

تمثيل الدوال القياسية المستمرة بواسطة مجهر

هند يقضان صالح

طاهر حسن إسماعيل

كلية علوم الحاسوب والرياضيات

جامعة الموصل

تاريخ قبول البحث: ٢٠١٠/٦/٢٩

تاريخ استلام البحث: ٢٠١٠/٤/٢٢

ABSTRACT

The aim of this paper is to provide a representation of a standard continuous function and a standard differentiable function by mean of a microscope .

More precisely, under certain conditions, the following results have been obtained.

Let F be a standard continuous function define on R , and oG the shadow of it's graph. If there exists a standard point $X_0 \in R$ and an interval I_0 about X_0 such that : $\forall X \in I_0, (X, F(X)) \text{ limited} \Rightarrow X \simeq X_0$.

(i) Furthermore If there exist X_1, X_2 limited in I_0 such that $F(X_1), F(X_2)$ are infinitely large with opposite sign, then oG contains the vertical line Δ of the equation ${}^oX = X_0$.

(ii) If there exist a standard number α , $X \in I_0$ and if $F(X)$ is limited such that ${}^oF(X) \leq \alpha$ (resp. ${}^oF(X) \geq \alpha$). Also if there exist X_1, X_2 limited in I_0 such that $F(X_1) < 0$ is infinitely large (resp. $F(X_1) > 0$) and $F(X_2) \simeq \alpha$, then oG contains the half line Δ_α defined by :

$$\Delta_\alpha = \{(X, Y) \in R^2 : {}^oX = X_0, {}^oY \leq \alpha \text{ (resp. } {}^oY \geq \alpha)\}$$

Let f be a standard function defined at a neighbourhood at a standard point x_0 , then f is differentiable at x_0 if and only if under every microscope of power ε , centered at $(x_0, f(x_0))$, the representation of f is not a vertical line at $(x_0, f(x_0))$.

المستخلص

الهدف من هذا البحث هو إعطاء تمثيل للدوال القياسية المستمرة والدوال القياسية القابلة للاشتقاق

باستخدام مجهر.

بكلام أدق، وفق شروط معينة ، تم الحصول على النتائج الآتية :

لتكن F دالة قياسية مستمرة ومعرفة على R ، و oG الشبح لبيانها G ، نفرض انه توجد نقطة قياسية

$X_0 \in R$ وفترة I_0 حول X_0 بحيث أن : لكل $X \in I_0$ ، $(X, F(X))$ محدودة يؤدي إلى $X \simeq X_0$.

(i) بالإضافة إلى ذلك إذا وجدت نقطتان محدودتان X_1, X_2 في I_0 بحيث ان كل من $F(X_1), F(X_2)$ متناهية الكبر بإشارات متعاكسة ، فان oG يحوي المستقيم العمودي Δ للمعادلة : ${}^oX = X_0$

(ii) إذا وجد عدد قياسي α و $X \in I_0$ و $F(X)$ محدودة بحيث أن ${}^oF(X) \leq \alpha$ (على الترتيب)، كذلك إذا وجدت نقطتان محدودتان X_1, X_2 في I_0 بحيث ان $F(X_1) < 0$ متناهية الكبر (على $F(X_1) > 0$)

الترتيب)، وكان $F(X_2) \simeq \alpha$ ، فان G^0 يحوي على نصف المستقيم Δ_α المعروف كالأتي:

$$\Delta_\alpha = \{(X, Y) \in R^2 : {}^0X = X_0, {}^0Y \leq \alpha \text{ (على الترتيب)} \mid Y \geq \alpha\}$$

لتكن f دالة قياسية معرفة على جوار النقطة القياسية x_0 فان f قابلة للاشتقاق عند x_0 إذا وفقط إذا كان تحت كل مجهر بقوة ε متمركز عند النقطة $(x_0, f(x_0))$ يكون تمثيل الدالة f مستقيم غير عمودي عند $(x_0, f(x_0))$.

1. المقدمة

سوف نستخدم خلال هذا البحث التعاريف والرموز الآتية :

إذا كان $x \in R$ ، فيقال بان x متناهي الصغر *infinitesimal* إذا كان $|x| < r$ لكل $r \in R^+$ إذا كان $x \in R$ ، فيقال بان x متناهي الكبر *Infinitely large* إذا كان $|x| > r$ لكل $r \in R^+$ ، فيما عدا ذلك يقال أن x محدود *limited* .

إذا كان $x \in R$ ، فيقال بان x مُقدر *appreciable* إذا كان x محدود ولكن غير متناهي الصغر، (انظر و [2],[3],[6],[12]).

إذا كان x و y عنصران في R ، فيقال بان x ، y متناهيتهما القرب *infinitely near* (ويرمز لذلك $x \simeq y$) إذا وفقط إذا كان $x - y$ متناهي الصغر.

إذا كان x عنصرا في R فان مجموعة النقاط في R والتي تكون متناهيتهما القرب من x تسمى هالة x ويرمز لها بالرمز $m(x)$.

إذا كانت A مجموعة جزئية من R^2 فان هالة A ، يرمز لها $m(A)$ ، هي اتحاد هالات النقاط في A . إذا كانت A_1 و A_2 مجموعتين جزئيتين من R^2 فان A_1 و A_2 متناهيتهما القرب إذا كانت لهما الهالة نفسها (أي $m(A_1) = m(A_2)$) .

إذا كانت x نقطة محدودة في R فإنها تكون متناهيتهما القرب من نقطة قياسية وحيدة في R ، وان هذه النقطة الوحيدة تسمى شبح (*shadow*) أو الجزء القياسي (*standard part*) لـ x ، ويرمز لها 0x أو $st(x)$. يقال لأية مجموعة معرفة في "نظرية المجموعات لزيروميلو-فرانكل مع بديهية الاختيار يرمز لها (ZFC)" بأنها مجموعة قياسية ، ويقال للدالة التي يكون بيانها مجموعة قياسية بأنها دالة قياسية [12].

إذا كانت A مجموعة جزئية من R^2 فان الشبح أو الجزء القياسي من A يرمز له 0A أو $st(A)$ ويعرف بأنه المجموعة القياسية الوحيدة في R^2 وتم الحصول عليها بأخذ الشبح لكل النقاط المحدودة في A . إذا لم تكن للمجموعة A نقاط محدودة فيكون شبحها 0A مجموعة خالية . (انظر [1],[7],[10]).

لتكن f دالة قياسية فيقال بان الدالة f مستمرة ، *continuous* ، عند النقطة القياسية x_0 إذا كان لكل نقطتين قياسيتين x_0 و x ؛ $x \simeq x_0$ يؤدي إلى $f(x) \simeq f(x_0)$ [8].

إذا كان $\varepsilon \neq 0$ فان ε -كلاسي للنقطة x_0 ، ويرمز لها $\varepsilon - gal(x_0)$ هي مجموعة النقاط التي بعدها عن x_0 هو على الأكثر من رتبة ε ، أي أن :

$$\varepsilon - gal(x_0) = \left\{ x \in R ; \frac{x - x_0}{\varepsilon} \text{ محدودة} \right\}$$

(انظر [4],[5],[9],[11]).

يقال أن الدالة القياسية f قابلة للاشتقاق عند النقطة x_0 ، وقيمتها تساوي $f'(x_0)$ ، إذا كان

$$\text{لكل } [7], x \neq x_0, x \simeq x_0$$

$$f'(x_0) \simeq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

بديهية الانتقال [7]: لكل صيغة قياسية تحتوي على المتغيرات المستقلة $x, t_1, t_2, \dots, t_n$ فقط، فإن الصيغة التالية تتحقق :

$$\forall^{st} t_1, t_2, \dots, t_n [\forall^{st} x F(x, t_1, t_2, \dots, t_n) \Rightarrow \forall x F(x, t_1, t_2, \dots, t_n)]$$

$$\exists x F(x, t_1, t_2, \dots, t_n) \Rightarrow \exists^{st} x F(x, t_1, t_2, \dots, t_n) \quad \text{وكذلك}$$

مبرهنة القيمة المتوسطة : [8] إذا كانت f دالة مستمرة ومعرفة على الفترة $[a, b]$ بحيث أن $f(a) = \alpha$ و $f(b) = \beta$ ، وكانت $\alpha \leq \gamma \leq \beta$ ، فإنه يوجد $c \in [a, b]$ بحيث $f(c) = \gamma$.

2. النتائج الرئيسية :

أعطينا التعاريف الآتية :

تعريف (2.1): إذا كان $\varepsilon > 0$ عدداً حقيقياً متناهي الصغر وكانت (x_0, y_0) نقطة في المستوى R^2 فإن المجهر بقوة ε والمتمركز عند النقطة (x_0, y_0) يعرف كالآتي :

$$\begin{cases} x - x_0 = \varepsilon X \\ y - y_0 = \varepsilon Y \end{cases}$$

حيث أن (X, Y) هي الإحداثيات تحت المجهر.

تعريف (2.2): يعرف تمثيل بيان دالة مستمرة f تحت مجهر بقوة ε متمركز عند نقطة $(x_0, f(x_0))$ على أنه بيان دالة مستمرة F معرفة كالآتي:

$$F(X) = \frac{f(x_0 + \varepsilon X) - f(x_0)}{\varepsilon}$$

تعريف (2.3): لتكن f دالة قياسية مستمرة و G بيانها، فإن تمثيل الدالة f تحت مجهر متمركز عند نقطة من بيانها يسمى شبح البيان G ، ويرمز له ${}^o G$ تحت هذا المجهر.

المبرهنة التالية تبين لنا تمثيل الدوال القياسية القابلة للاشتقاق بواسطة مجهر

مبرهنة (2.4): لتكن f دالة قياسية قابلة للاشتقاق عند النقطة القياسية x_0 فإن تمثيل الدالة f تحت كل مجهر بقوة $\varepsilon > 0$ متناهية الصغر مركزه $(x_0, f(x_0))$ هو مستقيم معادلته: ${}^o Y = f'(x_0) {}^o X$ إذا كانت المشتقة محدودة ، والمستقيم ${}^o X = 0$ فيما عدا ذلك.

البرهان: إذا كان كل من f و x_0 قياسياً ، وأن الدالة f قابلة للاشتقاق، فإن تمثيل الدالة f تحت جميع المجاهر المتمركزة عند $(x_0, f(x_0))$ يكون المستقيم هو المماس لبيان الدالة f عند $(x_0, f(x_0))$.
نفرض أنه تحت جميع المجاهر المتمركزة عند $(x_0, f(x_0))$ ، حيث f ، x_0 قياسي هو مستقيم المعادلة $Y = aX$ ، حيث a عدد قياسي.

نستنتج أنه في الإحداثيات (X, Y) للمجهر، الدالة f تحقق العلاقة :

$$Y \simeq aX \quad \text{فان } X \text{ محدود ، فان}$$

نفرض أنه لكل X محدود وغير متناهي الصغر فان $\frac{Y}{X} \simeq a$

إذا f و x_0 يحققان الخاصية الآتية :

لكل $\varepsilon > 0$ متناهي الصغر، ولكل $x \in \varepsilon - gal(x_0)$ و $x \notin m(x_0)$ ، فإن

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \simeq a$$

هذا يعني لكل $x \simeq x_0$ و $x \neq x_0$ ، $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \simeq a = f'(x_0)$

ويقتضي أن $f'(x_0) \simeq \frac{Y}{X}$ وهذا يؤدي إلى $Y \simeq X f'(x_0)$

وبأخذ الشبح للطرفين نحصل على ${}^oY = {}^oX f'(x_0)$

الآن إذا كانت $f'(x_0)$ متناهية الكبر نجد أن $Y \simeq X f'(x_0)$

يقتضي إن $X = \frac{Y}{f'(x_0)} \simeq 0$

فنحصل على ${}^oX = 0$ عندما $f'(x_0)$ متناهية الكبر. ■

وكتعميم للمبرهنة (2.4) لدينا المبرهنة الآتية :

مبرهنة (2.5) : لتكن f دالة قياسية معرفة على جوار النقطة القياسية x_0 فإن f قابلة للاشتقاق عند x_0 إذا وفقط إذا تحت كل مجهر بقوة ε متمركز عند النقطة $(x_0, f(x_0))$ يكون تمثيل الدالة f مستقيم غير عمودي عند $(x_0, f(x_0))$.

البرهان : حسب المبرهنة (٢,٤) ، فإن تمثيل الدالة القياسية f والقابلة للاشتقاق عند النقطة القياسية x_0 ، هو المستقيم $Y = f'(x_0)X$ ، تحت كل مجهر متمركز عند النقطة $(x_0, f(x_0))$ او عند نقطة متناهية القرب منها .

بالعكس نفرض أن f دالة قياسية ولنفرض أننا نرى المستقيم $Y = f'(x_0)X$ تحت كل مجهر مركزه $(x_0, f(x_0))$ او نقطة متناهية القرب من هذا المركز.

إذا كان ميل هذا المستقيم هو العدد القياسي a تحت كل مجهر متمركز عند $(x_0, f(x_0))$ او نقطة متناهية القرب منها لدينا:

لكل X محدود ، $Y \simeq aX$ ، حيث $a = f'(x_0)$

إذا كان لكل X محدود ، $(X \neq 0)$ ، $\frac{Y}{X} \simeq a$

وعليه فإن كلا من f و x_0 تحقق الأتي:

لكل $\varepsilon > 0$ ، $\varepsilon \simeq 0$ ، لكل $\beta \simeq x_0$ ، لكل $x \in \varepsilon - gal(\beta)$ ، $x \notin \varepsilon - m(\beta)$ ،

$$\frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \simeq a$$

وهذا يعني انه لكل $\beta \simeq x_0$ ، لكل $x \simeq x_0$ ، $x \neq \beta$ ، فإن

$$\frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \simeq a$$

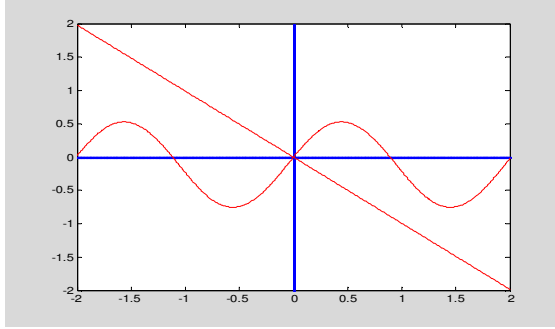
حسب التعريف في [7] ، فإن f قابلة للاشتقاق عند x_0 . ■

مثال (2.6) : إذا كانت الدالة القياسية f معرفة كالآتي :

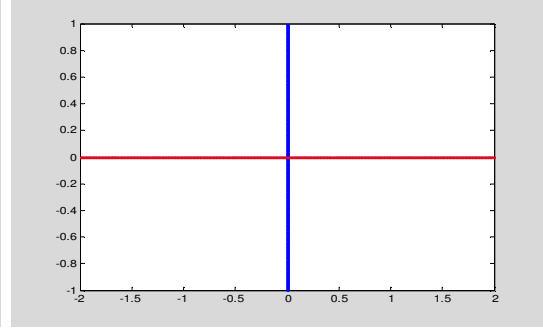
$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x^2} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

فان التمثيلات المختلفة للدالة f القابلة للاشتقاق تحت مجهر مركزه النقطة $(\eta, f(\eta))$ هي :

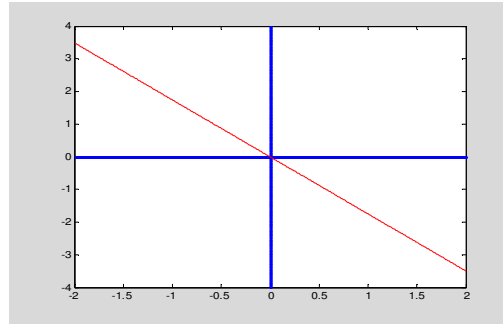
- (i) مستقيم أفقي عندما $\frac{\eta^3}{\varepsilon}$ متناهية الصغر. كما في الشكل (1)
 - (ii) منحنى جيبي عندما $\frac{\eta^3}{\varepsilon}$ محدودة غير متناهية الصغر. كما في الشكل (2)
 - (iii) مستقيم غير عمودي عندما $\frac{\eta^3}{\varepsilon}$ متناهية الكبر. كما في الشكل (3)
- باستخدام برنامج (Matlab) حصلنا على الأشكال الآتية :



شكل (2)



شكل (1)



شكل (3)

البرهان : تحت مجهر بقوة $\varepsilon \simeq 0$ متمركز عند النقطة $(\eta, f(\eta))$ حيث $\eta \simeq 0$ ، وباستخدام تعريف (2.2) لدينا:

$$Y = \frac{1}{\varepsilon} \left[(\varepsilon X + \eta)^3 \sin \frac{1}{(\varepsilon X + \eta)^2} - \eta^3 \sin \frac{1}{\eta^2} \right]$$

$$Y = \frac{\eta^3}{\varepsilon} \left[\sin \frac{1}{(\varepsilon X + \eta)^2} - \sin \frac{1}{\eta^2} \right] + (\varepsilon^2 X^3 + 3\varepsilon\eta X^2 + 3\eta^2 X) \sin \frac{1}{(\varepsilon X + \eta)^2}$$

لقيم X المحدودة لدينا :

$$Y = \frac{\eta^3}{\varepsilon} \left[\sin \frac{1}{(\varepsilon X + \eta)^2} - \sin \frac{1}{\eta^2} \right]$$

ندرس الحالات الآتية :

(i) عندما $\frac{\eta^3}{\varepsilon}$ متناهية الصغر.

نجد أن Y متناهية الصغر لقيم X المحدودة وان التمثيل للدالة f تحت هذا المجهر هو المستقيم الأفقي

$$Y = 0$$

(ii) عندما $\frac{\eta^3}{\varepsilon}$ محدودة غير متناهية الصغر .

في هذه الحالة تكون $\frac{\varepsilon}{\eta} = \frac{\varepsilon}{\eta^3} \eta^2$ متناهية الصغر وان

$$\sin \frac{1}{(\varepsilon X + \eta)^2} = \sin \frac{1}{\eta^2 (\frac{\varepsilon}{\eta} X + 1)}$$

$$= \sin \frac{1}{\eta^2} (1 - \frac{2\varepsilon}{\eta} X + \delta)$$

حيث δ متناهي الصغر بالنسبة الى $\frac{\varepsilon}{\eta} X$.

$$\simeq \sin \frac{1}{\eta^2} (1 - \frac{2\varepsilon}{\eta} X)$$

عليه لقيم X المحدودة لدينا :

$$Y \simeq \frac{\eta^3}{\varepsilon} \left(\sin \left(\frac{1}{\eta^2} - \frac{2\varepsilon}{\eta^3} X \right) - \sin \frac{1}{\eta^2} \right)$$

نضع $K = \frac{\varepsilon}{\eta^3}$ نحصل على :

$$Y = \frac{1}{K} \left(\sin \left(\frac{1}{\eta^2} - 2KX \right) - \sin \frac{1}{\eta^2} \right)$$

$$Y = \frac{1}{K} \left(\sin \frac{1}{\eta^2} \cos 2KX - \cos \frac{1}{\eta^2} \sin 2KX \right) - \frac{1}{K} \sin \frac{1}{\eta^2}$$

التمثيل للدالة f تحت هذا المجهر يكون منحنى جيبي للمعادلة :

$$Y = \left(\frac{\sin \frac{1}{\eta^2}}{K} \right) (\cos(2^\circ KX) - 1) - \left(\frac{\cos \frac{1}{\eta^2}}{K} \right) \sin(2^\circ KX)$$

(iii) عندما $\frac{\eta^3}{\varepsilon}$ متناهية الكبر

إذا كان X محدودا

$$\sin \left(\frac{1}{\eta^2} - 2 \frac{\varepsilon}{\eta^3} X + \frac{\delta}{\eta^2} \right) = \sin \frac{1}{\eta^2} + \left(\frac{\delta}{\eta^2} - 2 \frac{\varepsilon}{\eta^3} X \right) \cos \frac{1}{\eta^2} + \frac{\varepsilon^2}{\eta^6} \phi$$

حيث ϕ تكون متناهية الصغر و δ متناهية الصغر بالنسبة الى $\frac{\varepsilon}{\eta} X$.

عليه لقيم X المحدودة لدينا :

$$Y \simeq \frac{\eta^3}{\varepsilon} \left[\left(\frac{\delta}{\eta^2} - 2 \frac{\varepsilon}{\eta^3} X \right) \cos \frac{1}{\eta^2} + \frac{\varepsilon^2}{\eta^6} \phi \right]$$

$$Y \simeq \left(\delta \frac{\eta}{\varepsilon} - 2X \right) \cos \frac{1}{\eta^2} + \frac{\varepsilon}{\eta^3} \phi$$

$$Y \simeq -2X \cos \frac{1}{\eta^2}$$

التمثيل للدالة f تحت المجهر هو مستقيم غير العمودي

$$Y = -2 \left(\cos \frac{1}{\eta^2} \right) X$$

حيث ميله (الجزء القياسي لمشتقة f عند η) يأخذ كل القيم الواقعة بين $+2$ و -2 .

المبرهنة التالية تبين لنا تمثيل الدوال القياسية المستمرة غير قابلة الاشتقاق بواسطة مجهر

مبرهنة (2.7) : لتكن F دالة قياسية مستمرة ومعرفة على R ، و ${}^{\circ}G$ الشبح لبيانها G ، نفرض انه توجد نقطة قياسية $X_0 \in R$ وفترة I_0 حول X_0 بحيث أن : لكل $X \in I_0$ ، $(X, F(X))$ محدودة ، يؤدي إلى $X \simeq X_0$.

(i) بالإضافة إلى ذلك إذا وجدت نقطتان محدودتان X_1, X_2 في I_0 بحيث ان كل من $F(X_1)$ و $F(X_2)$ متناهية الكبر بإشارات متعاكسة ، فان ${}^{\circ}G$ يحوي المستقيم العمودي Δ للمعادلة : ${}^{\circ}X = X_0$

(ii) إذا وجد عدد قياسي α و $X \in I_0$ و $F(X) \leq \alpha$ و $F(X) \geq \alpha$ على الترتيب ، كذلك إذا وجدت نقطتان محدودتان X_1, X_2 في I_0 ، بحيث أن $F(X_1) < 0$ متناهية الكبر ($F(X_1) > 0$) على الترتيب ، وكان $F(X_2) \simeq \alpha$ ، فان ${}^{\circ}G$ يحوي على نصف المستقيم Δ_{α} المعرف كالاتي :

$$\Delta_{\alpha} = \{(X, Y) \in R^2 : {}^{\circ}X = X_0, {}^{\circ}Y \leq \alpha \text{ (على الترتيب)}\}$$

البرهان : (i) لتكن (X_0, Y_0) نقطة قياسية للمستقيم Δ ، بما أن F دالة مستمرة و X_1 و X_2 نقطتان محدودتان تنتميان إلى I_0 ، بحيث $F(X_1)$ و $F(X_2)$ متناهية الكبر بإشارات متعاكسة ، وباستخدام نظرية القيمة المتوسطة توجد $X \in [X_1, X_2]$ (أو $X \in [X_2, X_1]$) بحيث أن $F(X) = Y$.

بما أن $(X, F(X))$ نقطة محدودة من G وان $X \in I_0$ ، فان $X \simeq X_0$ أي ${}^{\circ}X = X_0$ إذاً $(X, F(X)) = (X_0, Y_0)$ هي نقطة قياسية من ${}^{\circ}G$.

وعليه فان كل نقطة قياسية من Δ هي نقطة قياسية من ${}^{\circ}G$ لان ${}^{\circ}G$ تمثل شبح النقاط المحدودة من G .

بما أن Δ و ${}^{\circ}G$ مجموعتان قياسيتان و(باستخدام بديهية الانتقال) فان كل نقطة من Δ هي نقطة من ${}^{\circ}G$ إذاً $\Delta \subset {}^{\circ}G$ ، وان Δ يمثل المعادلة ${}^{\circ}X = X_0$.

(ii) لتكن (X_0, Y_0) نقطة قياسية من المستقيم Δ_{α} ، بما أن F دالة مستمرة و X_1 و X_2 نقطتان محدودتان تنتميان إلى I_0 ، بحيث $F(X_1) < 0$ متناهية الكبر و $F(X_2) \simeq \alpha$ ، وباستخدام نظرية القيمة المتوسطة توجد $X \in [X_1, X_2]$ (أو $X \in [X_2, X_1]$) بحيث أن $F(X) = Y_0$.

عندما $Y_0 = \alpha$ فان $F(X) = \alpha$ وإذا كان $Y_0 < \alpha$ فان $F(X) = Y_0 < \alpha$ هذا يعني أن ${}^{\circ}Y \leq \alpha$ وبطريقة مماثلة يمكن أن نبرهن أن ${}^{\circ}Y \geq \alpha$.

بما أن $(X, F(X))$ نقطة محدودة من G وان $X \in I_0$ ، فان $X \simeq X_0$ أي ${}^{\circ}X = X_0$ إذاً $(X, F(X)) = (X_0, Y_0)$ هي نقطة قياسية من ${}^{\circ}G$.

وعليه فان كل نقطة قياسية من Δ_{α} هي نقطة قياسية من ${}^{\circ}G$.

بما أن Δ_{α} و ${}^{\circ}G$ مجموعتان قياسيتان وحسب بديهية الانتقال نحصل على أن كل نقطة من Δ_{α} هي نقطة من ${}^{\circ}G$.

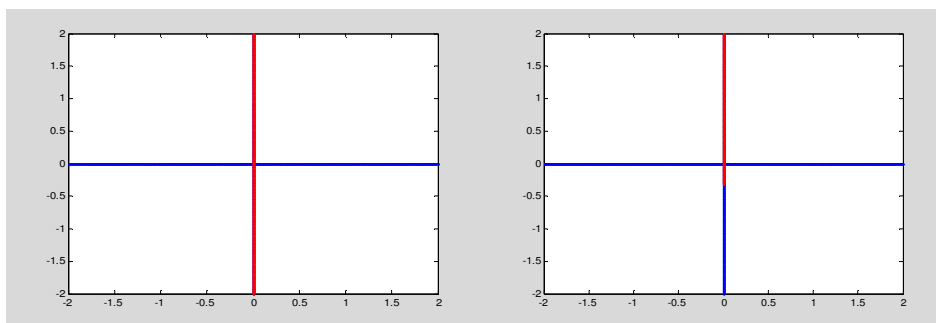
إذاً $\Delta_{\alpha} \subset {}^{\circ}G$. وان Δ_{α} يمثل المعادلة :

$$\Delta_{\alpha} = \{(X, Y) \in R^2 : {}^{\circ}X = X_0, {}^{\circ}Y \leq \alpha \text{ (على الترتيب)}\}$$

مثال (2.8) : إذا كانت f دالة قياسية معرفة كالاتي : $f(x) = \sqrt{x}$ فان التمثيل للدالة f تحت مجهر بقوة $\varepsilon > 0$ متناهية الصغر متركز عند النقطة $(\eta, f(\eta))$ حيث $\eta \simeq 0$ ، هما المستقيمان العموديان :

(i) ${}^oX = 0$ ، ${}^oY \geq -\left(\frac{\sqrt{\eta}}{\varepsilon}\right)$ إذا كان $\frac{\sqrt{\eta}}{\varepsilon}$ محدود كما في الشكل (٤)

(ii) ${}^oX = 0$ إذا كان $\frac{\sqrt{\eta}}{\varepsilon}$ متناهي الكبير كما في الشكل (5)



شكل (5)

شكل (4)

البرهان : تحت مجهر بقوة ε مركزه النقطة $(\eta, f(\eta))$ حيث $\eta \simeq 0$ ، عندما $X \geq -\frac{\eta}{\varepsilon}$ وباستخدام تعريف (٢,٢) نحصل على :

$$Y = \sqrt{\frac{X}{\varepsilon} + \frac{\eta}{\varepsilon^2}} - \sqrt{\frac{\eta}{\varepsilon^2}}$$

هناك حالتان :

(i) عندما $\frac{\eta}{\varepsilon^2}$ عدد محدود و Y محدود يقتضي أن X متناهي الصغر ، إذا كان $X \geq -\frac{\eta}{\varepsilon}$ ، فإن $Y \geq -\frac{\sqrt{\eta}}{\varepsilon}$ ، الشبح لبيان الدالة f تحت هذا المجهر عندما $\frac{\sqrt{\eta}}{\varepsilon}$ متناهي الصغر التمثيل هو المستقيم العمودي :

$$L_1 = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 : {}^oX = 0, {}^oY \geq 0\}$$

عندما $\frac{\sqrt{\eta}}{\varepsilon}$ ليس متناهي الصغر فالتمثيل هو المستقيم العمودي :

$$L_2 = \left\{ (X, Y) \in \mathbb{R}^2 : {}^oX = 0, {}^oY \geq -\left(\frac{\sqrt{\eta}}{\varepsilon}\right) \right\}$$

(ii) عندما $\frac{\eta}{\varepsilon^2}$ متناهي الكبير فإن

$$Y = \frac{\sqrt{\eta}}{\varepsilon} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\eta} X + 1} - 1 \right)$$

إذا كان $\frac{\sqrt{\eta}}{\varepsilon}$ متناهي الكبير و Y محدودا فمن الضروري أن يكون $\sqrt{\frac{\varepsilon}{\eta} X + 1} \simeq 1$ إذا كان $\frac{\eta}{\varepsilon^2}$ محدود غير متناهي الصغر فمن الضروري أن تكون X متناهية الصغر وإذا كان $\frac{\eta}{\varepsilon^2}$ متناهي الكبير فيكون $\frac{\varepsilon}{\eta}$ متناهي الصغر وان

$$\sqrt{\frac{\varepsilon}{\eta} X + 1} = 1 + \frac{\varepsilon}{2\eta} X + \delta$$

حيث أن δ متناهية الصغر بالنسبة إلى $\frac{\varepsilon}{\eta} X$ وعليه فإن :

$$Y = \frac{\sqrt{\eta}}{\varepsilon} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2\eta} X + \delta - 1 \right)$$

$$Y = \frac{1}{2\sqrt{\eta}}X + \delta \frac{\sqrt{\eta}}{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{\eta}}\left(\frac{X}{2} + \frac{\eta}{\varepsilon}\delta\right)$$

إذا كانت النقطة (X, Y) محدودة فيكون المقدار $\left(\frac{X}{2} + \frac{\eta}{\varepsilon}\delta\right)$ متناهي الصغر ولذلك فإن X متناهي الصغر. في جميع الحالات إذا كانت $(X, F(X))$ محدودة فتكون X متناهية الصغر وعند النقاط غير المتناهية الصغر X_1 و X_2 ذات إشارات مختلفة. تأخذ القيم المتناهية الكبر وذات إشارة متعكسة يكون التمثيل للدالة f تحت هذا المجهر هو المستقيم العمودي :

$$L_3 = \{(X, Y) \in R^2 : {}^\circ X = 0\}$$

المصادر

- [1] Davis M. : "Applied non standard analysis"; New- York, John Wiley and Sons (1977).
- [2] Diener M. and Van Den Berg I. : "Halos and Galaxies une extention du lemme de Robinson", compte rendus de l'acadimie de science de paris . t.293 serie 1.(1983) p.385-388.
- [3] Goldblatt, R. "Lectures on the Hyperreals:An Introduction to Non Standard Analysis", Springer-Verlag New York, Inc. 1998.
- [4] Henle J.H. and Kleinberg E.M. : "Infinitesimal Calculus", M.I.T. Press Combridge,Mass and London ,England (1979).
- [5] Ibrahim Othman Hamad, "A non standard study of the Taylor series Development", M.Sc. thesis ,University of salahaddin (2000).
- [6] Ibrahim Othman Hamad , "Non standard Treatment of two dimensional Taylor series with remainder formula" , Al-Rafiden Journal of computer Sciences and Mathematics ,Mosul University ,Vol.5 ,No.1 (2005) .
- [7] Nelson E. : "Internal set theory : A new approach to non standard analysis", Bull. of Amer. Math.Soc.Vol.83.No. 6 (November 1977) p.1165-1198.
- [8] Pugh ,C.C., "Real Mathematical Analysis" , Springer-Verlag New York, Inc. 2002.
- [9] Rashad Rashid Haji, "Non standard approximation and successive shadow development ", M.Sc. thesis, University of salahaddin (2000).
- [10] Robinson, A. "Non standard analysis" 2nd.ed. American Elsevier New-York (1970).
- [11] Stroyan K.D. and Luxemburg W.A., "Introduction to the theory of infinitesimal ,New-York, Academic press (1976).
- [12] Vladimir, K. and Reeken, M. "Non standard Analysis , Axiomatically" ,Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2004.