

دراسة استقرارية بعض النماذج التوافقية مع تطبيق

رعد عواد الحمداني

كلية التربية

جامعة تكريت

تاريخ قبول البحث: ٢٠١٠/٨/١٦

عبد الغفور جاسم العبيدي

كلية علوم الحاسبات والرياضيات

جامعة الموصل

تاريخ استلام البحث: ٢٠١٠/٥/١٧

ABSTRACT

In this paper we find the statistical properties (Moments) of the harmonic model with additive noise, The stability of the mixed spectra (linear and non-linear models) for special case (low order) by using the Ozaki linear approximation method is found. The time series of the mean monthly temperature of Bege City is applied in order to explain the studied method. A mathematical model SARIMA(1,0,0)(2,0,0)s is suggested by the NBIC criterion and other statistical tools (auto-correlation and the residual variance). A one year ahead prediction is made for the studied time series by using the proposed model.

Key word : Stationarity , Harmonic Model , Mixed Spectra Model , Limit Cycle

الملخص

يتم في هذه البحث إيجاد الصفات الإحصائية (العزوم) للنموذج التوافقي مضافاً له حد الخطأ العشوائي (Harmonic model with additive noise). كما تم إيجاد الاستقرارية لنماذج الطيف المختلط (Mixed spectra Models) الخطية وغير الخطية وبحالات خاصة (برتب دنيا) باستخدام طريقة التقريب الخطية للباحث أوزاكي (Ozaki). إن السلسلة الزمنية للمعدلات الشهرية لدرجات الحرارة العظمى لمدينة بيجي تمثل الجانب التطبيقي في دراستنا حيث يتم بناء نماذج رياضية مختلفة لإيضاح الطريقة التي تمت دراستها وتم اقتراح أنموذج SARIMA(1,0,0)(2,0,0)s ليمثل السلسلة الزمنية المدروسة وذلك باستخدام معيار NBIC وبعض الوسائل الإحصائية الأخرى (الارتباط الذاتي وتباين البواقي). وقد تم التنبؤ بالقيم المستقبلية لسنة واحدة باستخدام الأنموذج المقترح.

1- هدف البحث:

سنركز دراستنا في هذا البحث على إيجاد العزوم للنموذج التوافقي وكذلك دراسة استقرارية نموذج الطيف المختلط الخطي (Linear Mixed Spectral Model) ونموذج الطيف المختلط غير الخطي (Non-Linear Mixed Spectral Model). وذلك لأهمية هذه النماذج في دراسة السلاسل الزمنية التي تمتلك صفات دورية.

2- المقدمة Introduction

تبنى نماذج السلاسل الزمنية عادةً على خصائص أساسية متمثلة بالاستقرارية (Stationarity) والخطية (Linearity) والطبيعية (Normality)، علماً أن أغلب السلاسل الزمنية قد لا تتبع التوزيع الطبيعي، وهذه الصفات الثلاث مهمة جداً في بناء نماذج السلاسل الزمنية، لذلك فإن دراسة السلاسل الزمنية تشمل على

هذه الافتراضات وكيفية معالجة السلاسل الزمنية غير المستقرة، والنماذج الرياضية الملائمة لتلك السلاسل هل هي خطية أم غير خطية وفيما إذا كانت تتبع التوزيع الطبيعي أم لا، وسنحاول عرض بعض الدراسات في هذا المجال حيث تناول M.B. Priestley في عام 1988 دراسة استقرارية النماذج غير الخطية للسلاسل الزمنية [14]. وفي عام (1999) قام كل من (Kurt Hornik, Fredrick, I) بدراسة الاستقرارية في الانحدار الذاتي للشبكات [9]. وفي عام 2004 قام Giovanni Fonseca بدراسة الاستقرارية في النماذج غير الخطية من الدرجة الأولى [10]. في العام (2005) قام الباحث أزهري عباس الحياي بدراسة استقرارية النموذج اللوجستي LSTAR(p) [2]. وسنحاول في هذا البحث دراسة الاستقرارية لبعض النماذج التي تمتلك صفات دورية وباستخدام طريقة التقريب الخطي للباحث الياباني أوزاكي.

3- الجانب النظري ومفاهيم أساسية:

سوف نستعرض بعض المفاهيم والتعاريف الأساسية المهمة التي نحتاجها في الجانب النظري:

1-3 الاستقرارية Stationarity [7] [8]

تكون السلسلة الزمنية $\{X_t\}$ مستقرة إذا كانت في حالة موازنة إحصائية، أي أن خصائصها الإحصائية لا تتأثر بالزمن، وتكون السلسلة $\{X_t\}$ مستقرة بدقة Strictly Stationary إذا كان التوزيع الاحتمالي المشترك للمتغيرات $X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}$ هو نفس التوزيع الاحتمالي المشترك للمتغيرات

$$X_{t_{1+k}}, X_{t_{2+k}}, \dots, X_{t_{n+k}}$$

ولجميع النقاط الزمنية المختارة $t_1, t_2, \dots, t_n$ ولأي ثابت k .

إن شرط الاستقرارية بدقة صعب التحقيق أحيانا، لذا فإننا نعرف السلسلة الزمنية بأنها مستقرة من الدرجة m (m-Order stationary) إذا كان لأي $t_1, t_2, \dots, t_n$ ولأي ثابت k فإن جميع العزوم من الدرجة m $(X_{t_{1+k}}, X_{t_{2+k}}, \dots, X_{t_{n+k}})$ تكون [13].

$$E[\{X_{t_1}\}^{m_1}, \{X_{t_2}\}^{m_2}, \dots, \{X_{t_n}\}^{m_n}] = E[\{X_{t_{1+k}}\}^{m_1}, \{X_{t_{2+k}}\}^{m_2}, \dots, \{X_{t_{n+k}}\}^{m_n}]$$

لجميع النقاط الزمنية المختارة $t_1, t_2, \dots, t_n$ ولأي ثابت k ولأي ثوابت صحيحة موجبة $m_1, m_2, \dots, m_n$ تحقق القيد

$$m_1 + m_2 + \dots + m_n \leq m$$

ولحالة خاصة يقال إن السلسلة الزمنية $\{X_t\}$ أنها مستقرة من الرتبة الأولى (First Order stationary) إذا كانت:

$$E(X_t) = m$$

كما يقال للسلسلة الزمنية $\{X_t\}$ أنها مستقرة من الرتبة الثانية (secondary Order stationary) إذا حققت الشروط الآتية:

$$1) E(X_t) = m \quad \dots(1)$$

m كمية ثابتة لا تعتمد على t

$$2) \text{Var}(X_t) = s_x^2 \quad \dots(2)$$

s_x^2 كمية ثابتة لا تعتمد على t

$$3) \text{Cov}[X_{t_1}, X_{t_2}] = g_{(t_1, t_2)} \quad \dots(3)$$

دالة بدلالة $|t_2 - t_1|$ فقط.

2-3 النموذج التوافقي مضافاً له حد الخطأ [6] Harmonic With Additive White Noise

نموذج الانحدار الذاتي التوافقي وللاختصار (النموذج التوافقي) يتضمن الجيوب وجيوب التمام مع التكرارات المختلفة ويمكن استخدامه لنمذجة السلسلة الزمنية التي تمتلك صفات موسمية أو دورية لاحظ (Bloomfield, 1976). يقال للسلسلة الزمنية بأنها تحقق النموذج التوافقي بـ (m) من المركبات إذا حققت المعادلة الآتية:

$$X_t = \sum_{j=1}^m a_j \cos(2\pi w_j t + f_j) + Z_t \quad \dots(4)$$

إذ m, a_j, w_j ثابت وان f_j متغير عشوائي مستقل يتبع التوزيع المنتظم في الفترة $[-p, p]$ ، وان $\{Z_t\}$ هي إزعاجات بيضاء. W_j تمثل التردد (Frequency) يمكن كتابة المعادلة (4) بالصيغة:

$$X_t = \sum_{j=1}^m A_j \cos(w_j t) + B_j \sin(w_j t) + Z_t \quad \dots(5)$$

لاحظ (Bloomfield) [6].

حيث

$$a_j = \sqrt{A_j^2 + B_j^2}$$

$$A_j = a_j \cos(f_j)$$

$$B_j = -a_j \sin(f_j)$$

وان a_j سعة الموجة. و f_j هي متغير عشوائي مستمر يتوزع توزيع منتظم في الفترة $[-p, p]$ وله دالة كثافة احتمالية هي:

$$f(f_j) = \frac{1}{2p}, \quad -p \leq f_j \leq p$$

3-3 نموذج الطيف المختلط الخطي (Linear) Mixed Spectral Model

يتكون نموذج الطيف المختلط الخطي من نموذج توافقي مضاف إليه نموذج انحدار ذاتي مع الإزعاجات البيضاء ويعرف بما يأتي:

$$X_t = \sum_{j=1}^m a_j \cos(2\pi w_j t + f_j) + \sum_{j=1}^n b_j X_{t-j} + Z_t \quad \dots(6)$$

حيث a_j, w_j, f_j معرفه مسبقاً. و b_j معاملات نموذج الانحدار الذاتي.

٣-٤ نموذج الانحدار الذاتي الأسّي (EXPARE (p)) [12] Exponential Autoregressive Model

عرّف الباحث Ozaki عام ١٩٨٥ نموذج الانحدار الذاتي الأسّي من الرتبة p بالشكل الآتي:

$$X_t = \sum_{i=1}^p (a_i + p_i e^{-x_{t-1}^2}) X_{t-i} + Z_t \quad \dots(7)$$

حيث $\{Z_t\}$ مستقلة ومتماثلة التوزيع (i.i.d) إزعاجات بيضاء، a_i, p_i و $i = 1, 2, \dots, p$ كميات ثابتة تمثل معلمات (parameters) النموذج.

5-3 نموذج الطيف المختلط غير الخطي Mixed Spectral Model (Non-Linear)

يمكن تعريف نموذج الطيف المختلط غير الخطي على أنه مكون من حدين. الحد الأول النموذج التوافقي والحد الثاني عبارة عن نموذج غير خطي وليكن متعدد حدود (Polynomial Model) — X_{t-k} مضافاً له الإزعاجات البيضاء أي أن:

$$X_t = \sum_{j=1}^m a_j \cos(2\pi w_j t + f_j) + \sum_{j=1}^p b_j X_{t-j}^p + Z_t \quad \dots(8)$$

حيث p عدد صحيح و a_j, w_j, f_j معرفه مسبقاً في الفقرة (2-3). و b_j معاملات نموذج متعدد الحدود.

6-3 أنموذج الانحدار الذاتي والأوساط المتحركة المندمج [1]

(Autoregressive Integrated Moving Average Model) ARIMA(p,d,q)

نظراً لأن أغلب السلاسل الزمنية المستعملة في المجالات التطبيقية غير مستقرة فلا بد من تحويلها إلى سلاسل مستقرة وذلك بأخذ عدد مناسب من الفروق للسلسلة الزمنية الأصلية $\{X_t\}$ يمكن تمثيل فروق السلسلة الزمنية كالآتي:

$$\nabla^d X_t = (1 - B)^d X_t$$

حيث B مؤثر الإزاحة الخلفي (Back word shift operator) و d هو الفرق و $B^d X_t = X_{t-d}$ لقيم $d = 1, 2, 3, \dots$.

وبعد اخذ عدد مناسب من الفروق وليكن d للسلسلة الأصلية $\{X_t\}$ سنحصل على السلسلة المستقرة $\{W_t\}$ والتي تمثل النموذج الملائم $ARMA(p,q)$ ، عندئذ نستطيع أن نعبر عن السلسلة الزمنية الأصلية $\{X_t\}$ بأن لها نموذج انحدار ذاتي وأوساط متحركة مندمج ويرمز له بـ $ARIMA(p,d,q)$ حيث p هي رتبة الانحدار الذاتي و q هي رتبة الأوساط المتحركة و d هو الفرق. ويعبر عن النموذج بالشكل الآتي:

$$f(B) \nabla^d X_t = q(B) Z_t$$

$$f_p(B) = 1 - f_1 B - f_2 B^2 - \dots - f_p B^p$$

$$q_q(B) = 1 - q_1 B - q_2 B^2 - \dots - q_q B^q \quad \text{و}$$

وان $\{Z_t\}$ هي إزعاجات بيضاء تتصف بالصفات الآتية:

$$(1) E(z_t) = 0$$

$$(2) \text{Var}(z_t, z_{t \pm k}) = \begin{cases} s^2 z & ; k = 0 \\ 0 & ; k \neq 0 \end{cases}$$

$$(3) \text{Cov}(z_t, z_{t \pm k}) = 0, \forall k \neq 0$$

7-3 تعريف (النقطة المنفردة) Fixed Point [11] [15]

تعرف النقطة المنفردة x للنموذج $X_t = f(X_{t-1}, \dots, X_{t-p})$ بأنها تلك النقطة التي يقترب منها مسار النموذج أعلاه والذي يكون الاقتراب إما عندما $t \rightarrow \infty$ أو $t \rightarrow -\infty$. فإذا اقترب المسار من x عندما $t \rightarrow \infty$ فتسمى x نقطة منفردة مستقرة. وإذا اقترب من x عندما $t \rightarrow -\infty$ فتدعى x نقطة منفردة غير مستقرة.

8-3 تعريف (دورة النهاية) Limit cycle [11] [15]

ليكن لدينا النموذج الآتي

$$X_t = f(x_{t-1}, \dots, x_{t-p})$$

تعرف دورة النهاية للنموذج أعلاه على أنها المسار المعزول والمغلق $x_{t+q}, x_{t+2}, \dots, x_{t+q} = x_t$ حيث q عدد صحيح موجب تمثل الدورة.

ويعرف المسار المعزول بأنه ذلك المسار الذي يقترب جداً من دورة النهاية، إما المسار المغلق فهو قيم ابتدائية $x_1, \dots, x_p$ تنتمي لدورة النهاية، لذلك فإن $(x_{i+kq}, \dots, x_{p+kq}) = (x_1, \dots, x_p)$ لكل عدد صحيح موجب k . حيث إن p هو الدورة period لدورة النهاية (Limit Cycle) وهو عدد نقاط المسار المغلق وان كل من q و k عدد صحيح موجب.

9-3 النموذج التوافقي مضافاً له حد الخطأ:

يمتلك النموذج التوافقي صفات دورية وكما لاحظنا من خلال التعريف فهو مكون من مركبتين دوريتين (الجيب والجيب تمام). سنحاول في الفقرات اللاحقة إيجاد أهم الصفات الإحصائية لهذا النموذج. ولزيادة في التفاصيل لاحظ [1]. ليكن لدينا نموذج (٤) المعروف سابقاً، فنحصل على

$$1- القيمة المتوقعة: E(X_t) = 0$$

$$2- التباين: g_0 = \sum_{j=1}^m \frac{a_j^2}{2} + s_z^2$$

$$3- دالة التغاير: g_r = \sum_{j=1}^m \frac{a_j^2}{2} [\cos(w_j r)]$$

$$4- دالة الارتباط الذاتي:$$

$$r_r = \frac{\sum_{j=1}^m a_j^2 [\cos(w_j r)]}{\sum_{j=1}^m a_j^2 + 2s_z^2}, \quad r = 1, 2, \dots, m$$

بما إن العزوم للنموذج التوافقي لا تعتمد على t فهذا يشير إلى أن $\{X_t\}$ الممثلة بالنموذج التوافقي تكون مستقرة.

10-3 نموذج الطيف المختلط الخطي:

سوف نحاول إيجاد الصفات الإحصائية لحالة خاصة من نموذج الطيف المختلط الخطي. أي عندما $j=1$ ، سنحصل على النموذج الآتي:

$$X_t = a \cos(2pwt + f) + bX_{t-1} + Z_t \quad \dots(9)$$

إذ أن f هي إما أن تكون ثابتاً اختيارياً أو متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع المنتظم في الفترة $[-p, p]$ ، $b \neq 1, 0$ ، و $a \neq 0$ ، ويمكن إيجاد الصفات الإحصائية لنموذج الطيف المختلط الخطي العام بالطريقة نفسها.

1- القيمة المتوقعة:

أ - إذا كانت f كمية ثابتة فإن

$$E(X_t) = E(a \cos(2pwt + f)) + E(bX_{t-1}) + E(Z_t)$$

$$E(X_t) = a \cos(2pwt + f) + bE(X_{t-1}) + 0$$

$$m_x = a \cos(2pwt + f) + bm_x + 0$$

$$m_x(1 - b) = a \cos(2pwt + f)$$

$$E(X_t) = m_x = \frac{a}{(1-b)} \cos(2pwt + f)$$

حيث نلاحظ أن القيمة المتوقعة لـ $\{X_t\}$ تعتمد على t مما يشير إلى أن $\{X_t\}$ ليست مستقرة.

ب - إذا كانت f تتبع التوزيع المنتظم في الفترة $[-p, p]$ فإن

$$E(X_t) = E(a \cos(2pwt + f)) + E(bX_{t-1}) + 0 \quad \dots(10)$$

$$\begin{aligned} E(a \cos(2pwt + f)) &= E[\cos(2pwt) \cos(f) - \sin(2pwt) \sin(f)] \\ &= a (\cos(2pwt) E[\cos(f)] - \sin(2pwt) E[\sin(f)]) \end{aligned} \quad \dots(11)$$

وبما أن f هي متغير عشوائي يتوزع بتوزيع منتظم على الفترة $[-p, p]$ فإن

$$E(\cos(f)) = E(\sin(f)) = 0$$

وبرهان هذه الخاصية كما يأتي:

$$\begin{aligned} E(\cos(f)) &= \int_{-p}^p (\cos(f)) f(f) df \\ &= \frac{1}{2p} \int_{-p}^p \cos(f) df = \frac{1}{2p} \sin(f) \Big|_{-p}^p \\ &= \frac{1}{2p} [\sin(p) - \sin(-p)] \\ &= \frac{1}{2p} [0 + 0] = 0 \end{aligned}$$

كذلك

$$E(\sin(f)) = \int_{-p}^p (\sin(f)) f(f) df$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2p} \int_{-p}^p \sin(f) df = \frac{1}{2p} [-\cos(f)]_{-p}^p \\
&= \frac{1}{2p} [-\cos(p) + \cos(-p)] \\
&= \frac{1}{2p} [-1 + 1] = \frac{1}{2p} [0] = 0
\end{aligned}$$

نعوض عن قيمة كل من $E[\cos(f)], E[\sin(f)]$ في المعادلة (12) نحصل على

$$E(\cos(2pwt + f)) = 0 \quad \dots(12)$$

نعوض عن قيمة المعادلة (13) في المعادلة (11) نحصل على

$$E(X_t) = a(0) + bE(X_{t-1})$$

$$E(X_t) = bE(X_{t-1})$$

$$m = bm$$

$$(1 - b)m = 0$$

بما أن $b \neq 1, 0$ من الفرضية السابقة نحصل على $m = 0$

$$E(X_t) = 0$$

2- التباين:

بما أن التباين يعرف بما يأتي:

$$\text{var}(X_t) = E(X_t^2) - [E(X_t)]^2$$

وان $E(X_t) = 0$ فيكون التباين

$$\text{var}(X_t) = E(X_t^2) - 0 = E(X_t^2)$$

$$X_t = a(\cos(2pwt + f)) + bX_{t-1} + Z_t$$

$$X_t^2 = [a(\cos(2pwt + f)) + bX_{t-1} + Z_t]^2$$

$$= [a(\cos(2pwt + f))]^2 + b^2 X_{t-1}^2 + Z_t^2 +$$

$$2ab(\cos(2pwt + f))X_{t-1} + 2a(\cos(2pwt + f))Z_t + 2bX_{t-1}Z_t$$

وبأخذ القيمة المتوقعة للطرفين نحصل على

$$E(X_t^2) = a^2 E[(\cos(2pwt + f))]^2 + E(b^2 X_{t-1}^2) + E(Z_t^2) +$$

$$2ab E[(\cos(2pwt + f))X_{t-1}] + 2a E[(\cos(2pwt + f))Z_t] + 2b E[X_{t-1}Z_t]$$

بما أن f متغير مستقل لا يعتمد على $\{Z_t\}$

$$E[X_t^2] = a^2 E[(\cos^2(2pwt + f))] + b^2 E[X_{t-1}^2] + s_z^2 + 0 + 0 + 0$$

ومن معادلة (13) نحصل على

$$g_0 = a^2 E[(\cos^2(2pwt + f))] + b^2 g_0 + s_z^2 \quad \dots(13)$$

$$\begin{aligned} E[(\cos^2(2pwt + f))] &= E\left\{\frac{1}{2}[1 + (\cos(4pwt + 2f))]\right\} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} E[(\cos(4pwt + 2f))] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} E[\cos(4pwt)\cos(2f) - \sin(4pwt)\sin(2f)] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} [\cos(4pwt)E(\cos(2f)) - \sin(4pwt)E(\sin(2f))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(\cos(2f)) &= \int_{-p}^p (\cos(2f))f(f)df \\ &= \frac{1}{2p} \int_{-p}^p \cos(2f)df = \frac{1}{4p} \sin(2f) \Big|_{-p}^p \\ &= \frac{1}{4p} [\sin(2p) - \sin(-2p)] \\ &= \frac{1}{4p} [0 + 0] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(\sin(2f)) &= \int_{-p}^p (\sin(2f))f(f)df \\ &= \frac{1}{2p} \int_{-p}^p \sin(2f)df = \frac{1}{4p} [-\cos(2f)] \Big|_{-p}^p \\ &= \frac{1}{4p} [-\cos(2p) + \cos(-2p)] \\ &= \frac{1}{4p} [-1 + 1] \\ &= \frac{1}{4p} [0] = 0 \end{aligned}$$

$$E(\cos^2(2pwt + f)) = \frac{1}{2} + 0 + 0 = \frac{1}{2} \quad \dots(14)$$

نعوّض عن قيمة (15) في المعادلة (14) فنحصل على أنّ

$$\begin{aligned} g_0 &= \frac{a^2}{2} + b^2 g_0 + s_z^2 \\ g_0 - b^2 g_0 &= \frac{a^2}{2} + s_z^2 \\ (1 - b^2)g_0 &= \frac{a^2}{2} + s_z^2 \\ g_0 &= \frac{a^2}{2(1 - b^2)} + \frac{2s_z^2}{2(1 - b^2)} = \frac{a^2 + 2s_z^2}{2(1 - b^2)} \\ g_0 &= \frac{a^2 + 2s_z^2}{2(1 - b^2)} \quad \dots(15) \end{aligned}$$

3- التغيرات:

$$g_k = \text{cov}(X_t, X_{t+k}) = E(X_t X_{t+k}) - E(X_t)E(X_{t+k})$$

بما أن $E(X_t) = 0$ فإن

$$g_k = \text{cov}(X_t, X_{t+k}) = E(X_t X_{t+k})$$

$$E(X_t X_{t+k}) = a^2 E[(\cos(2pwt + f))(\cos(2pw(t+k) + f))] \\ + ab E[(\cos(2pw(t+k) + f))X_{t-1}] + b^2 E[X_{t-1} X_{t+k-1}]$$

$$g_k = a^2 (\cos(2pwk) E[(\cos^2(2pwt + f))] - a^2 \sin(2pwk) \\ E[\sin(2pwt + f) \cos(2pwt + f)] + ab (\cos(2pwk) E[X_{t-1} (\cos(2pwt + f))] \\ - ab \sin(2pwk) E[\sin(2pwt + f) X_{t-1}]) + b^2 g_k$$

$$g_k - b^2 g_k = \frac{a^2 (\cos(2pwk))}{2} - a^2 \sin(2pwk)(0-0) + ab (\cos(2pwk))(0-0)$$

$$(1-b^2)g_k = \frac{a^2 (\cos(2pwk))}{2}$$

$$g_k = \frac{a^2 (\cos(2pwk))}{2(1-b^2)} \quad \dots(16)$$

$$r_k = \frac{g_k}{g_0} = \frac{\frac{a^2 (\cos(2pwk))}{2(1-b^2)}}{\frac{a^2 + 2s_z^2}{2(1-b^2)}}$$

$$r_k = \frac{a^2 (\cos(2pwk))}{a^2 + 2s_z^2} \quad \dots(17)$$

نلاحظ أن الصفات الإحصائية لهذا النموذج لا تعتمد على t وهذا ما يؤدي إلى أن نموذج الطيف المختلط الخطي يكون مستقرًا.

نستنتج من ذلك أنه إذا كانت f كمية ثابتة فإن نموذج الطيف المختلط الخطي يكون غير مستقرًا إذ نلاحظ أن الصفات الإحصائية تعتمد على t . وإذا كانت f تتبع التوزيع المنتظم يكون نموذج الطيف المختلط الخطي مستقرًا.

11-3 استقرارية نموذج الطيف المختلط غير الخطي:

سوف نحاول إيجاد الاستقرارية لحالة خاصة من نموذج الطيف المختلط غير الخطي أي عندما $p=1,2$ في (8). فنحصل على النموذج الآتي:

$$X_t = a \cos(2pwt + f) + b_1 X_{t-1} + b_2 X_{t-1}^2 + Z_t \quad \dots(18)$$

وبالطريقة ذاتها يمكن إيجاد الاستقرارية للنموذج العام (8)، يمكن كتابة النموذج (18) بالشكل الآتي:

$$X_t = a \cos(2pwt + f) + H_t \quad \dots(19)$$

حيث

$$H_t = b_1 X_{t-1} + b_2 X_{t-1}^2 + Z_t \quad \dots(20)$$

إذ H_t و $a \cos(2pwt + f)$ مستقلة، أي أن النموذج مكوّن من النموذج التوافقي مضاف إليه نموذج متعدد الحدود من الدرجة الثانية $\{H_t\}$.

سنحاول إيجاد استقرارية النموذج (20) باستخدام طريقة التقريب لأوزاكي وكما يأتي.

ليكن لدينا النموذج

$$X_t = b_1 X_{t-1} + b_2 X_{t-1}^2 + Z_t \quad \dots(21)$$

1- نجد النقطة الشاذة غير الصفريّة z (Non-zero singular point)

نفرض أن:

$$X_t = X_{t-1} = z$$

$$z = b_1 z + b_2 z^2$$

$$1 = b_1 + b_2 z$$

$$1 - b_1 = b_2 z$$

$$z = \frac{1 - b_1}{b_2} \quad \dots(22)$$

2- نختبر استقرارية النقطة z بالنسبة للنموذج (21):

لتكن X_t قريبة جداً من النقطة z أي أن:

$$X_t = z + z_t \quad \text{إذ أن } Z_t \text{ صغيرة جداً بحيث أن } z_t^n \rightarrow 0 \text{ لكل } n \geq 2, \text{ وبذلك تكون:}$$

$$X_{t-1} = z + z_{t-1}$$

نعوض عن X_t و X_{t-1} بما يساويها في النموذج (21) بعد اعتبار تأثير Z_t معدوماً حيث تم اعتماده في الجزء

الأول ومن النموذج العام فنحصل على:

$$z + z_t = b_1(z + z_{t-1}) + b_2(z + z_{t-1})^2$$

$$z + z_t = b_1 z + b_1 z_{t-1} + b_2 z^2 + 2b_2 z z_{t-1} + b_2 z_{t-1}^2$$

$$z + z_t = b_1 z + b_1 z_{t-1} + b_2 z^2 + 2b_2 z z_{t-1}$$

$$\frac{1 - b_1}{b_2} + z_t = b_1 \left(\frac{1 - b_1}{b_2} \right) + b_1 z_{t-1} + b_2 \left(\frac{1 - b_1}{b_2} \right)^2 + 2b_2 \left(\frac{1 - b_1}{b_2} \right) z_{t-1}$$

$$\frac{1 - b_1}{b_2} + z_t = \frac{b_1 - b_1^2}{b_2} + b_1 z_{t-1} + \frac{1 - 2b_1 + b_1^2}{b_2} + 2z_{t-1} - 2b_1 z_{t-1}$$

$$z_t = \frac{b_1 - b_1^2}{b_2} + \frac{1 - 2b_1 + b_1^2}{b_2} - \frac{1 - b_1}{b_2} + b_1 z_{t-1} + 2(1 - b_1) z_{t-1}$$

$$z_t = \left(\frac{b_1 - b_1^2 + 1 - 2b_1 + b_1^2 - 1 + b_1}{b_2} \right) + (b_1 + 2 - 2b_1) z_{t-1}$$

$$z_t = (2 - b_1) z_{t-1} \quad \dots(23)$$

النموذج الناتج يمثل نموذج انحدار ذاتي من الرتبة الأولى AR(1) بدون إزعاج ابيض (white Noise)

ويكون هذا النموذج مستقراً إذا وفقط إذا

$$|2 - b_1| < 1$$

∴ النقاط المنفردة غير الصفريّة للنموذج (21) تكون مستقرة إذا وفقط إذا

$$1 < b_1 < 3 \quad \dots(24)$$

وبما أنّ الجزء الأول وهو النموذج

$$X_t = a \cos(2pwt + f) + Z_t$$

قد تم برهانه مسبقاً بأنه نموذج مستقر وان النموذج المعطى هو مكون من جزأين وان الجزأين مستقرين لذلك يكون النموذج المختلط نموذجاً مستقراً بالشروط أعلاه.

12-3 الاستقرارية حسب طريقة أوزاكي: [12]

لقد تم اقتراح طريقة التقريب الخطية المحلية من قبل الباحث أوزاكي [12] استقرارية النماذج غير الخطية وتتخلص الطريقة بمرحلتين : المرحلة الأولى إيجاد النقاط المنفردة غير الصفريّة للنموذج غير الخطي والمرحلة الثانية اختبار استقرارية تلك النقطة باستخدام تقنية التقريب الخطية . ويمكن توضيح الطريقة من خلال المثال الآتي:

مثال: [12]

ليكن لدينا نموذج الانحدار الآسي الآتي:

$$X_t = (f_1 + p_1 e^{-X_{t-1}^2})X_{t-1} + (f_2 + p_2 e^{-X_{t-1}^2})X_{t-2} + Z_t \quad \dots(25)$$

وقد حاول الباحث (Ozaki) وضع قيود معينة على X_{t-1} لغرض إيجاد النقطة المنفردة وكما يلي:

1- عندما تكون X_{t-1} كبيرة جداً أي أن $X_{t-1} \rightarrow \infty$ فإن $e^{-X_{t-1}^2}$ تقترب من الصفر وبذلك يكون النموذج بالشكل الآتي:

$$X_t = f_1 X_{t-1} + f_2 X_{t-2} + Z_t \quad \dots(26)$$

وهو نموذج انحدار ذاتي خطي من الرتبة الثانية. فتكون المعادلة المميزة بالشكل

$$l^2 - f_1 l - f_2 = 0 \quad \dots(27)$$

2- عندما $X_{t-1} \rightarrow 0$ فإن $e^{-X_{t-1}^2} \rightarrow 1$ ، فتكون المعادلة المميزة للنموذج (26) هي

$$l^2 - (f_1 + p_1)l - (f_2 + p_2) = 0 \quad \dots(28)$$

حيث l_0 تشير إلى الجذور عندما $X_{t-1} \rightarrow 0$ وان l_∞ تشير إلى الجذور عندما $X_{t-1} \rightarrow \infty$

نفرض أن $l_0, \bar{l}_0$ وكذلك هما $l_\infty, \bar{l}_\infty$ الجذور المعقدة للمعادلة المميزة في كلتا الحالتين ونفرض أن مسار المعادلة (النموذج) يقترب من نقطة معينة x إذ أن شرط وجود النقطة المنفردة هو أن تكون

$$0 < (1 - \sum_{i=1}^2 f_i) / \sum_{i=1}^2 p_i < 1 \quad \dots(29)$$

بالتالي فإن قيمة x تحسب من العلاقة الآتية:

$$x = \pm \sqrt{-\ln \left\{ (1 - \sum_{i=1}^2 f_i) / \sum_{i=1}^2 p_i \right\}} \quad \dots(30)$$

وان x هي النقطة المنفردة. وبعد أن نحدد النقطة المنفردة نحاول اختبار فيما إذا كانت النقطة المنفردة مستقرة أم لا وذلك بإتباع الخطوات الآتية:

لتكن $X_t = x + x_t$ حيث x صغيرة، وبالتعويض بالنموذج بحيث نعوض عن X_{t-2}, X_{t-1} بـ $x + x_{t-1}$ و $x + x_{t-2}$ على التوالي نحصل على:

$$x_t = h_1 x_{t-1} + h_2 x_{t-2} \quad \dots (31)$$

حيث

$$h_1 = (p_1 + f_1 p_2 - f_2 p_1) / \sum_{i=1}^2 p_i - 2(1 - \sum_{i=1}^2 f_i) \ln \left\{ (1 - \sum_{i=1}^2 f_i) / \sum_{i=1}^2 p_i \right\} \quad \dots (32)$$

$$h_2 = (p_2 + f_2 p_1 - f_1 p_2) / \sum_{i=1}^2 p_i \quad \dots (33)$$

النقطة المنفردة تكون مستقرة إذا وفقط إذا كانت جذور المعادلة المميزة

$$l^2 - h_1 l - h_2 = 0 \quad \dots (34)$$

تقع داخل دائرة الوحدة، لاحظ (Ozaki (85) [12].

4- الجانب التطبيقي:

تم في هذا البحث دراسة السلسلة الزمنية للمعدلات الشهرية لدرجات الحرارة في مدينة بيجي (شكل - 1). وتم إيجاد نماذج مختلفة لهذه السلسلة وبالاعتماد على المراحل الأساسية الثلاثة لطريقة (Box-Jenkins) في التحليل والنمذجة والمتمثلة بالتشخيص Identification والتخمين Estimation واختبار وملائمة النموذج المشخص Diagnostic checking. (لاحظ [4]) وقد تم بناء نماذج مختلفة للسلسلة أعلاه حيث لوحظ أن السلسلة دوريه تعيد نفسها كل (12) شهر تقريباً. ولزيادة في التفاصيل لاحظ [1] والنماذج التي حصلنا عليها كالآتي:

1-4 النموذج التوافقي مضافاً له حد الخطأ:

بالاعتماد على البرنامج الجاهز Statistica تم نمذجة السلسلة بالنموذج التوافقي الآتي:

$$X_t = -14.7254 \cos(0.08333 * t) - 2.19991 \sin(0.08333 * t) + Z_t \quad \dots (35)$$

$$s_z^2 = 227.1697$$

$$NBIC = 5.458398$$

$$NBIC = \frac{BIC}{n} \quad \text{إذ أن } n \text{ عدد البيانات.}$$

2-4 نموذج الطيف المختلط الخطي:

تم بناء نموذج طيف مختلط خطي (Mixed Spectra (Linear وباستعمال برنامج فورتران (Fortran 90) حصلنا على النموذج الآتي (لاحظ [1]):

$$X_t = -12.7254 \cos(0.08333 * t) - 2.19991 \sin(0.08333 * t) + 0.0595 X_{t-1} + Z_t \quad \dots (36)$$

$$s_z^2 = 179.8894$$

$$NBIC = 5.209079$$

3-4 نموذج الطيف المختلط غير الخطي:

على الرغم من أن تباين البواقي لنموذج الطيف المختلط الخطي أقل من تباين البواقي للنموذج التوافقي لكن البواقي مترابطة فهناك محاولة لتحسين النموذج . لذلك تم استعمال نموذج الطيف المختلط غير الخطي، وباستعمال برنامج فورتران (Fortran 90) . حصلنا على النموذج الآتي لاحظ (ملحق (1))

$$X_t = -12.7254 \cos(0.08333 * t) - 2.19991 \sin(0.08333 * t) + 0.10747 X_{t-1} + 0.02178 X_{t-1}^2 + Z_t \quad \dots(37)$$

$$s_z^2 = 99.38671$$

$$NBIC = 4.615749$$

4-4 نموذج الانحدار الذاتي والأوساط المتحركة المندمج (المضاعف) الموسمي

SARIMA (1,0,0)(2,0,0)s

بالعودة إلى الوصف البياني للسلسلة وبعد اخذ اللوغارتم الطبيعي للبيانات والفرق الموسمي (12) لان السلسلة تعيد نفسها كل (12) شهر وباستخدام البرنامج الجاهز Statistica حصلنا على النموذج الآتي: SARIMA(1,0,0)(2,0,0)s والذي يكتب بالشكل:

$$X_t = f_1 X_{t-1} + f_{1s} X_{t-1} + f_{2s} X_{t-1} + Z_t \quad \dots(38)$$

والجدول الآتي يمثل النماذج التي حصلنا عليها مع الصفات الإحصائية لها.

جدول رقم (1). جدول مقارنة بين النماذج المقترحة

النموذج \ stat	NBIC	rss	Corr. %	mean
Harmonic Model	5.458398	227.1697	80%	28.60514
Linear mixed spectral model	5.209079	179.8894	80%	25.34633
Non-Linear mixed spectral model	4.615749	99.38671	80%	2.682353
SARIMA (1,0,0)(2,0,0) _s	-3.1048	0.042688	0%	0.01959

ومن الجدول رقم (1) نلاحظ أن بواقي النماذج مترابطة بشكل كبير والتباين (rss) والوسط للبواقي كبير أيضا باستثناء النموذج الموسمي الذي تكون بواقيه غير مترابطة وتباين البواقي والوسط قريب جداً من الصفر مما يشير تفوق النموذج الموسمي SARIMA (1,0,0)(2,0,0)₁₂ على بعض النماذج. لذلك يمكن استخدامه لتمثيل السلسلة على الرغم من أن بواقيه لا تتبع التوزيع الطبيعي.

5-4 التكهّن Forecasting

سنحاول التنبؤ بالقيم المستقبلية للمعدلات الشهرية لدرجات الحرارة العظمى ولفترة (12) شهراً. وباستعمال طريقة بوكس - جنكز في التنبؤ وباستعمال البرنامج الجاهز Statistica الذي يستخدم طريقة التحويل المباشرة في التنبؤ تم التنبؤ بالقيم المستقبلية لعام (2000)، وبالاتماد على النموذج المقترح

SARIMA(1,0,0)(2,0,0)₁₂. والجدول الآتي جدول رقم (2) يمثل مقارنة بين القيم المتنبأ بها والقيم الحقيقية.

الجدول رقم (2). جدول مقارنة بين القيم المتنبأ بها من النموذج المقترح والقيم الحقيقية

ت	شهرًا 12 القيمة الحقيقية	شهرًا 12 القيمة المتكهن بها لمدة
1	13.5	14.7505
2	18.5	16.8046
3	20.6	19.3804
4	29.7	23.8972
5	35.1	27.8980
6	40.8	31.8662
7	46.6	32.7701
8	44.4	32.8978
9	38.2	28.6208
10	30.2	25.3720
11	22.9	20.2003
12	15.8	16.4487

من الجدول نلاحظ أن القيم المتنبأ بها لفترة 12 شهرًا من النموذج الموسمي المضاعف هي قريبة نوعاً ما من القيم الحقيقية وذات صفات دورية مما يشير إلى كفاءة النموذج المقترح والذي يمثل النموذج الملائم لسلسلة المعدلات الشهرية لدرجات الحرارة العظمى لمدينة بيجي.

6-4 استقرارية النماذج المدروسة:

1-6-4 النموذج التوافقي مضافاً له حد الخطأ:

من ملاحظة الفقرة (1-4) وجدنا أن القيمة المتوقعة والتباين والتغاير كميات ثابتة لا تعتمد على الزمن . مما يشير إلى أن النموذج التوافقي مستقر وفي التطبيق:

$$f(f_j) = \frac{1}{2p}, j = 1, 2, 3, \dots, m$$

$$a_j = \sqrt{A_j^2 + B_j^2} = \sqrt{(-14.7254)^2 + (-2.19991)^2} = \sqrt{221.677}$$

$$g_0 = \sum_{j=1}^m \frac{a_j^2}{2} + s_z^2 = \sum_{j=1}^m \frac{(\sqrt{221.677})^2}{2} + s_z^2 = 110.8385 + 227.1697 = 338.0082$$

$$g_r = \sum_{j=1}^m \frac{a_j^2}{2} [\cos(W_j r)] = \sum_{j=1}^m \frac{(\sqrt{221.677})^2}{2} [\cos(0.08333 * r)]$$

$$= \sum_{j=1}^m 110.8385 * [\cos(0.08333 * r)]$$

$$r_r = \frac{g_r}{g_0} = \frac{\sum_{j=1}^m a_j^2 [\cos(W_j r)]}{\sum_{j=1}^m a_j^2 + 2s_z^2} = \frac{\sum_{j=1}^m (\sqrt{221.677})^2 [\cos(0.08333*r)]}{(\sqrt{221.677})^2 + 2*227.1697}$$

$$= \frac{221.677*\cos(0.08333*r)}{676.0164} = 0.327917*\cos(0.08333*r)$$

2-6-4 نموذج الطيف المختلط الخطي:

لاحظنا أنّ نموذج الطيف المختلط الخطي من الفقرة (2-4) مستقر لان العزوم لا يعتمد على t ، وفي التطبيق حصلنا على:

$$1) f(f_j) = \frac{1}{2p}$$

$$a = \sqrt{a_1 + a_2} = \sqrt{(-12.7254)^2 + (-2.19991)^2} = \sqrt{221.677}$$

$$2) g_0 = \frac{a^2 + 2s_z^2}{2(1-b^2)} = \frac{(\sqrt{221.677})^2 + 2*179.8894}{2(1-(0.0595)^2)} = \frac{616.6704}{1.99292} = 309.4307$$

$$g_k = \frac{a^2(\cos(0.08333*k))}{2(1-b^2)}$$

$$3) g_k = \frac{221.677*(\cos(2pwk))}{1.99292} = 111.2323*(\cos(0.08333*2pk))$$

$$4) r_k = \frac{a^2(\cos(2pwk))}{a^2 + 2s_z^2} = \frac{221.677*(\cos(0.08333*k))}{221.677 + 2*197.4967}$$

$$= 0.359474*(\cos(0.08333*k))$$

نلاحظ أن العزوم لا تعتمد على t مما يشير أن النموذج مستقر.

3-6-4 نموذج الطيف المختلط غير الخطي:

بما أنّ النقطة الثابتة التي تم إيجادها لاحظ الفقرة (3-4)

$$x = \frac{1-b_1}{b_2}$$

ويكون هذا النموذج مستقرا إذا وفقط إذا

$$1 < b_1 < 3$$

نموذج الطيف المختلط غير الخطي يمكن التعبير عنه بالشكل

$$X_t = a \cos(2pwt + f) + b_1 X_{t-1} + b_2 X_{t-1}^2 + Z_t$$

ويمكن أن يعبر عنه بالشكل

$$X_t = m + a \cos(2pwt + f) + b_1 X_{t-1} + b_2 X_{t-1}^2 + Z_t$$

والنموذج الذي حصلنا عليه لتمثيل سلسلة المعدلات الشهرية لدرجات الحرارة لمدينة بجي هو

$$X_t = -12.7254\cos(0.08333*t) - 2.19991\sin(0.08333*t) +$$

$$0.10747X_{t-1} + 0.02178X_{t-1}^2 + Z_t$$

أي أن $b_1 = 0.107$ و $b_2 = 0.02178$ وعليه تكون النقطة المنفردة هي

$$x = \frac{1 - 0.107}{0.02178} = 41$$

وعند اختبار استقرارية النقطة المنفردة وملاحظة المعادلة (22) حيث أن شرط الاستقرارية هو

$$1 < b_1 < 3$$

ومن النموذج أعلاه نجد أن $b_1 = 0.107$ وهذه لا تحقق شرط استقرارية النموذج أي أن النموذج غير مستقر.

4-6-4 النموذج الموسمي:

النموذج المقترح هو $SARIMA(1,0,0)(2,0,0)_{12}$ بعد اخذ اللوغارتم الطبيعي للبيانات الأصلية أي أن $Y_t = \ln(X_t)$ ، الجزء غير الموسمي يمثل بـ:

$$f_p(B) = 1 - f_1 B$$

والجزء الموسمي ممثل

$$f_{ps}(B) = 1 - f_{1s} B^s - f_{2s} B^{2s}$$

وان $S = 12$

$$f_1 = 0.9797$$

$$f_{1s} = 0.4274$$

$$f_{2s} = 0.3422$$

يكون النموذج مستقرا إذا كانت جذور المعادلة المميزة لنموذج الانحدار غير الموسمي من الرتبة الأولى تقع داخل دائرة الوحدة. أي أن شرط الاستقرارية هو $|l_i| < 1$ وباستخدام المعادلة المميزة للجزء غير الموسمي:

$$f_p(B) = 0$$

أي

$$l - 0.9797 = 0$$

$$l = 0.9797$$

إذ نلاحظ أن $|l| < 1$

مما يشير إلى أن الجزء غير الموسمي مستقر وبما أن معالم نموذج الانحدار الذاتي الموسمي $(2,0,0)_{12}$ هي

$$f_{1s} = 0.4274$$

$$f_{2s} = 0.3422$$

$$l^2 - 0.4274 l - 0.3422 = 0$$

وعليه تكون الجذور هي:

$$l_1 = -0.2137 - 0.5446i$$

$$l_2 = -0.2137 + 0.5446i$$

$$|l_1| = 0.585$$

$$|l_2| = 0.585$$

وبما أن جذور المعادلة المميزة للجزء الموسمي وكذلك جذور المعادلة المميزة للجزء غير الموسمي تقع داخل دائرة الوحدة، مما يشير إلى أن النموذج $SARIMA(1,0,0)(2,0,0)_{12}$ هو نموذج مستقر.

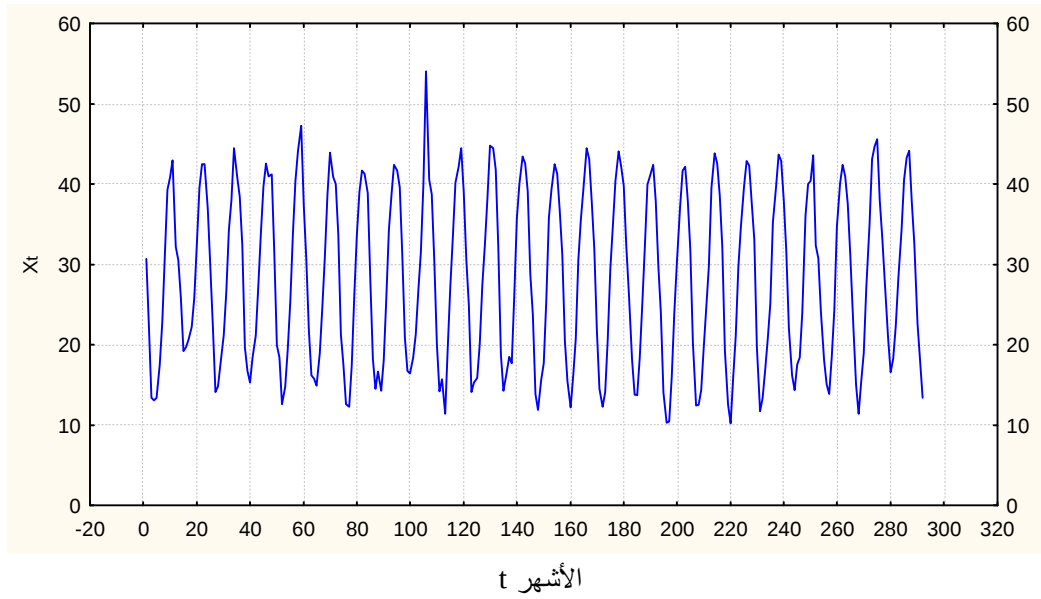
5- الاستنتاجات والتوصيات

من خلال هذه الدراسة توصلنا إلى الاستنتاجات الآتية:

- 1- النماذج التوافقية هي نماذج مستقرة.
 - 2- إن نموذج الطيف المختلط الخطي نموذج مستقر أيضا باعتباره حاصل جمع نموذجين مستقلين نموذج توافق ونموذج خطي.
 - 3- نموذج الطيف المختلط غير الخطي هو حاصل جمع نموذجين (توافقي + نموذج غير خطي) وقد وجدنا أن شرط الاستقرار لهذا النموذج هو $1 < b_1 < 3$
 - 5- إن النموذج الموسمي المضاعف من الرتبة $SARIMA(1,0,0)(2,0,0)_{12}$ هو النموذج الملائم للسلسلة الزمنية لدرجات الحرارة العظمى في مدينة بججي وقد أعطى تقديرات جيدة (للتبوء بالقيم المستقبلية) وقريبة من قيم الواقع الفعلي.
- ونوصي بإجراء دراسة متكاملة لنماذج طيف مختلط غير خطي، بحيث يكون الجزء غير الخطي هو نموذج أسي أو نموذج عتبة وبرتب عليا.

المصادر

- [1] الحمداني، رعد عواد حميد (2008) "استقرارية بعض نماذج السلاسل الزمنية مع تطبيقاتها" رسالة ماجستير غير منشورة، قسم الرياضيات كلية التربية، جامعة تكريت.
- [2] الحياي، أزهى عباس محمد (2005) "استقرارية بعض نماذج الانحدار الذاتي اللاخطية" أطروحة دكتوراه غير منشورة مقدمة إلى كلية التربية، جامعة تكريت.
- [3] العبيدي، عبد الغفور جاسم، (1989) "تحليل ونمذجة السلسلة الزمنية لدرجات الحرارة في مدينة الموصل" رسالة ماجستير غير منشورة، قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة الموصل.
- [4] العبيدي، عبد الغفور جاسم، وفاء محي الدين (2003) "نموذج السلسلة الزمنية للمعدلات الشهرية لدرجات الحرارة في مدينة كركوك" مجلة تكريت للعلوم، مجلد 9 ، عدد 1-.
- [5] المهداوي، هيفاء جعفر، (1991) "الانحدار الذاتي غير المستقر ذو الدرجات الدنيا"، أطروحة دكتوراه غير منشورة، كلية الإدارة والاقتصاد، الجامعة المستنصرية.
- [6] Bloomfield, P. (1976), "Fourier Analysis of Time series: An Introduction. John Wiley and son Inc. New York.
- [7] Chatfield (1978) "The analysis of time series: Theory Practice" Chapman and Hall, London .
- [8] Chatfield, Christopher.(1984) "The analysis of time series : 4th Edition Chapman and Hall.
- [9] Friedrick, I. and Kurt Hornik, (1999) "stationarity and stability of Autoregressive Neural Network processes". MIT Prss,Cambridge, MA,USA
- [10] Giovanni Fonseca (2004) "On the Stationarity of first order non linear & time series Models: Some Developments" studies in Non linear Dynamics Econometrics: Vol 8: No. 2, Article 12.
- [11] Ozaki,T.(1982) "Non linear time series stochastic processes and Dynamical system" Handbook of statistics,Vol.5,Itld.
- [12] Ozaki, T.(1985) "Non linear time series models and Dynamical system" E.J. Hannan, P.R. Krishnaiah, M, M.Rao, eds., Handbook of statistics, Vol.5, pp25-83.
- [13] Priestley, M.B.(1982) "Spectral Analysis and time series", Academic press, Inc., London.
- [14] Priestly, M.B.(1988) "Non linear and stationary time series analysis": Academic. Press London.
- [15] Tong .H. (1990) "Non linear Time series; A Dynamical system Approach". Oxford University Press, London.



الشكل (1). السلسلة الزمنية للمعدلات الشهرية لدرجات الحرارة في مدينة بجي