

متعددات حدود وينر للمسافة العرضية

لبينات مركبة بالصيغة $G_1 \boxtimes G_2$

علي عزيز علي أسماء صلاح عزيز

كلية علوم الحاسبات والرياضيات

جامعة الموصل

تاريخ استلام البحث: ٢٠٠٨/١٠/٢٨

تاريخ قبول البحث: ٢٣/ ١١/ ٢٠٠٨

ABSTRACT

For a connected vertex disjoint graphs G_1 and G_2 , we define $G_1 \boxtimes G_2$ as the graph obtained from the union of G_1 and G_2 with four edges joining the vertices of an edge of G_1 to the vertices of an edge of G_2 . In this paper we obtain Wiener polynomials of the width distance-2 for $K_s \boxtimes K_t$, $K_s \boxtimes C_t$ and $C_s \boxtimes C_t$. The Wiener index of each such composite graph is also obtained.

الملخص

إذا كان G_1 و G_2 بيانيين متصلين ومنفصلين عن بعضهما فإن $G_1 \boxtimes G_2$ هو بيان مكون من اتحاد G_1 و G_2 مع أربع حافات تصل رأسي حافة في G_1 مع رأسي حافة في G_2 . تضمن هذا البحث إيجاد متعددة حدود وينر للمسافة العرضية-2 للبيان $G_1 \boxtimes G_2$ عندما يكون البيانان G_1 و G_2 تامين أو دارتين أو أحدهما دائرة والأخر بيان تام. كما تضمن إيجاد دليل وينر نسبة للمسافة العرضية-2 لهذه البيانات.

1. المقدمة

للتعرف على بعض مفاهيم نظرية البيان التي وردت في هذا البحث نشير إلى المصدرين [3,4] وللتعرف على مفهوم متعددة حدود وينر ودليل وينر نشير إلى المصدرين [5,6] وأخيراً للاطلاع على موضوع المسافة العرضية ومتعددة حدود وينر لهذه المسافة نشير إلى المصادر [1,2, 7].

تعرف متعددة حدود وينر W_w نسبة إلى دالة المسافة العرضية d_w لبيان $G=(V,E)$ بالصيغة:

$$W_w(G; x) = \sum_{u,v \in V} x^{d_w(u,v)} \quad \dots(1.1)$$

وإذا كان $C_w(G,k)$ يمثل عدد الأزواج غير المرتبة للرؤوس التي المسافة العرضية w بينها تساوي k ، فإن

$$W_w(G; x) = \sum_{k \geq 2}^{\delta_w} C_w(G, k) x^k \quad \dots(1.2)$$

حيث أن δ_w هو قطر G نسبة للمسافة العرضية w . لاحظ أنه عندما يكون $w \geq 2$ فإن المسافة العرضية w لا تقل عن 2.

واضح أنه يمكن أن نحصل على دليل وينر نسبة للمسافة العرضية w ، والذي نرمز له $W_w(G)$ من الصيغة الآتية [2]:

$$W_w(G) = \frac{d}{dx} W_w(G; x) \Big|_{x=1} = \sum_{k \geq 2}^{\delta_w} k C_w(G, k) \quad \dots(1.3)$$

تعريف: ليكن G_1 و G_2 بيانين متصلين ومنفصلين عن بعضهما بالنسبة للرؤوس. وليكن $u_1 v_1 \in E(G_1)$ و $u_2 v_2 \in E(G_2)$ فإن **البيان المركب** $G_1 \text{ T } G_2$ هو البيان المكون من إتحاد G_1 و G_2 مع الحافات $u_1 v_2, u_1 u_2, v_1 v_2, v_1 u_2$.

من الواضح أن عامل الاتصال [4] للبيان $G_1 \text{ S } G_2$ لا يزيد على ٢. وإذا كان عامل الاتصال لكل من G_1 و G_2 لا يقل عن ٢ فإن عامل الاتصال لـ $G_1 \text{ S } G_2$ هو ٢.

سوف نجد متعددة حدود وينر بالمسافة العرضية -2 لكل من البيانات المركبة $K_s \text{ S } K_t$, ونحسب دليل وينر للمسافة العرضية -2 لكل من هذه البيانات المركبة.

2. البيان المركب $K_s \text{ S } K_t$:

واضح أن رتبة $K_s \text{ S } K_t$ هي $s+t$ وان حجمه $(s^2 + t^2 - s - t + 8)/2$ وان عامل الاتصال هو 2. نجد متعددة حدود وينر للمسافة العرضية -٢.

عبارة 2.1: ليكن $t, s \geq 2$ فإن متعددة حدود وينر للمسافة العرضية -٢ للبيان $K_s \text{ S } K_t$ هي:

$$W_2(K_s \text{ S } K_t; x) = \frac{1}{2} [(s-1)(s+4) + (t-1)(t+4)]x^2 + (s-2)(t-2)x^3$$

البرهان: ليكن $u_1 v_1 \in E(K_s)$ و $u_2 v_2 \in E(K_t)$ وأن

$$E(K_s \text{ S } K_t) = E(K_s) \cup E(K_t) \cup \{u_1 u_2, v_1 v_2, u_1 v_2, u_2 v_1\}$$

ليكن $u, v \in V(K_s \text{ S } K_t)$ فإن:

$$d_2(u, v) = 2, \quad \forall u, v \in V(K_s) \quad \dots(2.1)$$

كذلك

$$d_2(u, v) = 2, \quad \forall u, v \in V(K_t) \quad \dots(2.2)$$

عدد أزواج الرؤوس للعلاقيتين (2.1) و (2.2) هو $(s^2 + t^2 - s - t)/2$.

إذا كان $u \in V(K_s) - \{u_1, v_1\}$ و $v \in V(K_t) - \{u_2, v_2\}$ فإنه توجد حاوية صغرى $C(u, v)$ مكونة من

الدريين (u, v_1, v_2, v) و (u, u_1, u_2, v) ، وعليه يكون

$$d_2(u, v) = 3 \quad \dots(2.3)$$

وعدد أزواج الرؤوس لهذه الحالة هو $(t-2)(s-2)$.

كما نلاحظ أن

$$d_2(u_1, v) = d_2(v_1, v) = 2, \quad \forall v \in V(K_t) \quad \dots(2.4)$$

وبالمثل فإن

$$d_2(u_2, v) = d_2(v_2, v) = 2, \quad \forall v \in V(K_s) - \{u_1, v_1\} \quad \dots(2.5)$$

وأن عدد أزواج الرؤوس التي تحقق العلاقة (2.4) هو $2t$ والتي تحقق (2.5) يساوي $2(s-2)$.

ومن العلاقات (2.1)-(2.5) وأعداد أزواج الرؤوس التي تحققها نحصل على

$$C_2(K_s \text{ S } K_t, 2) = [(s-1)(s+4) + (t-1)(t+4)]/2$$

$$C_2(K_s \mathbf{S} K_t, 3) = (s-2)(t-2)$$

وبهذا يتم البرهان. #

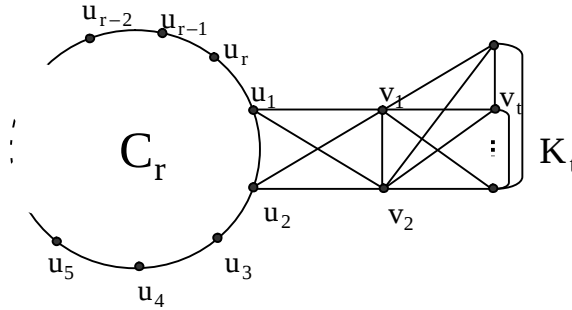
النتيجة الآتية مباشرة من العبارة 2.1

نتيجة 2.2: دليل وينر للمسافة العرضية-٢ للبيان المركب $K_s \mathbf{S} K_t$ هو:

$$W_2(K_s \mathbf{S} K_t) = (s-1)(s+4) + (t-1)(t+4) + 3(s-2)(t-2). \quad \#$$

3. البيان المركب $C_r \mathbf{S} K_t$:

ليكن K_t بيانا تاما برتبة t حيث $t \geq 3$ وليكن $v_1 v_2 \in E(K_t)$ ، كما نفرض أن C_r هي دائرة برتبة r حيث $r \geq 4$ وأن $u_1 u_2 \in E(C_r)$. عليه يكون البيان $C_r \mathbf{S} K_t$ برتبة $r+t$ وحجم $(r+t(t-1)/2+4)$ والشكل التالي يوضح البيان المركب $C_r \mathbf{S} K_t$.



الشكل 3.1 البيان $C_r \mathbf{S} K_t$

عبارة 3.1: متعددة حدود وينر للمسافة العرضية-٢ للبيان $C_r \mathbf{S} K_t$ هي:

$$W_2(C_r \mathbf{S} K_t; x) = \begin{cases} [(t/2)(t+3)+1]x^2 + (r+2)x^{(r+1)/2} - (t-2)x^{(r+3)/2} - x^{r-1} \\ \quad - (r+4)x^r + (2t+r) \sum_{k=(r+3)/2}^r x^k, & \text{عندما } r \text{ فردي, } r, t \geq 3, \\ [(t/2)(t+3)+1]x^2 + (r/2)x^{r/2} + (r+4)(x^{r/2+1} - x^r) \\ \quad - x^{r-1} + (2t+r) \sum_{k=r/2+2}^r x^k, & \text{عندما } r \text{ زوجي, } r \geq 4, t \geq 3, \end{cases}$$

البرهان: لأجل التبسيط سوف نرمز للبيان $C_r \mathbf{S} K_t$ بالحرف $\bar{G}$. من الشكل 3.1 نجد أن:

$$d_2(u, v) = 2, \quad \forall u, v \in V(K_t)$$

عدد أزواج الرؤوس لهذه الحالة هو $t(t-1)/2$. إذا

$$g_1(x) = \sum_{u, v \in V(K_t)} x^{d_2(u, v)} = t(t-1)x^2/2$$

كما نجد أن لكل رأسين مختلفين $u, v \in V(C_r)$ باستثناء الزوج $\{u_1, u_2\}$ ، فإن:

$$d_2(u, v|\bar{G}) = d_2(u, v|C_r)$$

فضلا عن أن

$$d_2(u_1, u_2) = 2$$

ويمكن أن نعبر عن ذلك بمتعددة الحدود الجزئية الآتية:

$$g_2(x) = \sum_{u,v \in V(C_r)} x^{d_2(u,v)} = W_2(C_r; x) - x^{r-1} + x^2$$

كما نلاحظ من الشكل 3.1 أن

$$d_2(u_1, v) = d_2(u_2, v) = 2, \quad \forall v \in V(K_t)$$

عدد أزواج الرؤوس التي تحقق ذلك هو $2t$. عليه

$$g_3(x) = \sum_{v \in V(K_t)} (x^{d_2(u_1, v)} + x^{d_2(u_2, v)}) = 2t x^2$$

نفرض أن $A = V(C_r) - \{u_1, u_2\}$. تكون المسافة العرضية-2 لكل رأس $u \in A$ ، نسبة لأي من الرأسين v_1 و v_2 كالآتي:

$$d_2(v_2, u | \bar{G}) = d_2(v_2, u | C_{r+1})$$

$$d_2(v_1, u | \bar{G}) = d_2(v_1, u | C_{r+1})$$

من هاتين العلاقتين نحصل على الدالة $g_4(x)$ وهي:

$$g_4(x) = \sum_{u \in A} (x^{d_2(v_1, u)} + x^{d_2(v_2, u)}) = 2W(v_1, C_{r+1}; x) - 4x^r$$

والآن نفرض أن $B = V(K_t) - \{v_1, v_2\}$ ، وليكن $v \in B$ نلاحظ أن

$$d_2(u, v | \bar{G}) = d_2(u, v | C_{r+3}), \quad \forall u \in A$$

عندئذ نحصل على العلاقة الآتية لرأس معين $v \in B$

$$\sum_{u \in A} x^{d_2(u, v)} = W_2(v, C_{r+3}; x) - 2x^{r+2} - 2x^{r+1}$$

ولما كان $|B| = (t-2)$ لذا نأخذ المجموع لكل v فنحصل على:

$$g_5(x) = \sum_{v \in B, u \in A} x^{d_2(u, v)} = (t-2)[W_2(v, C_{r+3}; x)] - 2(t-2)(x^{r+1} + x^{r+2})$$

ومما تقدم نستنتج أن

$$W_2(\bar{G}; x) = \sum_{i=1}^5 g_i(x) = [(t/2)(t+3)+1]x^2 - x^{r-1}[1+4x+2(t-2)(x^2+x^3)] \\ + W_2(C_r; x) + 2W_2(v_1, C_{r+1}; x) + (t-2)W_2(v, C_{r+3}; x)$$

وبما أن [1]

$$W_2(C_r; x) = \begin{cases} r \sum_{i=(r+1)/2}^{r-1} x^i, & \text{عندما } r \text{ فردي} \\ r \sum_{i=r/2+1}^{r-1} x^i + \frac{r}{2} x^{r/2}, & \text{عندما } r \text{ زوجي} \end{cases}$$

وأن

$$W_2(v, C_k; x) = \frac{2}{k} W_2(C_k; x)$$

حيث $k = (r+1)$ أو $(r+3)$.

وبعد التعويض وإجراء بعض التبسيط نحصل على متعددة الحدود كما هي معطاة في نص المبرهنة. #

نتيجة 3.2: دليل وينر للمسافة العرضية-٢ للبيان $C_r \mathbf{S} K_t$ هو:

$$W_2(C_r \mathbf{S} K_t) = \begin{cases} t(t + \frac{3}{4}) + \frac{r}{2}(\frac{3}{4}r^2 - r - \frac{23}{4}) + \frac{tr}{2}(\frac{3r}{2} - 1) + 7, & \text{عندما } r \text{ فردي, } r, t \geq 3 \\ t(t+1) + r(\frac{3}{8}r^2 - \frac{r}{2} - 3) + \frac{tr}{2}(\frac{3r}{2} - 1) + 7, & \text{عندما } r \text{ زوجي, } r \geq 4, t \geq 3 \end{cases}$$

#

4. البيان المركب $C_s \mathbf{S} C_t$

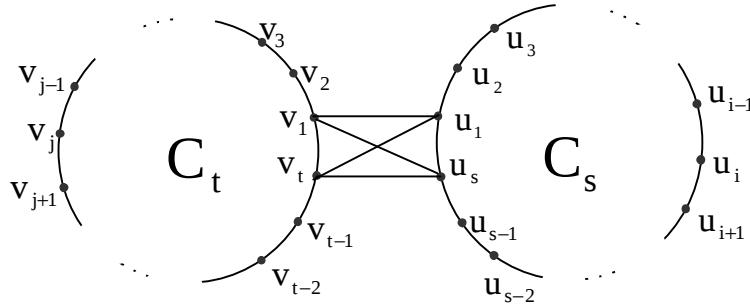
لتكن C_s و C_t دارتين منفصلتين وان

$$V(C_s) = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_s\}$$

$$V(C_t) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_t\}$$

البيان المركب $C_s \mathbf{S} C_t$ يتكون من اتحاد C_s و C_t مع الحافات $\{u_1v_1, u_1v_t, u_sv_1, u_sv_t\}$

كما موضح في الشكل 4. 1



الشكل 4. 1 بيان $C_s \mathbf{S} C_t$

ليكن $6 \leq s \leq t$ ، لإيجاد متعددة حدود وينر للمسافة العرضية-٢ للبيان $C_s \mathbf{S} C_t$ نعالج الحالات الآتية:

(أولاً) ليكن s و t عددين زوجيين

بالنسبة لأزواج الرؤوس لدينا الحالات الآتية:

(1) إذا كان u و v أي رأسين في C_s باستثناء الزوج $\{u_1, u_s\}$ ، فإن

$$d_2(u, v | C_s \mathbf{S} C_t) = d_2(u, v | C_s)$$

وان

$$d_2(u_1, u_s | C_s \mathbf{S} C_t) = 2, \quad d_2(u_1, u_s | C_s) = s - 1$$

وعليه

$$F_1(x) = \sum_{u, v \in V(C_s)} x^{d_2(u, v)} = W_2(C_s; x) + x^2 - x^{s-1}$$

(2) بالمثل نحصل على

$$F_2(x) = \sum_{u,v \in V(C_t)} x^{d_2(u,v)} = W_2(C_t; x) + x^2 - x^{t-1}$$

(3) نلاحظ من الشكل 4.1 أن

$$d_2(u_s, v_1) = d_2(u_1, v_t) = d_2(u_s, v_t) = d_2(u_1, v_1) = 2$$

وهذا يؤدي إلى

$$F_3(x) = 4x^2$$

(4) نلاحظ انه لكل $u_i \in V(C_s)$ حيث $2 \leq i \leq s/2$ ولكل $v_j \in V(C_t)$ حيث $2 \leq j \leq t/2$. فان الحاوية $C(u_i, v_j)$ ذات اصغر طول تتكون من الدربين الآتيين

$$P_1 : u_i, u_{i-1}, u_{i-2}, \dots, u_1, v_t, v_{t-1}, v_{t-2}, \dots, v_j$$

$$P_2 : u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_s, v_1, v_2, v_3, \dots, v_j$$

إذاً

$$l(P_1) = t + i - j, \quad l(P_2) = s + j - i$$

وهذا يؤدي إلى أن

$$d_2(u_i, v_j) = \max \{t + i - j, s + j - i\}$$

حيث $2 \leq i \leq s/2$ و $2 \leq j \leq t/2$

إذا كان $s + j - i \leq t + i - j$ ، فان $2 \leq j \leq \frac{\alpha}{2} + i$ ، حيث أن $\alpha = t - s$

هذه العلاقة تعطي قيم j التي تجعل المسافة العرضية

$$d_2(u_i, v_j) = l(P_1) = t + i - j$$

ولبقية القيم لـ j أي $\alpha/2 + i + 1 \leq j \leq t/2$ فان المسافة العرضية-2 هي

$$d_2(u_i, v_j) = s + j - i, \quad i \neq s/2$$

ومن هنا نحصل على العلاقة الآتية:

$$\sum_{j=2}^{t/2} x^{d_2(u_i, v_j)} = \sum_{j=2}^{(\alpha/2)+i} x^{t+i-j} + \sum_{j=(\alpha/2)+i+1}^{t/2} x^{s+j-i}$$

هذه العلاقة صحيحة لكل رأس u_i حيث $2 \leq i \leq s/2 - 1$ أما لـ $i = s/2$ فان المجموع الثاني

$$\sum_{j=(\alpha/2)+i+1}^{t/2} x^{s+j-i} \text{ يكون صفراً.}$$

وبأخذ المجموع لهذه العلاقة لقيم i المذكورة نحصل على:

$$\sum_{i=2}^{s/2} \sum_{j=2}^{t/2} x^{d_2(u_i, v_j)} = \sum_{i=2}^{s/2-1} \left(\sum_{j=2}^{\alpha/2+i} x^{t+i-j} + \sum_{j=(\alpha/2)+i+1}^{t/2} x^{s+j-i} \right) + \sum_{j=2}^{t/2} x^{t+(s/2)-j} \quad \dots (4.1)$$

وبهذا وجدت متعددة الحدود للرؤوس u_i ، $2 \leq i \leq s/2$ ، مع الرؤوس v_j ، $2 \leq j \leq t/2$ وهي متعددة الحدود

ذاتها للرؤوس u_i ، $2 \leq i \leq s/2$ ، مع الرؤوس v_j ، $t/2 + 1 \leq j \leq t - 1$. أي نضرب العلاقة (4.1) بالعدد 2.

كما أنه وبعد أن وجدنا متعددة الحدود للرؤوس في نصف الدارة الأولى C_s نسبة إلى كل رؤوس الدارة الثانية C_t عدا v_1, v_t وبمجرد النظر إلى البيان يتأكد لنا أن الرؤوس في النصف الثاني من الدارة الأولى C_s أي الرؤوس u_i ، $s/2+1 \leq i \leq s-1$ لها العلاقة نفسها نسبة إلى رؤوس الدارة C_t كلها عدا v_1, v_t وبهذا سوف تضرب العلاقة (4. 1) بالعدد ٢ مرة أخرى. وعندها نحصل على

$$F_4(x) = \sum_{u \in U, v \in U'} x^{d_2(u,v)} = 4 \sum_{i=2}^{s/2-1} \left(\sum_{j=2}^{(a/2)+i} x^{t+i-j} + \sum_{j=(a/2)+i+1}^{t/2} x^{s+j-i} \right) + 4 \sum_{j=2}^{t/2} x^{t+(s/2)-j}$$

حيث $U' = V(C_t) - \{v_1, v_t\}$ و $U = V(C_s) - \{u_1, u_s\}$

(5) الان نجد المسافات العرضية-٢ لكل من الرأسين u_1 و u_s نسبة إلى v_j ، $2 \leq j \leq t-1$ ونلاحظ من الشكل 4.1 أن

$$d_2(u_1, v_j | C_s \text{ S } C_t) = d_2(u_1, v_j | C_{t+1})$$

وكذلك

$$d_2(u_s, v_j | C_s \text{ S } C_t) = d_2(u_s, v_j | C_{t+1})$$

وهذه تؤدي إلى متعددة الحدود

$$F_5(x) = 2 W_2(u_1, C_{t+1}; x) - 4x^t$$

(6) بالمثل المسافات العرضية-٢ لكل من الرأسين v_1 و v_t نسبة إلى الرؤوس u_i ، $2 \leq i \leq s-1$ نجد أن

$$d_2(v_1, u_i | C_s \text{ S } C_t) = d_2(v_1, u_i | C_{s+1})$$

$$d_2(v_t, u_i | C_s \text{ S } C_t) = d_2(v_t, u_i | C_{s+1})$$

وهذه تؤدي إلى متعددة الحدود

$$F_6(x) = 2 W_2(v_1, C_{s+1}; x) - 4x^s$$

واضح من الحالات (6) – (1) أن

$$W_2(C_s \text{ S } C_t; x) = \sum_{k=1}^6 F_k(x)$$

وبالتعويض عن $W_2(u_1, C_{t+1}; x)$ ، $W_2(v_1, C_{s+1}; x)$ ، $W_2(C_s; x)$ ، $W_2(C_t; x)$ وبالتبسيط نحصل على المبرهنة الآتية:

مبرهنة 4. 1: إذا كان s و t عددين زوجين وكان $6 \leq s \leq t$ فان :

$$W_2(C_s \text{ S } C_t; x) = 6x^2 + s/2 x^{s/2} + t/2 x^{t/2} - x^{s-1} - x^{t-1} + (s+4) \sum_{k=s/2+1}^{s-1} x^k + (t+4) \sum_{k=t/2+1}^{t-1} x^k \\ + 4 \sum_{k=(s+t)/2}^{t+s/2-2} x^k + 4 \sum_{i=2}^{s/2-1} \left(\sum_{j=2}^{(a/2)+i} x^{t+i-j} + \sum_{j=(a/2)+i+1}^{t/2} x^{s+j-i} \right) \cdot \#$$

ملاحظة : الحالات الجزئية (1) ، (2) ، (3) ، (5) ، (6) عندما يكون كل من s و t زوجياً تصح أيضاً في الحالات الأخرى لكل من s و t . أما الحالة الجزئية (4) فهي تختلف عنها عندما يكون s و t فردين أو أحدهما فردي والاخر زوجي، وهذه سوف تعالج فيما يأتي (ثانياً) و (ثالثاً) و (رابعاً).

(ثانياً) ليكن s و t عددين فرديين وأن $7 \leq s \leq t$:

كما ذكرنا فإن اختلاف هذه الحالة عن الحالة (أولاً) عندما يكون s و t زوجيان هو في الفقرة (4) منها وفيها نلاحظ أن لكل $u_i \in V(C_s)$ ، $2 \leq i \leq \frac{s-1}{2}$ ، ولكل $v_j \in V(C_t)$ ، $2 \leq j \leq \frac{t-1}{2}$ ، فإن الحاوية $C(u_i, v_j)$ ذات اصغر طول تتكون من الدريين

$$P_1 : u_i, u_{i-1}, u_{i-2}, \dots, u_1, v_t, v_{t-1}, v_{t-2}, \dots, v_j$$

$$P_2 : u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_s, v_1, v_2, v_3, \dots, v_j$$

إذاً

$$I(P_1) = t + i - j, \quad I(P_2) = s + j - i$$

وبذلك فإن

$$d_2(u_i, v_j) = \max \{t + i - j, s + j - i\}, \quad 2 \leq i \leq (s-1)/2, \quad 2 \leq j \leq (t-1)/2$$

إذا كان $s + j - i \leq t + i - j$ ، فإن $2 \leq j \leq \frac{\alpha}{2} + i$ ، حيث أن $\alpha = t - s$ وهذه العلاقة تعطي قيم j التي تجعل المسافة العرضية.

$$d_2(u_i, v_j) = t + i - j = I(P_1)$$

ولبقية قيم j أي القيم $(\alpha/2 + i + 1) \leq j \leq (t-1)/2$ فإن

$$d_2(u_i, v_j) = s + j - i, \quad i \neq (s-1)/2$$

وبذلك نحصل على

$$\sum_{j=2}^{(t-1)/2} x^{d_2(u_i, v_j)} = \sum_{j=2}^{(\alpha/2)+i} x^{t+i-j} + \sum_{j=(\alpha/2)+i+1}^{(t-1)/2} x^{s+j-i} \quad \dots (4.2)$$

والتي نتحقق لكل رأس u_i ، حيث أن $2 \leq i \leq (s-3)/2$. أما بالنسبة إلى $i = (s-1)/2$ ، فإن المجموع الثاني $\sum_{j=(\alpha/2)+i+1}^{(t-1)/2} x^{s+j-i}$ يصبح صفراً . وعليه فإن

$$\sum_{i=2}^{(s-1)/2} \sum_{j=2}^{(t-1)/2} x^{d_2(u_i, v_j)} = \sum_{i=2}^{(s-3)/2} \left(\sum_{j=2}^{i+\alpha/2} x^{t+i-j} + \sum_{j=i+1+\alpha/2}^{(t-1)/2} x^{s+j-i} \right) + \sum_{j=2}^{(t-1)/2} x^{t+(s-1)/2-j} \quad \dots (4.3)$$

وبهذا وجدنا متعددة الحدود للمسافة العرضية-2 لكل رأسين u_i, v_j ، حيث $i = 2, 3, 4, \dots, (s-1)/2$ و $j = 2, 3, 4, \dots, (t-1)/2$ ، ونلاحظ أننا نحصل على متعددة الحدود نفسها للمسافة العرضية بين كل رأس u_i ، حيث $i = 2, 3, 4, \dots, (s-1)/2$ مع كل رأس v_j ، وحيث $j = \frac{t+3}{2}, \frac{t+5}{2}, \frac{t+7}{2}, \dots, t-1$ وبناء على ذلك نضرب المجموع في (4.3) في 2 للحصول على متعددة الحدود للمسافة العرضية لكافة أزواج الرؤوس

$$\{u_i, v_j\} \text{ حيث } 2 \leq i \leq (s-1)/2, \quad j = 2, 3, 4, \dots, \frac{t-1}{2}, \frac{t+3}{2}, \frac{t+5}{2}, \dots, t-1$$

أما المسافة العرضية للرؤوس في النصف السفلي من الدارة C_s أي u_i ، $\frac{s+3}{2} \leq i \leq s-1$ ، نسبة إلى الرؤوس v_j أيضا ، $t-1, \dots, \frac{t+5}{2}, \frac{t+3}{2}, \frac{t-1}{2}, \dots$ ، فإن متعددة الحدود التي تمثل المسافة العرضية لهذه الرؤوس مساوية أيضا لمتعددة الحدود في (3. 4) ولهذا تضرب بالعدد 2 مرة أخرى.

بقي في هذه الحالة أن نجد

(أ) المسافات العرضية للرأس $u_{(s+1)/2}$ نسبة إلى كل الرؤوس v_j ، $j = 2, 3, 4, \dots, t-1$ ، وأن نجد.
(ب) المسافات العرضية للرأس $v_{(t+1)/2}$ نسبة إلى كل الرؤوس u_i ،
 $i = 2, 3, 4, \dots, \frac{s-1}{2}, \frac{s+3}{2}, \dots, s-1$

ففي حالة (أ) فإن الحاوية $C(u_{(s+1)/2}, v_j)$ بأصغر طول تتكون من الدربين :

$$P_1 : u_{(s+1)/2}, u_{(s+3)/2}, u_{(s+5)/2}, \dots, u_s, v_t, v_{t-1}, \dots, v_j$$

$$P_2 : u_{(s+1)/2}, u_{(s-1)/2}, u_{(s-3)/2}, \dots, u_1, v_1, v_2, \dots, v_j$$

من الواضح أن

$$I(P_1) = \frac{s+1}{2} + t - j, \quad I(P_2) = \frac{s-1}{2} + j$$

$$\text{إذا كان } j \leq \frac{s-1}{2} + j \leq \frac{s+1}{2} + t - j \text{ ، فإن } j \leq \frac{t+1}{2}$$

لذا فإن

$$d_2(u_{(s+1)/2}, v_j) = \frac{s+1}{2} + t - j, \quad 2 \leq j \leq \frac{1}{2}(t+1)$$

وأن

$$d_2(u_{(s+1)/2}, v_j) = \frac{s-1}{2} + j, \quad \frac{1}{2}(t+3) \leq j \leq (t-1)$$

وهكذا نحصل على متعددة الحدود

$$\sum_{j=2}^{t-1} x^{d_2(u_{(s+1)/2}, v_j)} = \sum_{j=2}^{(t+1)/2} x^{(s+1)/2 + t - j} + \sum_{j=(t+3)/2}^{t-1} x^{(s-1)/2 + j} \quad \dots (4. 4)$$

في حالة (ب) وبإتباع الطريقة نفسها نجد متعددة الحدود للمسافة العرضية - ٢ للرأس $v_{\frac{t+1}{2}}$ نسبة إلى الرؤوس

u_i حيث $i = 2, 3, 4, \dots, \frac{s-1}{2}, \frac{s+3}{2}, \dots, s-1$ (باستثناء $i = \frac{s+1}{2}$ لان المسافة العرضية بين الرأسين

$u_{\frac{s+1}{2}}$ و $v_{\frac{t+1}{2}}$ قد ذكرت في الحالة (أ)) وتكون الحاوية $C(v_{(t+1)/2}, u_i)$ بأصغر طول مكونة من الدربين

$$P_1 : v_{\frac{t+1}{2}}, v_{\frac{t+3}{2}}, v_{\frac{t+5}{2}}, \dots, v_t, u_s, u_{s-1}, \dots, u_i$$

$$P_2 : v_{\frac{t+1}{2}}, v_{\frac{t-1}{2}}, v_{\frac{t-3}{2}}, \dots, v_1, u_1, u_2, \dots, u_i$$

ونجد أن

$$l(P_1) = \frac{t+1}{2} + s - i, \quad l(P_2) = \frac{t-1}{2} + i$$

$$i \leq \frac{s+1}{2} \text{ فإن } \frac{t-1}{2} + i \leq \frac{t+1}{2} + s - i$$

$$\text{وبما أن } i = \frac{s+1}{2} \text{ قد استثيت فان}$$

$$d_2(u_i, v_{(t+1)/2}) = l(P_1), \quad 2 \leq i \leq \frac{s-1}{2}$$

وأن

$$d_2(u_i, v_{(t+1)/2}) = l(P_2), \quad \frac{s+3}{2} \leq i \leq s-1$$

وهكذا نحصل على

$$\sum_{u_i} x^{d_2(u_i, v_{(t+1)/2})} = \sum_{i=2}^{(s-1)/2} x^{(t+1)/2 + s - i} + \sum_{i=(s+3)/2}^{s-1} x^{(t-1)/2 + i} \quad \dots (4.5)$$

حيث ان المجموع في الطرف الايسر يؤخذ على كل راس u_i في $V(C_s) - \{u_{\frac{s+1}{2}}, u_1, u_s\}$

واخيرا ، بجمع متعدّدات الحدود في (1)، (2)، (3)، (5)، (6) في (أولا) مع متعدّدات الحدود في (4.5) و (4.4) ومع اربع مرات تلك في (4.3) ومن ثم التعويض عن $W_2(C_t; x)$ ، $W_2(C_s; x)$ ، $W_2(u_1, C_{t+1}; x)$ و $W_2(v_1, C_{s+1}; x)$ والتبسيط نحصل على المبرهنة الآتية:

مبرهنة 4.2: إذا كان $7 \leq s \leq t$ وكان t, s عددين فرديين فان

$$\begin{aligned} W_2(C_s \text{ S } C_t; x) &= 6x^2 + (s+2)x^{(s+1)/2} + (t+2)x^{(t+1)/2} - 4x^{t+(s-3)/2} - x^{s-1} - x^{t-1} + 5 \sum_{k=(t+s)/2}^{(2t+s-3)/2} x^k \\ &+ \sum_{k=(t+s+2)/2}^{(t+2s-3)/2} x^k + (s+4+x^{(t-1)/2}) \cdot \sum_{k=(s+3)/2}^{s-1} x^k + (t+4+x^{(s-1)/2}) \sum_{k=(t+3)/2}^{t-1} x^k \\ &+ 4 \sum_{i=2}^{(s-3)/2} \left(\sum_{k=2}^{i+a/2} x^{t+i-k} + \sum_{k=i+1+a/2}^{(t-1)/2} x^{s+k-i} \right) \end{aligned}$$

(ثالثا) ليكن $s < t$ ، s عددا زوجيا و t عددا فرديا :

إن هذه الحالة تختلف عن (أولا) في الحالة الجزئية (4) فقط وهي التي سوف نعالجها فيما يلي
إذا كان $2 \leq i \leq s/2$ و $2 \leq j \leq (t-1)/2$ ، فان الحاوية $C(u_i, v_j)$ الصغرى تتكون من الدربين الآتيين :

$$P_1 : u_i, u_{i-1}, u_{i-2}, \dots, u_1, v_t, v_{t-1}, \dots, v_j$$

$$P_2 : u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_s, v_1, v_2, \dots, v_j$$

ونجد أن

$$l(P_1) = t + i - j, \quad l(P_2) = s + j - i$$

لذلك فان

$$d_2(u_i, v_j) = \max\{s + j - i, t + i - j\}$$

إذ أن $2 \leq j \leq (t-1)/2$ و $2 \leq i \leq s/2$ فإن
فإذا كان $s+j-i \leq t+i-j$ ، فان

$$j \leq \frac{t-s}{2} + i \quad \dots(4.6)$$

بما أن $j \geq 2$ عدد صحيح وان $t-s$ عدد فردي فان المتباينة (4.6) تؤدي إلى $2 \leq j \leq \frac{t-s-1}{2} + i$
وهي قيم j التي تحقق المسافة العرضية -2

$$2 \leq i \leq s/2 \quad d_2(u_i, v_j) = t+i-j ,$$

ولقيم j الأخرى التي هي $(t-1)/2 \leq j \leq (t-s+1)/2 + i$ فان المسافة العرضية -2 هي

$$2 \leq i \leq (s/2)-1 \quad d_2(u_i, v_j) = s+j-i ,$$

وعليه ، ولرأس معين u_i ، $2 \leq i \leq \frac{s}{2}-1$ ، فان متعددة الحدود المقابلة له هي

$$\sum_{j=2}^{(t-1)/2} x^{d_2(u_i, v_j)} = \sum_{j=2}^{i+(t-s-1)/2} x^{t+i-j} + \sum_{j=i+(t-s+1)/2}^{(t-1)/2} x^{s+j-i} \quad \dots(4.7)$$

أما بالنسبة للرأس $u_{s/2}$ فان لدينا

$$\sum_{j=2}^{(t-1)/2} x^{d_2(u_{s/2}, v_j)} = \sum_{j=2}^{(t-1)/2} x^{t+s/2-j} \quad \dots(4.8)$$

وبأخذ المجموع لمتعددة الحدود (4.7) ، لقيم $2 \leq i \leq (s/2)-1$ ، وإضافة متعددة الحدود في (4.8) ، نحصل
على

$$\sum_{i=2}^{s/2} \sum_{j=2}^{(t-1)/2} x^{d_2(u_i, v_j)} = \sum_{i=2}^{s/2-1} \left(\sum_{j=2}^{i+(t-s-1)/2} x^{t+i-j} + \sum_{j=i+(t-s+1)/2}^{(t-1)/2} x^{s+j-i} \right) + \sum_{j=2}^{(t-1)/2} x^{t+(s/2)-j} , \quad \dots(4.9)$$

سوف نبين أن (4.9) هي نفسها لكل رأس u_i ، $2 \leq i \leq s/2$ ، مع كل رأس v_j ،
 $t-1 \leq j \leq (t+3)/2$ ، وذلك باستخدام دربين مختلفين عن الحالة المذكورة سابقا وهما :

$$P_1^* : u_1, u_{i-1}, u_{i-2}, \dots, u_1, v_1, v_2, \dots, v_j$$

$$P_2^* : u_1, u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_s, v_t, v_{t-1}, \dots, v_j$$

واضح أن

$$l(P_1^*) = i+j-1 , \quad l(P_2^*) = t+s-i-j+1 , \quad 2 \leq i \leq s/2 , \quad (t+3)/2 \leq j \leq t-1$$

من الشكل 4.1 نلاحظ التناظر بين الرأسين v_j و v_{t-j+1} ، $2 \leq j \leq (t-1)/2$ وإذ نستطيع أن نقول أن طول
الدرب P_1 يؤدي إلى طول الدرب P_1^* عندما نستبدل j بـ $t-j+1$ لكل $2 \leq j \leq \frac{1}{2}(t-1)$ ، وبالمثل ، فان
طول P_2 يؤدي إلى طول الدرب P_2^* عندما نستبدل j بـ $t-j+1$ لكل $2 \leq j \leq (t-1)/2$ ، وبهذا نستنتج أن
لكل $i = 2, 3, 4, \dots, s/2$ و $j = 2, 3, 4, \dots, (t-1)/2$ ، فان $d_2(u_i, v_j) = d_2(u_i, v_{t-j+1})$. وبهذا تضرب
متعددة الحدود في (4.9) بالعدد 2 ، وعندها نكون قد وجدنا المسافات العرضية لكل الرؤوس u_i ،

$2 \leq i \leq s/2$ نسبة إلى كل الرؤوس v_j ، لأجل $t-1, \dots, \frac{t+3}{2}, \frac{t-1}{2}, \dots, 3, 4, \dots, j=2$.

وكذلك فإن متعددة الحدود للمسافة العرضية للرؤوس في النصف السفلي للدائرة C_s ، أي الرؤوس u_i و $1+(s/2) \leq i \leq s-1$ نسبة إلى كل رؤوس الدائرة C_t عدا الرأس $v_{(t+1)/2}$ مساوية لتلك المذكورة للرؤوس في نصف الدائرة C_s العلوي نسبة إلى رؤوس C_t نفسها عدا $v_{(t+1)/2}$ ولهذا تضرب متعددة الحدود في (4.9) بالعدد 2 مرة أخرى، وتصبح مضروبة في 4.
أما الرأس $v_{(t+1)/2}$ ومسافته العرضية عن u_i و $2 \leq i \leq s/2$ ، فنلاحظ أن الحاوية $C(u_i, v_{(t+1)/2})$ تتكون من الدربين:

$$P_1 : v_{(t+1)/2}, v_{(t-1)/2}, v_{(t-3)/2}, \dots, v_1, u_1, u_2, \dots, u_i$$

$$P_2 : v_{(t+1)/2}, v_{(t+3)/2}, v_{(t+5)/2}, \dots, v_t, u_s, u_{s-1}, \dots, u_i$$

ونجد أن

$$l(P_1) = \frac{t-1}{2} + i, \quad l(P_2) = \frac{t+1}{2} + s - i$$

ولهذا فإن

$$d_2(u_i, v_{(t+1)/2}) = \max\left\{\frac{t-1}{2} + i, \frac{t+1}{2} + s - i\right\}$$

$$= s - i + (t+1)/2, \quad i = 2, 3, \dots, \frac{s}{2}$$

وبهذا نحصل على

$$\sum_{i=2}^{s/2} x^{d_2(u_i, v_{(t+1)/2})} = \sum_{i=2}^{s/2} x^{(t+1)/2 + s - i} \quad \dots(4.10)$$

لكل رأس u_i و $2 \leq i \leq s/2$

$$d_2(u_i, v_{(t+1)/2}) = d_2(u_{s-i+1}, v_{(t+1)/2})$$

وهذه العلاقة تعطي المسافات العرضية للرؤوس $u_{s-1}, \dots, u_{s/2+2}, u_{s/2+1}$ نسبة إلى الرأس $v_{(t+1)/2}$ ولهذا

تضرب العلاقة (4.10) بالعدد 2، ونحصل على

$$\sum_{i=2}^{s-1} x^{d_2(u_i, v_{(t+1)/2})} = 2 \sum_{i=2}^{s/2} x^{\frac{(t+1)}{2} + s - i}$$

مما تقدم نحصل على

$$\sum_{i=2}^{s-1} \sum_{j=2}^{t-1} x^{d_2(u_i, v_j)} = 2 \sum_{i=2}^{s/2} x^{\frac{(t+1)}{2} + s - i} + 4 \sum_{j=2}^{(t-1)/2} x^{t-j+\frac{s}{2}}$$

$$+ 4 \sum_{i=2}^{s/2-1} \left(\sum_{j=2}^{i+(t-s-1)/2} x^{t+i-j} + \sum_{j=i+(t-s+1)/2}^{(t-1)/2} x^{s+j-i} \right) \quad \dots(4.11)$$

وبجمع متعددات الحدود في (1)، (2)، (3)، (5)، (6) في (أولا) مع متعددة الحدود في (4.11) والتعويض عن $W_2(v_1, C_{s+1}; x)$ و $W_2(u_1, C_{t+1}; x)$ ، $W_2(C_t; x)$ ، $W_2(C_s; x)$ وبإجراء التبسيط نحصل على المبرهنة الآتية:

مبرهنة ٤,٣: إذا كان $6 \leq s < t$ وكان s عددا زوجيا و t عددا فرديا فإن

$$w_2(C_s T C_t; x) = 6x^2 + \frac{s}{2}x^{s/2} - 2x^{(t+1)/2} - x^{s-1} - x^{t-1} + (s+4) \sum_{k=s/2+1}^{s-1} x^k + (t+4) \sum_{k=(t+1)/2}^{t-1} x^k \\ + 2x^{(t+1)/2} \cdot \sum_{k=2}^{s/2} x^{s-k} + 4x^{s/2} \cdot \sum_{k=2}^{(t-1)/2} x^{t-k} + 4x^{(t+s+1)/2} \cdot \sum_{i=2}^{s/2-1} \left(\sum_{k=0}^{(t+2i-s-5)/2} x^k + \sum_{k=0}^{s/2-i-1} x^k \right)$$

(رابعا) ليكن $s < t$ ، s عددا فرديا و t عددا زوجيا :

هذه الحالة أيضا تختلف عن (أولا) في الحالة الجزئية (4) والتي سوف نعالجها كما في (ثالثا) .

أن الرؤوس u_i و $2 \leq i \leq \frac{s-1}{2}$ تكون مسافات العرضية - ٢ نسبة إلى الرؤوس v_j ، $2 \leq j \leq t/2$ هي كما ذكرت في (ثالثا)، أي

$$d_2(u_i, v_j) = \max\{t+i-j, s+j-i\}$$

فإذا كان $s+j-i \leq t+i-j$ فإن $j \leq i+(t-s)/2$

ولما كان $j \geq 2$ عددا صحيحا فإن هذه تؤدي إلى

$$2 \leq j \leq \frac{t-s-1}{2} + i$$

وهي قيم j التي تحقق

$$d_2(u_i, v_j) = t+i-j, i=2,3, \dots, (s-1)/2$$

ولبقية قيم j أي $\frac{t-s+1}{2} + i \leq j \leq t/2$ فإن

$$d_2(u_i, v_j) = s+j-i$$

ومنها نحصل على

$$\sum_{j=2}^{t/2} x^{d_2(u_i, v_j)} = \sum_{j=2}^{\frac{t-s-1}{2}+i} x^{t+i-j} + \sum_{j=\frac{t-s+1}{2}+i}^{t/2} x^{s+j-i}$$

هذه العلاقة لكل رأس u_i و $2 \leq i \leq \frac{s-1}{2}$ وبأخذ المجموع لقيم i نحصل على

$$\sum_{i=2}^{(s-1)/2} \sum_{j=2}^{t/2} x^{d_2(u_i, v_j)} = \sum_{i=2}^{(s-1)/2} \left(\sum_{j=2}^{\frac{t-s-1}{2}+i} x^{t+i-j} + \sum_{j=\frac{t-s+1}{2}+i}^{t/2} x^{s+j-i} \right) \dots (4.12)$$

وكما حصلنا في الحالة (ثالثا) عندما يكون s عددا زوجيا و t عددا فرديا فإنه عندما نأخذ الحاوية $C(u_i, v_j)$

، $2 \leq i \leq \frac{s-1}{2}$ و $\frac{t}{2} + 1 \leq j \leq t-1$ المكونة من الدربين

$$P_1 : u_i, u_{i-1}, u_{i-2}, \dots, u_1, v_1, v_2, \dots, v_j$$

$$P_2 : u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_s, v_t, v_{t-1}, \dots, v_j$$

نجد أن

$$I(P_1) = i + j - 1, I(P_2) = s + t - i - j + 1$$

نلاحظ من الشكل 4.1 وأطوال الدروب فيه أن لكل رأس u_i و $2 \leq i \leq (s-1)/2$ يكون طول الدرب P_1 الذي يصل إلى الرأس v_j مساويا لطول احد الدربين بين الرأس u_i نفسه والرأس v_{t-j+1} . وكذلك طول الدرب P_2 الذي يصل u_i والرأس v_j يساوي طول الدرب الآخر الذي يصل u_i نفسه والرأس v_{t-j+1} وعليه فان

$$d_2(u_i, v_j) = d_2(u_i, v_{t-j+1})$$

ولهذا تضرب متعددة الحدود في (4.12) بالعدد 2 ونجدها نكون قد وجدنا متعددة الحدود للمسافة العرضية - 2 لكل أزواج الرؤوس $\{u_i, v_j\}$ حيث $2 \leq i \leq (s-1)/2$ ، $2 \leq j \leq t-1$ أما متعددة الحدود للرؤوس u_i ، $\frac{s+3}{2} \leq i \leq s-1$ نسبة إلى الرؤوس v_j ، $2 \leq j \leq t-1$ فهي نفسها (4.12) ولهذا تضرب بالعدد 2 مرة أخرى .

يبقى الرأس $u_{\frac{s+1}{2}}$ ومسافته العرضية نسبة إلى الرؤوس v_j ، $2 \leq j \leq t-1$ ، فنجد أن الحاوية ذات اصغر

طول $C(u_{(s+1)/2}, v_j)$ تتكون من الدربين

$$P_1 : u_{(s+1)/2}, u_{(s-1)/2}, u_{\frac{s-3}{2}}, \dots, u_1, v_1, v_2, \dots, v_j$$

$$P_2 : u_{(s+1)/2}, u_{(s+3)/2}, u_{\frac{(s+5)}{2}}, \dots, u_s, v_t, v_{t-1}, \dots, v_j$$

واضح أن

$$I(P_1) = \frac{s-1}{2} + j, I(P_2) = t - j + (s+1)/2$$

وعليه ، لكل $j = 2, 3, 4, \dots, \frac{t}{2}$ ، فان

$$d_2(u_{(s+1)/2}, v_j) = t - j + (s+1)/2$$

كما أن

$$d_2(u_{(s+1)/2}, v_j) = d_2(u_{(s+1)/2}, v_{t-j+1}) \quad , \quad 2 \leq j \leq t/2$$

ولهذا فان

$$\sum_{j=2}^{t-1} x^{d_2(u_{(s+1)/2}, v_j)} = 2 \sum_{j=2}^{t/2} x^{t-j+(s+1)/2} \quad \dots (4.13)$$

وبجمع متعددة الحدود في (4.13) مع أربع مرات متعددة الحدود في (4.12) نحصل على

$$\sum_{i=2}^{s-1} \sum_{j=2}^{t-1} x^{d_2(u_i, v_j)} = 2 \sum_{j=2}^{t/2} x^{t-j+(s+1)/2} + 4 \sum_{i=2}^{(s-1)/2} \left(\sum_{j=2}^{\frac{t-s-1}{2}+i} x^{t+i-j} + \sum_{j=\frac{t-s+1}{2}+i}^{t/2} x^{s+j-i} \right) \quad \dots (4.14)$$

وأخيرا نجمع متعددات الحدود في (1)، (2)، (3)، (5)، (6) في (أولا) مع متعددة الحدود (4.14) ونعوض عن

$W_2(u_1, C_{t+1}; x)$ ، $W_2(C_t; x)$ ، $W_2(C_s; x)$ و $W_2(v_1, C_{s+1}; x)$ ونجري التبسيط لنحصل على المبرهنة

الآتية :

مبرهنة 4.4 : إذا كان $7 \leq s < t$ وكان s عددا فرديا و t عددا زوجيا فان:

$$w_2(C_s \mathbf{T} C_t; x) = 6x^2 + \frac{t}{2}x^{t/2} - 2x^{(s+1)/2} - x^{s-1} - x^{t-1} + (s+4) \sum_{k=(s+1)/2}^{s-1} x^k + (t+4) \sum_{k=t/2+1}^{t-1} x^k \\ + 2x^{(s+1)/2} \cdot \sum_{k=2}^{t/2} x^{t-k} + 4x^{(s+t+1)/2} \sum_{i=2}^{(s-1)/2} \left(\sum_{k=0}^{(t+2i-s-5)/2} x^k + \sum_{k=0}^{(s-2i-1)/2} x^k \right)$$

REFERENCES

- [1] A.A.Ali ,and A.S.Aziz (2007),"w-Wiener Polynomials of the Width Distance of Some Special graphs " Raf .J.of Comp.Sci. ,Vol.4, Nol.2.
- [2] A.S.Aziz (2007) ," the Width Distance and the w- Wiener Polynomial of a Graph", M.Sc. Thesis , Mosul University ,Mosul.
- [3] F. Buckley and F. Harary ; (1990), Distance in Graphs , Addison-Wesley, Redwood
- [4] G. Chartrand and L. Lesniak ; (1986), Graphs and Digraphs, Wadsworth Inc. Belmont, California .
- [5] I. Gutman ; (1993), "Some Properties of the Wiener Polynomial",Graph Theory Notes of New York, XXV, The New York Academy of Sciences , 13-18.
- [6] W.A.M. Saeed ; (1999), Wiener Polynomials of Graphs , Ph.D. Thesis, Mosul University, Mosul.
- [7] B. E. Sagan, Y-N. Yeh, and P. Zhang ; (1996),"The Wiener Polynomial of a Graph" , Intern. J. of Quantum Chemistry, Vol. 60, pp. 959-969.