

1. **The moment method (MM) .**
2. **The ordinary least square method (OLS) .**
3. **The approximate maximum likelihood method (AML) .**
4. **The exact maximum likelihood method (EML) .**

The second school (Bayes) includes two methods which are the standard Bayes method (SBM) and Empirical Bayes method .

The study also aims at comparison among the methods of various estimations by using simulation results . The best result is the method of Bays estimoter .

[+] تاريخ استلام البحث ٢٠٠٥/٦/١ ، تاريخ قبول النشر ٢٠٠٦/١٠/٢

[*] مدرس /المعهد التقني الانبار

المقدمة :-

تعبر السلاسل الزمنية عن كثير من الظواهر سواء كانت اقتصادية او اجتماعية او في العلوم الصرفة ، فالسلاسل الزمنية هي مجموعة من القيم المشاهدة لظاهرة معينة لمدة من الزمن في فترات زمنية متساوية أي يمكن اعتبار السلسلة الزمنية علاقة دالية بين متغيرين هما قيمة الظاهرة والزمن ، على شكل y=f(t) اذ y قيمة الظاهرة و t الفترة الزمنية .

ان نماذج الانحدار الذاتي (Autoregressive models) من الدرجات الدنيا تعبر عن كثير من الظواهر ، ولهذا سيهتم بحثنا بنموذج الانحدار الذاتي من الرتبة الاولى ويرمز له AR(1) .

وقد درست طرائق التقدير لنماذج السلاسل الزمنية من قبل الكثير[1] , [2] ولكن أردنا اظهار الاتجاهات الحديثة (طرائق بيز) Bayes Methods في تقدير معلمات AR(1) بالاضافة الى الطرائق التقليدية ، اذ تعتبر مرحلة تقدير المعلمات من المراحل المهمة في بناء النماذج .

الهدف :

يهدف البحث الى المقارنة بين طرائق التقدير التقليدية وهي طريقة العزوم وطريقة المربعات الصغرى وطريقة الامكان الاعظم التقريبية وطريقة الامكان الاعظم المضبوطة وكذلك للمقارنة بين طرائق التقدير الحديثة وتشمل تحليل بيز القياسي وتحليل بيز التجريبي والمقارنة بين الطريقتين التقليدية والحديثة .

الجانب النظري

١ - . مفاهيم عامة

أنموذج الانحدار الذاتي من الدرجة الاولى[3], [4] , [5] Autoregressive Model AR(1)

يقال للعملية التصادفيه { Zt : t = 0 , ±1 , ±2 , ... } انها عملية انحدار ذاتي من الدرجة الاولى

$$Z_t = \Phi_1 Z_{t-1} + a_t \quad \text{.....} \quad (1)$$

AR(1) ، اذا حققت المعادلة الاتية :

ويدعى ايضا" بعملية ماركوف (Markov Process) لان المشاهدة عن الزمن (t) تعتمد على المشاهدة عند الزمن (t-1) .

اذ ان :

Z_{t-1} : متغيرات عشوائية للسلسلة الزمنية عند الزمن (t-1) .

a_t : الخطأ العشوائي الذي يتوزع توزيعا طبيعيا بوسط حسابي مساو للصفر وتباين S_a^2 في البحث سنفترض $a_t \sim N(0,1)$

Φ_1 : معلمة النموذج التي تحقق صفة الاستقرارية (Stationarity) للنموذج،اذا كانت جذور المعادلة تقع خارج الدائرة التي نصف قطرها واحد ، او بمعنى Φ_1 تقع داخل دائرة الوحدة .

$$\Phi(B) = 0$$

فان الوسط الحسابي للنموذج (١) هو

$$E(Z_t) = \Phi_1 E(Z_{t-1}) + E a_t$$

$$m_Z = 0$$

اما التباين

$$Var(Z) = \Phi_1^2 \;\; Var(Z_{t-1}) + Var(a_t)$$

$$s_Z^2 = \frac{1}{1-\Phi_1^2} \qquad \text{.....(2)}$$

اما التباين المشترك للنموذج AR(1) فيكون

$$g_k = \frac{\Phi_1^k}{1-\Phi_1^2} \qquad k = 0,\pm1,\pm2,..... \qquad \text{.....(3)}$$

ويمكن الحصول على التباين المشترك وذلك بتعويض (k=0) .

اما دالة الارتباط الذاتي (ACF) بين Z_t , Z_{t+k} يمكن ان تكتب

$$r_k = \frac{g_k}{g_0} = \Phi_1^k \qquad \text{.....(4)}$$

اما دالة الارتباط الذاتي الجزئي (PACF) للنموذج AR(1) فتكون

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{11} &= r_1 = \Phi_1 \\ \Phi_{kk} &= 0 \qquad ,k>1 \end{aligned}\right\} \text{.....(5)}$$

طرائق تقدير نموذج الانحدار الذاتي من الدرجة الاولى AR(1)

١ - الطرائق التقليدية Classical Methods

نفرض لدينا عينة بحجم (n) وان Z_t سلسلة زمنية تتبع نموذج AR(1) وان الخطأ العشوائي a_t يتوزع طبيعيا" بوسط صفرا" وتباين واحد .

نلاحظ النموذج (١) بانه نموذج خطي Linear في معلماته .

هناك عدة طرق لتقدير معلمات النموذج وقد تتشابه البعض منها وقد يختلف بالاعتماد على اسس معينة ولكل طريقة منها ، وهي :-

أ- طريقة العزوم[1] , [3] , [4] , [6] Moments Method (MM)

لتقدير معلمات الانحدار الذاتي لنموذج AR(1) الموضح في معادلة (١) ، فأن دالة الارتباط الذاتي (ACF) للنموذج تكون $r_1 = \Phi_1$ وتدعى احيانا" هذه المقدرات بمقدرات (Yule-Walker) ، اذ ان $\Phi_1 = r_1$

وعليه فان مقدر العزوم (Moments Estimator) للمعلمات Φ_1 وبحسب الصيغة الاتية

$$\Phi_1 = \left(\frac{n}{n-1}\right) \frac{\sum_{t=2}^{n} Z_t Z_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} Z_t^2} \qquad \text{.....(6)}$$

ب- طريقة الامكان الاعظم المضبوطة[3] , [4] , [6] Exact Maximum Likelihood Method (EML)

اذا كانت السلسلة الزمنية ($Z=(Z_1 , Z_2 , ... , Z_n$ والمتولدة من نموذج الانحدار الطبيعي المستقر ومن الدرجة الاولى AR(1) بحسب معادلة (١) . فان معلمة الانحدار الذاتي $|\Phi_1| < 1$ كمية ثابتة لا تتغير

بتغير الزمن(t). وبما ان الاخطاء العشوائية للنموذج تتبع التوزيع الطبيعي ، أي ($a_t \sim N(0 , s_a^2)$) ، فـــان التوزيع الحدي للسلسلة(Z_t) يتبع التوزيع الطبيعي أي ان $Z_t \sim N\left(0, \frac{s_a^2}{1-\Phi_1^2}\right)$ ، وبذلك فان دالة الامكان الاعظم للسلسة Z_t يمكن ان تكتب بالمعادلة الاتية :

$$L = \left(2\Pi s_a^2\right)^{-\frac{n}{2}}\left(1-\Phi_1^2\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2s_a^2}\left(1-\Phi_1^2\right)Z_1^2 + \sum_{t=2}^{n}\left(Z_t - \Phi_1 Z_{t-1}\right)^2\right] \quad .....(7)$$

وبأخذ اللوغارتم للدالة ، ثم اشتقاق الدالة بالنسبة للـــ Φ_1 ومساواتها للصفر ، نحصل

$$\frac{-\hat{\Phi}_1}{1-\hat{\Phi}_1^2} s_a^2 + \sum_{t=2}^{n} Z_t Z_{t-1} - \hat{\Phi}_1 \sum_{t=3}^{n} Z_{t-1}^2 = 0$$

وبعد التبسيط والتعويض نحصل على مقدر الامكان الاعظم المضبوط للمعلمة Φ_1 ، يكون بحسب الـــصيغة الاتية :

$$\hat{\Phi}_1 = \left(\frac{n-2}{n-1}\right)\frac{\sum_{t=2}^{n} Z_t Z_{t-1}}{\sum_{t=3}^{n} Z_{t-1}^2} \qquad .....(8)$$

ج – طريقة الامكـــان الاعظـــم التقريبيـــة[4],[6] Approximate Maximum Likelihood Method (AML)

عندما يكون حجم العينة (n) كبيرا" فانه يمكن اهمال تأثير الحد $\left(1-\Phi_1^2\right)^{1/2}$ من معادلة دالة الامكان الاعظم في الصيغة (٧) ، وبأخذ اللوغاريتم للدالة وبالاسلوب السابق نفسه نحصل على مقدر الامكان الاعظم التقريبي للمعلمة (Φ_1) نحصل :-

$$\hat{\Phi}_1 = \frac{\sum_{t=2}^{n} Z_t Z_{t-1}}{\sum_{t=3}^{n} Z_{t-1}^2} \qquad .....(9)$$

د – طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية [4],[5] Ordinary Least Square Method (OLS)

عند تصغير مجموع مربعات الخطأ العشوائي لنموذج AR(1) بحسب المعادلة الاتية :

$$S(\Phi_1) = \sum_{t=2}^{n}\left(Z_t - \Phi_1 Z_{t-1}\right)^2 \qquad .....(10)$$

وبحساب المشتقة بالنسبة لـــ (Φ_1) ومساواتها بالصفر نحصل على مقدر المربعات الصغرى للمعلمات Φ_1 ، يكتب بالصيغة التالية :

$$\hat{\Phi}_1 = \frac{\sum_{t=2}^{n} Z_t Z_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n} Z_{t-1}^2} \qquad .....(11)$$

وهذه الصيغة مساوية للصيغة (٩) مقدر الامكان الاعظم التقريبية .

اما بالنسبة للتباين لمعلمة الانحدار الذاتي لمقدر ($\hat{\Phi}_1$) لنموذج AR(1) يكون كالاتي :

$$Var(\hat{\Phi}_1) = \frac{1-\hat{\Phi}_1}{n}$$

الطرائق الحديثة (أتجاه بيز) Bayes Methods [3] , [6] , [7]

تعتمد نظرية بيز على افتراض ان المعلمة المجهولة ماهي الا عبارة عن متغير عشوائي (r.v's) اذ تتوافر معلومات سابقة يمكن وضعها بشكل دالة كثافة احتمالية سابقة ($f(\Phi_1)$ والتي تعرف احيانا" بالتوزيع قبل المعاينة . اما دالة الامكان (Likelihood Function) فانها تمثل مشاهدات العينة العشوائية ($Z_1 , Z_2 , ... , Z_n$) وتعرف بـ $f(Z/\Phi_1)$ وباستعمال دالة الامكان مع دالة الكثافة الاحتمالية السابقة $f(\Phi_1)$ نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية اللاحقة (Posterior p.d.f.) والتي يرمز لها $f(\Phi_1/Z)$ اذ انها الدالة بعد المعاينة .

يمكن وصف نظرية بيز في حالة المتغيرات العشوائية المستمرة كالاتي :

$$f(\underline{Z},\Phi_1) = f(\underline{Z}/\Phi_1) f(\Phi_1) \qquad .....(12)$$

اذ ان

$f(\underline{Z}/\Phi_1) = \prod_{t=1}^{n} f(Z_t/\Phi_1)$ تمثل دالة الامكان

وبما ان الدالة الشرطية للمعلمة (Φ_1) تكتب كالاتي

$$f(\Phi_1/\underline{Z}) = \frac{f(\underline{Z},\Phi_1)}{f(Z)} \qquad .....(13)$$

وبتعويض معادلة (١٢) في المعادلة (١٣) نحصل على :

$$f(\Phi_1/\underline{Z}) = \frac{f(\underline{Z},\Phi_1) f(\Phi_1)}{f(Z)} \qquad .....(14)$$

اذ ان $f(Z) \neq 0$ **كما ان** $f(\underline{Z})$ يمكن كتابتها بالمعادلة الاتية :

$$f(\underline{Z}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\underline{Z}/\Phi_1) f(\Phi_1) \partial\Phi_1 \qquad .....(15)$$

وبما ان الدالة في معادلة (١٥) لاتحتوي على المعلمة (Φ_1) فهي دالة حدية للعينة العشوائية المعطاة ($Z_1 , Z_2 , ... , Z_n$) لذلك فهي ثابتة (constant) وعليه فان المعادلة (١٤) تصبح كالاتي :

$$f(\Phi_1/\underline{Z}) a \quad f(\underline{Z}/\Phi_1) f(\Phi_1) \qquad .....(16)$$

اذ ان a تشير الى التناسب

وتعد المعادلة (١٦) تعبيراً رياضياً لنظرية بيز ، اذ انها تمثل التوزيع اللاحق (posterior p.d.f.) التي تتناسب مع حاصل ضرب دالة الامكان $f(\underline{Z}/\Phi_1)$ في الدالة السابقة $f(\Phi_1)$.

انواع دوال الكثافة الاحتمالية السابقة [1] , [7] The Type of prior p.d.f's

تقسم دوال الكثافة الاحتمالية السابقة بحسب طبيعة المعلومات المتوافرة الى عدة انواع وهي :

١- دوال كثافة احتمالية سابقة غير معلوماتية (Non Informative Prior p.d.f.)

في هذه الحالة تكون المعلومات السابقة حول النموذج قليلة او غير كافية . ولغرض تحديد التوزيعات السابقة بخصوص تلك المعرفة القليلة حول المعلمات ، فقد اقترح Jeffrey's (1966) الوارد ذكره في المصدر Zellner 1971 [7] قاعدتين لاختبار التوزيع هما :

أ- اذا كانت قيمة المعلمة (Φ_1) تقع ضمن فترة لانهائية كأن تكون من $-\infty$ الى $+\infty$ ، وبتحقق ذلك في حالة نموذج AR(1) غير المستقر . فأن التوزيع الاحتمالي السابق سوف يأخذ التوزيع المنتظم (Uniform Distribution) .

ب- عند افتراض قيمة المعلمة (Φ_1) تقع ضمن الفترة من صفر الى ∞ ، مثل الانحراف المعياري ، فأن التوزيع سوف يأخذ اللوغاريتم للتوزيع المنتظم .

٢- دوال الكثافة الاحتمالية السابقة المعلوماتية[7] (Informative Prior p.d.f.)

عند توافر معلومات اضافية سابقة والتي تكون على هيئة قيود حول معلمات النموذج ، فأنه يمكن استخدام قاعدة (ب) من قواعد Jeffrey الوارد في (١) ، حيث الفترة مقيدة المعلمات ، فاذا كان النموذج AR(1) مستقرا" فأن معلمته Φ_1 تقع $|\Phi_1|<1$ ففي هذه الحالة فأن المعلمة Φ_1 اما ان تأخذ التوزيع المنتظم او تأخذ توزيع بيتا (Beta Distribution) .

٣- دوال كثافة احتمالية سابقة مرافقة اعتيادية[7] (Natural Conjugate prior P.d.f.)

في حالة استخدام دالة كثافة احتمالية سابقة ذات توزيع معروف ، فأنه عند استعمالها مع دالة الامكان ، نحصل على دالة كثافة احتمالية لاحقة لها توزيع دالة الكثافة الاحتمالية السابقة نفسها ولكن بمعلمات مختلفة ، ففي هذه الحالة تسمى هذه الدالة بدالة الكثافة الاحتمالية السابقة المرافقة الاعتيادية ، ويتحدد توزيع هذه الدالة طبقا" لتوزيع دالة الامكان التي تكون عادة بصيغة (طبيعية – كاما) (Normal – Gamma) لنموذج AR(1) ، وسيعتمد بحثنا على هذه الصيغة .

أ- صيغة مقدر اسلوب بيز القياسي لمعلمات الانحدار الذاتي [9] , [8] , [7] Standard Bayes Estimator For AR(1)

ان نموذج الانحدار الذاتي من الدرجة الاولى AR(1) في الصيغة (١) يعتمد على الفروض الاتية [5] , [4]:

فرضية (١) : ان الخطأ العشوائي $a_t(t=1,2,\ldots.\ ,n)$ يتوزع توزيعا" طبيعيا" متماثلا" ومستقلا" (i.i.d) بمتوسط صفر $Ea_t=0$ وتباين $var(a_t)=t^{-1}$ عندما $t_1 \neq t_2$ كما ان $Z(0)$ تمثل قيمة البداية الاولية لثابتة ، وان t تمثل الدقة (precision) اذ ان ($t=s^{-2}$) . أي ان $a_t \sim i.i.d \quad N(0,t^{-1})$

فرضية (٢) : Z_t متغير عشوائي (او تصادفي) يوضح الاعتمادية (Independence) للمتغير نفسه لكن بأزمنة مختلفة .

فرضية (٣) : الخطأ العشوائي a_t يتوزع باستقلالية مع المتغير العشوائي Z_{t-1} ، أي ان :

$$Cov(a_t, Z_{t-j}) = \begin{cases} s_a^2 & j=0 \\ 0 & j>0 \end{cases}$$

وعليه فان نموذج الانحدار الذاتي من الدرجة الاولى AR(1) الموضح في الصيغة (١) يمكن تبسيطه بدلالة المصفوفات الى الاتي :

$$\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ M \\ Z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_0 \\ Z_1 \\ M \\ Z_{n-1} \end{bmatrix} [\Phi_1] + \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ M \\ a_n \end{bmatrix} \qquad \text{.....(17)}$$

ومع الفرضية الطبيعية (Normality) فأن دالة الامكان (Likelihood Function) تصبح

$$f(\underline{Z}/\Phi_1, t) a \quad t^{n/2} \exp\left[-\frac{t}{2} a_t' a_t\right] \qquad \text{.....(18)}$$

وباستعمال دالة الامكان الاعظم عندما تكون دالة الكثافة الاحتمالية السابقة مرافقة اعتيادية للمعلمات المجهولة لنموذج AR(1) ، والتي بصيغة التوزيع الطبيعي – كاما (Normal – Gamma) نحصل على صيغة مقدر بيز القياسي (SBE) هو المتوسط اللاحق ($\hat{\Phi}_1$) مع استعمال دالة الخسارة التربيعية .[9]

$$f(\Phi_1, t) a \quad t^{\frac{a+1}{2}-1} \exp -\frac{t}{2}\left[(\Phi_1 - b)' Q(\Phi_1 - b) + B\right] \qquad \text{.....(19)}$$

ومنها نحصل

$$f(\Phi_1 / t, \underline{Z}) = \frac{(tA_1)^{1/2}}{\sqrt{2\Pi}} \exp\left[-\frac{t}{2} A_1 (\Phi_1 - \hat{\Phi}_1)^2\right] \qquad \text{.....(20)}$$

وهذا يعني ان المتوسط (Φ_1) يعد مقدر بيز القياسي في حالة استعمال دالة الخسارة التربيعية (Quadratic Loss Function) التي تعتبر من اهم انواع دوال الخسارة وذلك $(0 < Q, B \quad b, a > 0)$.

ب - اتجاه بيز التجريبي (أو الخبري) Empirical Bayes Approach [1],[2],[7], [10]

عندما يمكن ملاحظة (او مشاهدة) المعلومات السابقة المتوفرة عن المعلمات ففي هذه الحالة لاتوجد مشكلة ، اذ يمكن تكوين توزيع تكراري مناسب لتلك المعلمات وباستخدام اسلوب بيز القياسي يمكن التوصل الى مقدر بيز . ولكن في العموم من غير الممكن ملاحظة تلك المعلومات السابقة عن المعلمات ، وعليه فقد توجه الكثير من الباحثين الى وضع اسلوب بيز بصيغة تعتمد على التوزيع المشاهدة (Z) فقط من دون الحاجة لمعرفة التوزيع السابق والتوصل الى صيغة بيز التجريبي على اساس المعلومات الحالية فقط .

ففي كثير من التطبيقات العملية نجد ان البيانات المتوفرة عن السلاسل الزمنية قصيرة لا يمكن فيها ملاحظة (او مشاهدة) المعلومات السابقة عن المعلمات المدروسة ، ولكن فقط يمكن ملاحظة متجهات عينة السلسلة الزمنية (Z_j , j=1,2,….,n) التي تناظر الى المعلمة .

صيغة مقدر بيز التجريبي في حالة افتراض التوزيع السابق Φ_1 :

عندما تكون فيها البيانات المتاحة لسلسلة زمنية قصيرة بالنسبة لعدة معلمات فردية ، وبافتراض ان $Z_{t(j)}$ تشير الى المشاهدة في السلسلة الزمنية (j) عند الزمن t بخصوص j=1,2,…..n , t=1,2,….,T فان الصيغة التالية تمثل AR(1) للبيانات الجدولية :

$$Z_t(j) = \Phi_j Z_{t-1}(j) + e_t(j) \qquad \text{.....(21)}$$

اذ ان

Φ_j : تفرض بأنها عبارة عن مشاهدات مستقلة من توزيع طبيعي بمتوسط $c_j'\mathrm{B}$ عندما ($c_j = 1,2,.....,n$) تتيح فرصة التغير للعينات المختلفة . وبتباين t^2 ، أي ان $\Phi_j \sim N(c_j'\mathrm{B}, t^2)$ و B : متجه المعلمات من الدرجة (P) و c_j قيم الاختلافات (Covariates) المعروفة من الدرجة (P) .

$e_t(j)$: عبارة عن اخطاء عشوائية مستقلة تتوزع طبيعيا بمتوسط صفر وتباين s^2 ، أي ان $e_t(j) \sim N(0, s^2)$

وبفرض ان Z(j) تشير الى قيمة العينة بخصوص السلسلة (j) ، على سبيل التمثيل $Z_j=(Z_1(j),….,Z_T(j))$ ، ويشير $Z_{(n+1)}$ بواسطة Z و c_{n+1} بواسطة c .

وبافتراض ان $Z_0(j)=0$ بخصوص كل J ، ومن خلال استخدام نظرية بيز بان التوزيع اللاحق لـ(Φ/Z) يتوزع طبيعيا" بمتوسط d وتباين s^2t^2/a أي ان $(\Phi/Z) \sim N(d, s^2t^2/a)$ اذ ان :

$$d = \left(s^2a^{-1}\right)c'\mathrm{B} + \left(1 - s^2a^{-1}\right)\hat{\Phi} \qquad \text{.....(22)}$$

$$a = s^2 + t^2\sum_{t=1}^{T} Z_{t-1}(n+1) \qquad \text{.....(23)}$$

$$\hat{\Phi} = \frac{\sum_{t=1}^{T} Z_t(n+1)Z_{t-1}(n+1)}{\sum_{t=1}^{T} Z_{t-1}^2(n+1)} \qquad \text{.....(24)}$$

وكان التوصل للصيغ اعلاه من خلال نتائج الانحدار الخطي باسلوب بيز القياسي (SBE)[8] اذ نلاحظ ان (d) هي تقدير بيز (B.E.) لـ Φ فيما يتعلق بدالة الخسارة التربيعية . ولو فرضنا ان المعلمات s^2 و t^2 معروفة ، اذ نفترض في الجانب التجريبي $s^2 = 1$ ، وبما ان (d) تعتمد على معلمة غير معروفة B ، اذ يمكن الحصول عليها من دالة الامكان الاعظم لمتجهات العينة Z(j) اذ تقدير الامكان الاعظم (MLE) $\hat{\mathrm{B}}_n$ لـ B بحسب الصيغة التالية :

$$\hat{\mathrm{B}}_n = \frac{\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} Z_t(j)Z_{t-1}(j)c_j a_j^{-1}}{\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} Z_{t-1}^2(j)(c_j c_j')a_j^{-1}} \qquad \text{.....(25)}$$

وبالتعويض عن a_j^{-1} في المعادلة (٢٢) وبدل B بـــ $\hat{B}_n$ نحصل مقدر بيز التجريبي لـــ Φ

$$d_n = \left[\frac{s^2}{a}\right] c'\hat{B}_n + \left[1-\frac{s^2}{a}\right]\hat{\Phi} \qquad .....(26)$$

الجانب التجريبي

مقدمة المحاكاة Simulation

المحاكاة اسلوب او عملية تصميم نموذج بحسب النموذج الحقيقي ومواصلة التجارب مع هذا النمـــوذج لأجل هدف اما فهم سلوك النظام او لحساب الخطط وتقدم الوصف كما لو تتطور خلال فترة الزمن .

وتمتاز المحاكاة بكونها تقلل التكاليف العالية والوقت والجهد المبذول الذي يتطلبه العمل في الحـــصول على العينات من الواقع العملي ، وتعد طريقة مونت كارلو (Monte Carlo) من اهـــم طـــرق المحاكـــاة وافضلها واكثرها استخداما" . وذلك باتباع الخطوات التالية :

١- توليـــد اعداد عشوائية تتبع التوزيع المنـــتظم (Continuous Uniform Distribtion) ضـــمن الفترة (١، ٠) وذلك من خلال استخدام دالة الكثافة التجميعية (c.d.f.) التي تصف النموذج قيـــد الدراســـة ، وتتوفر في الحاسوب الالي عبارة RND لتوليد الاعـــداد العـــشوائية بحـــسب النظـــام العشوائي (Randomize 23) .

٢- تحويل العدد العشوائي المنتظم بطريقة معينة للحصول على متغير عشوائي من التوزيع الاحـــصائي الذي يصف النموذج تحت الدراسة .

مراحل بناء تجارب المحاكاة

تتضمن مراحل بناء تجارب المحاكاة اربع مراحل مهمة كالاتي :

١- مرحلة تعيين قيم المعلمات الافتراضية وفيها

أ- اختيار حجم العينة (n) وقد تم اختيار ثلاثة احجام صغيرة ومتوسطة وكبيرة وهي على التوالي (n=10,50,100) .

ب- تحديد القيم الافتراضية لمعلمات الانحدار الذاتي من الدرجة الاولى وحسب الحالات المختلفة .

٢- مرحلة توليد البيانات ، يتم توليد البيانات بتوليد الاخطاء العشوائية بحسب التوزيع الطبيعي القياسي N(0,1) على وفق اسلوب بوكس – ملر مستخدما" الصيغة $X_1 = (-2LogU_1)^{1/2} Cos(2\Pi U_2)$

اذ ان $\Pi = 3.14$ ، U_1 و U_2 متغيران عشوائيان مستقلان اذ يتبع كل منها التوزيع المنـــتظم المـــستمر أي U(0,1) ويتم توليدها باستخدام الحاسوب الالي باستخدام عبارة RND اذ يتم توليد اعداد عشوائية بين الصفر والواحد . اما المتغيران X_1 و X_2 فانهما متغيران عشوائيان مستقلان يتبع التوزيع الطبيعي القياسي .

مرحلة ايجاد المقدرات . وهي

أ- المقارنة بين طرائق التقدير التقليدية

١- طريقة العزوم (MM) .

٢- طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS)

٣- طريقة الامكان الاعظم التقريبية (AML)

٤- طريقة الامكان الاعظم المضبوطة (EML)

ب- المقارنة بين طرائق بيز

١- الاسلوب القياسي (SBE)

٢- الاسلوب التجريبي (او الخبري) (EBE)

٤- المقارنة بين النماذج المفترضة ، وقد تم كتابة (٣) برامج للتقدير والمقارنة ما بين المقدرات الاحصائية والمفاضلة فيما بينها ، باستخدام متوسط مربعات الخطأ Mean Square Error [1], [2] , [4] ,[5] (MSE) وهو من اهم واكثر المقاييس الاحصائية شيوعا" ويتضمن المقاييس الاخرى التحيز Bais والخطأ المعياري Standard Error المطلق او النسبي . فهو يقيس مدى اقتراب المقدر وابتعاده عن القيم الحقيقية ، وتكون الصيغة كالاتي:

$$MSE(\hat{\Phi}_1) = \frac{1}{R-1}\sum_{i=1}^{R}\left(\hat{\Phi}_{1i} - \hat{\Phi}_1\right)^2 \qquad \text{.....(28)}$$

ويمكن تحليل الصيغة الى جزئيين $MSE(\hat{\Phi}_1) = Var(\hat{\Phi}_1) + (Bias)^2$ وعليه سيتم استخدام الصيغة (٢٨) في المقارنة اذ نختار اقل مقدر الذي يمتلك اقل قيمة MSE .

٤-٢ استعراض نتائج المحاكاة

٤-٢-١ المقارنة بين طرائق التقدير التقليدية

لقد صممت التجربة الاولى لبحث خواص مقدرات طرائق التقدير التقليدية (MM,OLS, AML, EML) ، والمقارنة بينها عند تحقق الاستقرارية $|\Phi_1| < 1$ ، أي قيم Φ_1 الافتراضية ($\pm$ 0.9 , $\pm$ 0.6 , $\pm$ 0.3 , 0.0) .

ومن ثم توليد البيانات لتمثل AR(1) بالقيم الافتراضية السابقة وفق برنامج (١) المعد من قبل الباحث لهذا الشأن . ويمكن تلخيص نتائج التجربة الاولى كما في جدول (١) اذ تبين أن متوسط مربعات الخطأ (MSE) يكون كالاتي :

١- تقل قيم (MSE) المقدرة طرائق التقدير التقليدية المختلفة مع زيادة القيم المطلقة للمعلمة $|\Phi_1|$ ماعدا عند $\Phi_1 = 0.0$ ، وتتناقص كلما زاد حجم العينة (n) .

٢- اظهرت النتائج تقارب MSE اكثر في جميع الطرائق عند الحجم الكبير (n=100)

٣- اظهرت طريقتي الامكان الاعظم المضبوطة (EML) والتقريبية (AML) بصورة عامة أن لها اقل (MSE) عن باقي المقدرات الاخرى لاغلب قيم المعلمات (Φ_1) الافتراضية ولجميع حجوم العينات .

استعراض نتائج بيز القياسي (SBE)

تتضمن التجربة الثانية تقدير بيز القياسي (SBE) في حالة استخدام دالة كثافة احتمالية سابقة مرافقة اعتيادية ، $f(\Phi_1, t)$ ذات توزيع طبيعي – كاما ، وكما ورد في الجانب النظري (١-٢-٢-٣) ، ويكون تنفيذ هذه التجربة من خلال التعويض عن العدد من القيم الافتراضية في البرنامج (٢) المعّد من قبل الباحث

لهـــــــذا الـــــــشأن . تـــــــم اختبـــــــار القـــــــيم الافتراضـــــــية الاتيـــــــة :

$a = 1,1,1,1$, $B = 2,2,2,2$, $b = 2,1,1,-2$, $Q = 1,2,1,1$

وبتوليد البيانات طبقا لنموذج AR(1) ومن خلال التعويض عن القيم الافتراضية للمعلمات(Φ_1) بالاتي :

$\Phi_1 = 0.0 , \pm 0.3 , \pm 0.6 , \pm 0.9$

جدول (١) يبين النتائج بين قيم متوسط مربعات الخطأ (MSE) وطرائق التقدير وبحسب حجوم العينات ولمختلف المعلمات المفترضة لـــ AR(1) ولتجربة كررت (٥٠٠) مرة

حجم العينة n	Φ_1	متوسط مربعات الخطأ (MSE)			
		MM	OLS	AML	EML
10	-0.9	0.10012	0.09812	0.09298	0.10016
	-0.6	0.08524	0.09079	0.10353	0.09073
	-0.3	0.09134	0.09639	0.12528	0.10077
	0.0	0.09697	0.10128	0.13854	0.10947
	0.3	0.09319	0.9844	0.12772	0.10342
	0.6	0.09242	0.09565	0.10269	0.09038
	0.9	0.09040	0.08473	0.07982	0.08724
50	-0.9	0.00802	0.00728	0.00673	0.00787
	-0.6	0.01617	0.01596	0.01572	0.01565
	-0.3	0.01836	0.01834	0.01887	0.01829
	0.0	0.01690	0.01694	0.01767	0.01696
	0.3	0.01864	0.01856	0.01927	0.01856
	0.6	0.01391	0.01365	0.01341	0.01335
	0.9	0.00891	0.00843	0.00788	0.00916
100	-0.9	0.00314	0.00298	0.00283	0.00313
	-0.6	0.00684	0.0679	0.00683	0.00677
	-0.3	0.00969	0.00970	0.00984	0.00969
	0.0	0.01005	0.01005	0.01025	0.01004
	0.3	0.00817	0.00811	0.00827	0.00811
	0.6	0.00661	0.00657	0.00647	0.00650
	0.9	0.00282	0.00264	0.00251	0.00279

يمكن الحصول على مقدرات بيز القياسية (SBE) التي تمثل المتوسط اللاحق ($\hat{\Phi}_1$) عند اســتعمال دالة الخسارة التربيعية لدالة التوزيع اللاحق $f(\Phi_1 / Z)$ فضلاً عن الحصول على متوســط مربعــات الخطأ (MSE).

ويمكن تلخيص نتائج هذه التجربة كما في جدول (٢) الذي يبين متوسط مربعــات الخطــأ (MSE) وتبين لنا الاتي :

١ - تتناقص قيم متوسط مربعات الخطأ (MSE) بزيادة حجم العينة ولمختلف القيم الافتراضية .

٢ - تبين اقل القيم لمتوسط مربعات الخطأ (MSE) ولمختلف احجام العينة عند استخدام القيم الافتراضية مع قيم المعلمات الاتية :

أ - القيم الافتراضية ($a=1, B=2, b=-2, Q=1$) مع قيم المعلمات (Φ_1 = -0.3 , -0.6 , -0.9) .

ب- القيم الافتراضية ($a=1, B=2, b=1, Q=1$) مع قيمة المعلمة (Φ_1 = 0.0) .

ج- القيم الافتراضية ($a=1, B=2, b=1, Q=1$) مع قيمة المعلمة (Φ_1 =0.3) .

د - القيم الافتراضية ($a=1, B=2, b=2, Q=1$) مع قيمة المعلمة (Φ_1 = 0.6 , 0.9) .

جدول رقم (٢) يبين قيم متوسط مربعات الخطأ (MSE) لاسلوب بيز القياسي (SBE) في حالة استخدام دالة سابقة (طبيعية – كاما) بحسب حجوم العينات لنموذج AR(1) ولتجربة عدد مكرراتها (R=500)

حجم العينة n	Φ_1	$a=1, b=2$ B=2 , Q=1	$a=1, b=1$ B=2 , Q=2	$a=1, b=1$ B=2 , Q=1	$a=1, b=-2$ B=2 , Q=1
10	-0.9	0.24194	0.24310	0.16775	0.04500
	-0.6	0.22942	0.21584	0.14193	0.05653
	-0.3	0.19546	0.16792	0.12063	0.09490
	0.0	0.14719	0.11390	0.09557	0.14473
	0.3	0.09058	0.06490	0.06928	0.20240
	0.6	0.06056	0.04848	0.06353	0.22618
	0.9	0.03967	0.04639	0.06036	0.22515
50	-0.9	0.00991	0.01069	0.00887	0.00625
	-0.6	0.02072	0.02156	0.01832	0.01381
	-0.3	0.02204	0.02199	0.01960	0.01701
	0.0	0.01769	0.01698	0.01652	0.01839
	0.3	0.01765	0.01687	0.01748	0.02165
	0.6	0.01196	0.01201	0.01277	0.01775
	0.9	0.00726	0.00788	0.00815	0.01135
100	-0.9	0.00353	0.00371	0.00332	0.00277
	-0.6	0.00770	0.00790	0.00724	0.00641
	-0.3	0.01059	0.01059	0.01001	0.00932
	0.0	0.01029	0.01008	0.00996	0.01024
	0.3	0.00794	0.00776	0.00789	0.00880
	0.6	0.00608	0.00614	0.00634	0.00770
	0.9	0.00245	0.00257	0.00260	0.00315

استعراض نتائج اسلوب بيز التجريبي (او الخبري) (EBE)

تتضمن التجربة الثالثة تقدير بيز التجريبي (او الخبري) (EBE) لنموذج AR(1) بافتراض ان معلمات النموذج (Φ_j) عبارة مشاهدات مستقلة تتبع التوزيع الطبيعي $N(u,t^2)$ ، كما ان الاخطاء العشوائية له تتوزع توزيعا" طبيعيا" $N(0,s^2)$ اذ ان $s^2=1$ ، ويعود تنفيذ هذه **التجربة لبرنامج**

(٣) **المعّد من قبل** الباحث لهذا الشأن اذ تم توليد القيم الاولية للمعلمات بحسب الصيغة $\Phi(j) = u + t * Q(j)$ اذ ان u , t قيم اولية مفترضة يتم تحديدها بحسب تشكيلة القيم الممكنة التالية :

$u = 0.0,0.01,0.03,0.06,0.09,0.1,0.3,0.6,0.9$

$t = 0.0,0.01,0.03,0.06.0.09,0.1$

Q(j) : اخطاء عشوائية قياسية مستقلة تتوزع طبيعيا" N(0,1) ، ويتم توليدها وفق الخطوات الذي سبق ذكرها .

وبعد ذلك يتم توليد نموذج AR(1) كما ورد في الجانب النظري (٢-٢-٢-٣) ، وذلك بحسب القيم الاولية الافتراضية للمعلمات u , t . ومن ثم حساب مقدر بيز (EBE) ومقياس المقارنة . ويمكن تلخيص نتائج التجربة كما في الجدول (٣) ، وقد تبين من خلال الجدول مايلي :

١- تزداد قيمة متوسط مربعات الخطأ (MSE) عند كل قيمة من قيم الانحراف المعياري (t) وذلك بزيادة قيم المتوسطات (u) . ولمختلف حجوم العينات .

٢- تزداد قيمة (MSE) عند كل قيمة من قيم المتوسطات (u) وذلك بزيادة قيم الانحراف المعياري (t) ، ولمختلف حجوم العينات .

٣- تتناقص قيم (MSE) بزيادة حجم العينة ولمختلف قيم (t) و u .

مقارنة عامة بين طرائق التقدير المختلفة

استنادا" لنتائج التجارب الثلاثة السابقة ، تم اختيار القيمة $\Phi_1 = 0.3$ لنموذج AR(1) ، حيث التقديرات بالطرائق التقليدية الاربعة ، ثم جرى اختيار القيمة الافتراضية لأسلوب بيز (SBE) حيث ($\Phi_1 = 0.3$) والقيم الاخرى ($a = 1, B = 2, b = 1, Q = 1$) اما بالنسبة لاسلوب (EBE) جرى اختيار القيم الافتراضية لمعلمة النموذج AR(1) توزيعا" طبيعيا" بمتوسط u=0.3 ، وانحراف معياري $t = 0.0$.

جدول رقم (٣) يبين قيم متوسطات مربعات الخطأ (MSE) لاسلوب بيز التجريبي (EBE) بحسب حجوم العينات ولمختلف القيم الافتراضية لمعلمات نموذج AR(1) الذي يتوزع $N(u, t^2)$ ، ولتجربة عدد مكررتها (R=500) .

حجم العينة n	t / u	متوسط مربعات الخطأ (MSE) 0.0	0.01	0.03	0.06	0.09	0.1
10	0.0	0.000508	0.000438	0.000335	0.000277	0.000334	0.000379
	0.01	0.000458	0.000396	0.000311	0.000280	0.000364	0.000418
	0.03	0.000375	0.000332	0.000283	0.000305	0.000442	0.000513
	0.06	0.000298	0.000282	0.000286	0.000389	0.000616	0.000703
	0.09	0.000278	0.000288	0.000346	0.000538	0.000824	0.000948
	0.1	0.000283	0.000302	0.000378	0.000587	0.000909	0.001042
	0.3	0.001688	0.001181	0.002304	0.003025	0.003849	0.004145
	0.6	0.008018	0.002421	0.009245	0.010518	0.011817	0.012251
	0.9	0.016567	0.016865	0.017367	0.017811	0.017756	0.017604
	0.0	0.000006	0.000009	0.000017	0.000033	0.000056	0.000065
	0.01	0.000008	0.000011	0.000020	0.000038	0.000062	0.000071
	0.03	0.000013	0.000017	0.000028	0.000048	0.000075	0.000085

	0.06	**0.000022**	**0.000028**	**0.000042**	**0.000067**	**0.000097**	**0.000109**
50	**0.09**	**0.000035**	**0.000042**	**0.000058**	**0.000087**	**0.000122**	**0.000135**
	0.1	**0.000040**	**0.000048**	**0.000065**	**0.000095**	**0.000131**	**0.000144**
	0.3	**0.000201**	**0.000217**	**0.000250**	**0.000304**	**0.000363**	**0.000384**
	0.6	**0.000644**	**0.000671**	**0.000727**	**0.000814**	**0.000905**	**0.000936**
	0.9	**0.001270**	**0.001291**	**0.001315**	**0.001243**	**0.000792**	**0.000572**
	0.0	**0.000006**	**0.000005**	**0.000003**	**0.000001**	**0.000000**	**0.000000**
	0.01	**0.000005**	**0.000004**	**0.000002**	**0.000001**	**0.000000**	**0.000001**
	0.03	**0.000004**	**0.000003**	**0.000001**	**0.000000**	**0.000000**	**0.000002**
	0.06	**0.000002**	**0.000001**	**0.000000**	**0.000000**	**0.000001**	**0.000003**
100	**0.09**	**0.000001**	**0.000000**	**0.000000**	**0.000001**	**0.000003**	**0.000004**
	0.1	**0.000000**	**0.000000**	**0.000000**	**0.000001**	**0.000003**	**0.000004**
	0.3	**0.000010**	**0.000012**	**0.000016**	**0.000023**	**0.000031**	**0.000034**
	0.6	**0.000082**	**0.000088**	**0.000100**	**0.000121**	**0.000145**	**0.000154**
	0.9	**0.000283**	**0.000298**	**0.000326**	**0.000340**	**0.000092**	**0.000018**

ولغرض اجــراء المقارنة العامة بين طرائق التقدير المختلفة باستخدام (MSE) ولحجوم العينات (n=10,50,100) ، تم اعداد جدول (٤) لغرض المقارنة ومنه يمكن تلخيص النتائج التالية :

اعطت اقل قيم (MSE) افضلية طرائق التقدير المختلفة بحــسب حجــوم العينــات وعلــى وفــق التسلسلات الاتية :

أ- عند حجم العينة صغير (n=10)

١- اسلوب (EBE) . ٢- اسلوب (SBE) باستعمال دالة سابقة طبيعة – كاما

٣- طريقة (MM) . ٤- طريقة (OLS) .

٥- طريقة (EML) . ٦- طريقة (AML) .

ب- عند حجم العينة متوسط اوكبير (n=50,100)

١- اسلوب (EBE) . ٢- اسلوب (SBE) باستعمال دالة سابقة طبيعة – كاما

٣- طريقة (EML) . ٤- طريقة (OLS) .

٥- طريقة (MM) . ٦- طريقة (AML) .

جدول (٤) بين علاقة المقارنة (MSE) حسب طرائق التقدير المختلفة ولحجوم العينات (n=10,50,100) لنموذج AR(1)

المعلمة وطريقة التقدير	**حجم العينة n**	$\hat{\Phi}_1$	**MSE**
$\Phi_1 = 0.3$ **طريقة MM**	**10**	**0.24566**	**0.09319**
	50	**0.29145**	**0.01864**
	100	**0.29707**	**0.00817**
$\Phi_1 = 0.3$ **طريقة OLS**	**10**	**0.24554**	**0.09844**
	50	**0.29150**	**0.01856**
	100	**0.29698**	**0.00811**
$\Phi_1 = 0.3$ **طريقة AML**	**10**	**0.27640**	**0.12772**
	50	**0.29757**	**0.01927**
	100	**0.29970**	**0.00827**
$\Phi_1 = 0.3$ **طريقة EML**	**10**	**0.24568**	**0.10342**
	50	**0.29150**	**0.01856**
	100	**0.29667**	**0.00811**
اسلوب بيز (SBE) مع دالة سائبة طبيعية كاما عند المعلمة $\Phi_1 = 0.3$ $(a = 1, \mathrm{B} = 2, b = 1, Q = 1)$	**10**	**0.33738**	**0.06928**
	50	**0.30534**	**0.01748**
	100	**0.30358**	**0.00789**

اسلوب بيز التجريبي EBE $u = 0.3$ $t = 0$	**10**	**0.26253**	**0.00168**
	50	**0.28584**	**0.00201**
	100	**0.29687**	**0.00001**

الاستنتاجات والمقترحات

من خلال الجانبين النظري والتجريبي يمكن التوصل الى الاستنتاجات التالية :

١- كلما ازداد حجم العينة قلت معها قيم (MSE)

٢- المفاضلة بين طرائق التقدير التقليدية بان طريقتي (EML) و (AML) لها اقل (MSE) أي افضلية .

٣- عند المفاضلة بين مختلف الطرائق تكون الافضلية لاسلوب بيز التجريبي ثم القياسي

اما المقترحات فهي :

١- توسيع الدراسة لنموذج المتوسطات المتحركة (MA) والنموذج المختلط (ARMA) لنماذج السلاسل الزمنية الاحادية الطبيعية او غير الطبيعية .

٢- توسيع الدراسة لتشمل اسلوب بيز في مجال الوقت (Time Domain) او مجال التكرار (Frequency Domain) .

المصادر

١- العبودي ، عماد حازم ، *استخدام اسلوب بيز في تقدير وتحليل معلمات نماذج الانحدار مع تطبيق عملي* ، اطروحة دكتوراه ، كلية الادارة والاقتصاد ، جامعة بغداد ، (١٩٩٦) .

٢- العقابي ، عباس لفته كنيهر ، *استخدام اسلوب بيز واسلوب بيز التجريبي في التقدير (دراسة مقارنة)* ، رسالة ماجستير – كلية الادارة والاقتصاد – جامعة بغداد ، (١٩٩٦) .

3- Box , G.E.P and Jenkins , G.M , *Time series Analysis : Forecasting and control* , Revised Edition , Holden Day , San Francisco , 1970 .

4- Wei , W.W.S , *Time series analysis : Unvariate and Multivariate Methods* , Addison – Wesley Publishing company, 1990 .

5- Wagman , E.J , *Time series analysis – Theory , Data Analysis and Computation* , Addison – Wesley Publishing company , 2000.

6- Hamilton , J.D. , *Time series analysis* , U.S.A , PP(351-371) , 1994 .

7- Zellner , A. , *An Introduction to Bayesian Inference in econometrics and statistics* , John Wiley & Sans , Inc , New York ,1971.
8- Chaturvedi , A. and et al " Bayesian Analysis of the linear Regression Model with an Edgeworth , series prior Distribution " , *Communications in statistics* , Vol. 26 , No. 5 , PP(1145-1163) , 1997.
9- Cook , P. " Bayesian Autoregressive Filter and Squared Gain Estimation " , *Communications in statistics* , Vol. 16 , No. 9 , PP(2697 – 2712), 1987 .
10- Carlin , J , B. and et al " On Models and Methods for Bayesian time series analysis " , *Gournal of Econometrics* , Vol. 30 ,No, PP(67-90) , 1985.