

الحل العددي وتحليل التقارب للطريقة الهجينة بين الاندراج الخاص والطريقة التكرارية

لـ RK لمسائل VNDEs

إيمان عبد الوهاب أحمد

آن جلال الساعور

كلية علوم الحاسبات والرياضيات

جامعة الموصل

تاريخ قبول البحث: ٢٠١٠/٥/١٦

تاريخ استلام البحث: ٢٠١٠/١/٢٠

ABSTRACT

This paper devoted to find the solution of the Vanishing Neutral Differential Equations (VNDEs). After having reviewed the ARCHI code, which was originally written by Paul with the aim of solving neutral differential equations, an improvement of this code will be presented in this paper to solve problems of VNDEs. This improvement is done by suggesting a hybrid method of special interpolants with iteration procedure of RK method. We will analyze the convergence of the suggested hybrid method. We conclude that the criteria of convergence for this method is:

$$b_n(t) \leq TH(c_1 + \frac{c_2 L_3}{1-L_3}) \exp(\frac{LT}{1-L_3})$$

, that is the solution is convergent $b_n(t) \rightarrow 0$, we have $H \rightarrow 0$ and when and the derivative of the solution is also convergent for VNDEs.

الملخص

يهدف هذا البحث إلى إيجاد الحل العددي لمسائل المعادلات التفاضلية المتأخرة زمنياً من النوع المتحايدين وتأخير متلاشي Vanishing Neutral Differential Equations (VNDEs). فبعد أن تم استعراض البرنامج ARCHI والمقدم من قبل العالم Paul بهدف حل المعادلات التفاضلية المتأخرة زمنياً من النوع المتحايدين (المتعادل) Neutral Differential Equations (NDEs). فلقد تم تطوير هذا البرنامج لكي يستخدم في حل مسائل VNDEs. إن هذا التطوير تم من خلال الطريقة الهجينة بين الاندراج الخاص والطريقة التكرارية لـ RK. كما تم تحليل التقارب للطريقة الهجينة المقترحة وقد تبين أن مقياس التقارب لهذه الطريقة هو:

$$b_n(t) \leq TH(c_1 + \frac{c_2 L_3}{1-L_3}) \exp(\frac{LT}{1-L_3})$$

وإنه عندما $H \rightarrow 0$ فإن $b_n(t) \rightarrow 0$ أي أن الحل متقارب، ومشتقة الحل متقاربة كذلك في حالة التأخير المتلاشي لمسائل (VNDEs).

1- المقدمة

إن العديد من الأنظمة الفيزيائية تمتلك صفة التأخر في الاستجابة بالنسبة إلى الشروط الداخلة. وعليه فإن النسبة التي تظهر أو تحدث عندها العمليات لا تعتمد على الحالة المحسوبة الحالية للنظام فحسب، ولكن تعتمد كذلك على الحالات السابقة. إن النماذج الرياضية لمثل هذه المعادلات تتمثل بالمعادلات التفاضلية المتأخرة زمنياً.

إن الحلول العددية للمعادلات التفاضلية المتأخرة زمنياً من النوع التأخري (المتلاشي) قد نوقشت من قبل العديد من العلماء في الآونة الأخيرة، منهم: Neves في بحثه عام 1981 [9]، فقد حضر آيتين للسيطرة على الأخطاء التي تعالج عدم الاستمرارية، فقد قام برصد الفرق ومراقبته بين قيمة التأخير delay المحسوبة بواسطة الاستكمال extrapolation من الخطوة السابقة وبين قيمة التأخير delay المحسوبة بواسطة الاندراج المحلي local interpolation [3,4]. إن المعادلات التفاضلية المتأخرة زمنياً من النوع المتعادل (المتحيد) Neutral differential equations (NDEs) تتلقى اهتماماً قليلاً على الرغم من وجود برامج (codes) مثل (ARCHI) و (DDELAY) و (DRKLAG) [7,8] قد صممت لهذا النوع من المعادلات، هذا يحدث بسبب كون المعادلات التفاضلية المتأخرة زمنياً من النوع المتحيد (NDEs) صعبة التحليل رياضياً لأن انتشار عدم استمرارية المشتقات يكون غير أملس not smoothing وأنه لا بد من تقريب حدود لمشتقة قيمة التأخير derivative delay term [5,6]. إن طريقتين من طرق الخطوة المنفردة الضمنية implicit one step methods ذات رتبة اختيارية p قد تمت مناقشتها من قبل Jackiewicz [10] لحل مسائل المعادلات التفاضلية المتأخرة زمنياً من النوع المتحيد NDEs مبنية على أساس تكرار بيكار Picard iteration. قام Jackiewicz كذلك بنشر سلسلة من البحوث لتقصي الحلول للمعادلات التفاضلية المتأخرة زمنياً من النوع المتحيد (NDEs) باستخدام طرق عددية. العالمان Hayashi عام 1996 [4] و Shampine عام 2000 [7] ناقشوا تطوير وتحليل طرق عددية لحل مسائل المعادلات التفاضلية المتأخرة زمنياً من النوعين التأخري (المتلاشي) Retarded differential equations (RDEs) والتبادلي (المتحيد) (NDEs) وتأخير متلاشي (vanishing delay).

في هذا البحث تم اقتراح الطريقة الهجينة بين الاندراج الخاص والطريقة التكرارية لحل مسائل (VNDES). كما تم تحليل تقارب هذه الطريقة الهجينة. ثم تقديم وصف للبرنامج ARCHI المطور الذي قمنا بتطويره والذي تم تطبيقه على مسائل مختلفة من نوع VNDE.

2- الاندراج المبني على أساس فترتين زمنية:

إن صيغة رانج - كوتا مع صيغة اندراج للتأخير يمكن أن تطبق على المعادلات التفاضلية المتأخرة زمنياً من النوع المتحاييد (NDES)، وعند كل خطوة، لنحصل على: [4]

$$y_n(t_n + qh_n) = y_{n-1}(t_n) + h_n \sum_{i=1}^{\bar{s}+1} \bar{b}_i(q) K_i$$

$$t_{n,i} = t_n + c_i h_n$$

$$K_i = f(t_{n,i}, Y_i, y(t_{n,i}-\tau_1(t_{n,i}, Y_i)), y(t_{n,i}-\tau_2(t_{n,i}, Y_i)), \dots, y(t_{n,i}-\tau_\mu(t_{n,i}, Y_i)), y'(t_{n,i}, \tau_{\mu+1}(t_{n,i}, Y_i)), \dots, y'(t_{n,i}, -\tau_{\mu+w}(t_{n,i}, Y_i)))$$

$$Y_i = y_{n-1}(t_n) + h_n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} K_j$$

لقيم $i = 1, 2, \dots, \bar{s}+1$ حيث ان $y_{-1}(t_0) = \phi(t_0)$ وان $y(t)$ تمثل التقريبات للحل مع

$$y(t) = \phi(t) \quad \text{لقيم } t \leq t_0$$

$$y(t) = y_n(t) \quad \text{لقيم } t \in [t_n, t_{n+1}]$$

حيث إن c_i و b_i و a_{ij} تمثل المعاملات لطريقة RK والممثلة بالجدول الآتي .

c_1	0					
c_2	$a_{2,1}$	0				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
c_s	$a_{s,1}$	$a_{s,2}$	$\dots$	$a_{s,s}$	0	
$\vdots$	$\vdots$					
$c_{\bar{s}+1}$	$c_{s+1,1}$	$c_{s+1,2}$	$\dots$	$\dots$	$c_{s+1,\bar{s}}$	0
	$\bar{b}_1(\theta)$	$\bar{b}_2(\theta)$	$\dots$	$\dots$	$\bar{b}_{\bar{s}}(\theta)$	$\bar{b}_{\bar{s}+1}(\theta)$

يمكن استخدام هذه الصيغة القياسية والمبينة في أعلاه مع صيغة للاندرج بشكل فعال في حل مسائل ذات الزمن التأخري غير المتلاشي (non-vanishing delay)، ولكنها ليست ملائمة

على نحو مباشر لمسائل ذات الزمن التأخري المتلاشي (vanishing delay) ، والسبب يعود إلى أن الاندراج يمكن أن يكون فقط عندما تكون جميع قيم المرحلة على الخطوة الحالية متوفرة. ربما يكون زمن التأخير في الخطوة الحالية وقيم الحل التأخري اللازم لحساب قيم المرحلة الحالية المحسوبة ليست متوفرة. سيتم توسيع الاندراج من الخطوة السابقة إلى الخطوة المحسوبة، ولكن هذه الطريقة ليست ملائمة دائماً في حل مسائل ذات الزمن التأخري غير المتلاشي بسبب خطأ القطع المحلي (local- truncation error) ، أي خطأ القطع على الفترة $[t_{n-1}, t_{n-1} + 2h_{n-1}]$ مقارنة بتلك التي على الفترة $[t_{n-1}, t_{n-1} + h_{n-1}]$ ، ويمكن توضيح ذلك من خلال تصوّر الاندراج لطريقة رانج-كوتا من الرتبة السادسة (sixth order) إذ يكون فيه الخطأ المحلي (local error) على الفترة $[t_{n-1}, t_{n-1} + 2h_{n-1}]$ أكبر من تلك التي على الفترة $[t_{n-1}, t_{n-1} + h_{n-1}]$ على الرغم من أنه لا يكون من السهل توسيع أو تطوير الاندراج على خطوة قادمة بأكملها. فمن الممكن أن نتصور توسيعاً أو تطويراً للاندراج لخطوة واحدة فقط.

فكرتنا الأساسية هي تجهيز اندراج خاص (special interpolation) مبنية على أساس كل المعلومات المتوفرة من الخطوة السابقة والعوامل المبكرة من الخطوة المحسوبة.

عند حساب قيمة المرحلة $f(t_n + c_{i+1}h_n, Y_i, y'(.))$ التي فيها التأخير (delay) يقع في الخطوة المحسوبة، سنكون اندراج على الفترة $[t_{n-1}, t_n + c_i h_n]$ يبنى على الخطوة الأخيرة والمراحل i للخطوة المحسوبة ثم يوسع هذا الاندراج على الفترة $[t_{n-1}, t_n + c_{i+1}h_n]$ لنتمكن من حساب أية قيمة تأخير (delay) متعلقة بقيم هذه المرحلة. وهكذا، نكون قد وفرنا اندراجاً لكل مرحلة في الخطوة الحالية عند الضرورة. ويلاحظ بأننا هنا نقوم بافتراض أن $1 > c_m > \dots > c_3 > c_2$ وأن c_2 تحقق $c_2 < h_{n-1} < c_2 h_n$. c_2 سالب أو موجب.

إن هذا الشرط يتحقق لمعظم الاستخدامات لصيغ رانج-كوتا الشائعة الاستخدام ولمعظم إستراتيجيات السيطرة على حجم الخطوة التكاملية. إذا وقع التأخير (delay) في الفترة $[t_n, t_n + c_2 h_n]$ ولا توجد معلومات جديدة متوفرة، فإن حساب الخطوة الثانية (المرحلة الثانية) تكون فقط بتوسيع الاندراج (interpolation) من الخطوة السابقة (الأخيرة). في تلك الحالة يمكن أن نستفيد من صيغة Runge-Kutta القياسية [1].

بعد الفترة الثانية، عندما يحصل زمن التأخير على الفترة $[t_n + c_2 h_n, t_n + h_n]$ في حساب مرحلة $(i+2)$ th، نقوم ببناء اندراج بالشكل الآتي:

$$u_i(t_{n-1} + qh_{n-1}) = y_{n-1} + h_{n-1} \sum_{j=1}^s b_{i,j}(q) \tilde{Y}_j + h_{n-1} \sum_{j=1}^{i+1} b_{i,s+j}(q) Y_j ; \quad 0 \leq \theta \leq 1 + r_{ci} + 1$$

إذ تمثل $\tilde{Y}_j, Y_j$ المراحل المرتبطة بالخطوة الأخيرة والحالية على التوالي، وأن $r = h_n/h_{n-1}$. ولتبسيط المسألة لا نستخدم المراحل الإضافية $S - S$ في بناء اندراج خاص (لا يمكن زيادة المرتبة فيه خلال استخدام المراحل الإضافية).
نرمز إلى الاندراج على الفترة $[t_{n-1}, t_n + c_2 h_n]$ بالرمز u_1 وبالرمز u_i للاندرج على الفترة $[t_n, t_n + c_{i+1} h_n]$ لقيم $i = 1, 2, \dots, s_1$ إذ أن s_1 يمثل العدد الأكبر من الاندراجات الضرورية. فبذلك يكون لدينا:

$$\begin{aligned} Y_i &= y_n + h_n \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} f(t_n + h_n c_i, Y_j, z'(t_n + h_n c_i - t(t_n + h_n c_i, Y_i))) \\ &= y_{n-1} + h_{n-1} \sum_{j=1}^s b_j f(t_{n-1} + c_j h_{n-1}, \tilde{Y}_j, z'(t_{n-1} + c_j h_{n-1} - t(t_{n-1} + c_j h_{n-1}, \tilde{Y}_i))) + \\ &\quad + h_{n-1} \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \frac{h_n}{h_{n-1}} f(t_{n-1} + h_{n-1} (1 + \frac{h_n}{h_{n-1}} c_i), Y_j, \\ &\quad z'(t_{n-1} + h_{n-1} (1 + \frac{h_n}{h_{n-1}} c_i) - t(t_{n-1} + h_{n-1} (1 + \frac{h_n}{h_{n-1}} c_i), Y_j))) \end{aligned}$$

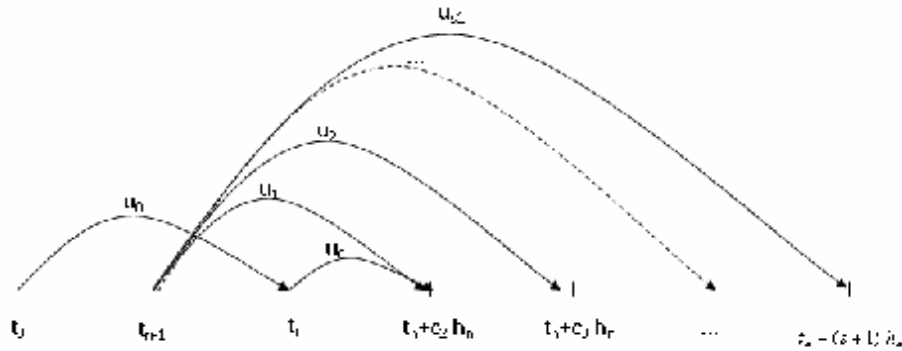
مثل هذا النوع من الاندراج نستطيع تمثيله بالجدول الآتي:

c_1	0								
c_2	$a_{2,1}$	0							
c_3	$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	0						
$\mathbb{M}$									
c_s	$a_{s,1}$	$a_{s,2}$	...	$a_{s,s-1}$	0				
1	$b_{1,1}$	$b_{2,2}$	...	$b_{s-1,s-1}$	$b_{s,s}$	0			
$1 + r \ c_2$	b_1	b_2	...	b_{s-1}	b_s	$ra_{2,1}$	0		
$1 + r \ c_3$	b_1	b_2	...	b_{s-1}	b_s	$ra_{3,1}$	$ra_{3,2}$	0	
$\mathbb{M}$	$\mathbb{M}$								
$1 + r \ c_{i+1}$	b_1	b_2	...	b_{s-1}	b_s	$ra_{i+1,1}$	$ra_{i+1,2}$	...	$ra_{i+1,i}$
	$b_{i,1}(\theta)$	$b_{i,2}(\theta)$	...	$b_{i,s-1}(\theta)$	$b_{i,s}(\theta)$	$b_{i,s+1}(\theta)$	$b_{i,s+2}(\theta)$	...	$b_{i,s+i}(\theta)$
									$b_{i,s+i+1}(\theta)$

إذ إن المعاملات $b_{i,j}(q) = \sum_{l=1}^P b_{i,j,l}(q)^l$ تمثل متعددات حدود

3- الطريقة الهجينة بين الاندراج الخاص والطريقة التكرارية لطريقة RK لحل مسائل (VNDEs)

إن الطريقة الهجينة قد كُفِت لتستخدم في حل مسائل (VNDEs) وذلك من خلال تكوين تقريبات أولية (initial approximation) أو اندراج خاص (special interpolation) مبني على أساس جميع المعلومات المتوفرة من الخطوة السابقة وأول مراحل من الخطوة الحالية المحسوبة. وهذا الاندراج مبني على أساس فترتين زمنيتين (Two-time step intervals) المبينة في الفقرة (2). ثم يتم استخدام هذا الاندراج الجديد مع الطرق التكرارية لطريقة رانج-كوتا.



إذ إن u_0 تمثل الاندراج على الفترة $[t_0, t_n]$ و u_i تمثل الاندراج على الفترة $[t_{n-1}, t_n + c_{i+1}h_n]$ لكل قيم $i = 1, 2, \dots, s_1$ ، إذ إن s_1 تمثل العدد الأكبر من الاندراجات الخاصة لكل خطوة وإذا كان التأخير (delay) يقع ضمن الفترة $[t_n, t_n + c_2h_n]$ عندئذٍ سنستخدم u_0 كاندراج خاص، وهذا ما سيتم توضيحه بالتفصيل بالخوارزميتين (1) و (2).

خوارزمية (1) التقريبات الأولية أو الاندراج الخاص (Initial Approximation), (Special Interpolation)

خطوة (1): اجعل: $K_1^{(0)} = f(t_n, y_{n-1}(t_n), Z'_0(t_n - t(t_n, y_{n-1}(t_n))))$

خطوة (2): نفذ الخطوات (2) و (3) لقيم $i = 2, \bar{s} + 1$

$$Y_i^0 = y_{n-1}(t_n) + h_n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} K_j^{(0)}$$

خطوة (3): إذا كان $t_n + c_i h_n - t(t_n + c_i h_n, Y_i^{(0)}) \leq t_n + c_2 h_n$

عندئذ يكون

$$K_i^{(0)} = f(t_n + c_i h_n, Y_i^{(0)}, Z'_0(t_n + c_i h_n - t(t_n + c_i h_n, Y_i^{(0)})))$$

وإلا إذا كان $i \leq s_1 + 1$ عندئذ يكون

$$K_i^{(0)} = f(t_n + c_i h_n, Y_i^{(0)}, Z'_{i-2}(t_n + c_i h_n - t(t_n + c_i h_n, Y_i^{(0)})))$$

وإلا فسيكون لدينا

$$K_i^{(0)} = f(t_n + c_i h_n, Y_i^{(0)}, Z'_{s_1}(t_n + c_i h_n - t(t_n + c_i h_n, Y_i^{(0)})))$$

خطوة (4): أطبع الاندراج الخاص

خوارزمية (2) الطريقة التكرارية (Iteration Procedure)

خطوة (1) لقيم المراحل $i = 2, \dots, \bar{s} + 1$:

$$Y_i^1 = y_{n-1}(t_n) + h_n a_{i1} K_1 + h_n \sum_{j=2}^{i-1} a_{ij} K_j^1$$

خطوة (2): إذا كان: $t_n < t_n + c_i h_n - t(t_n, Y_i^{(0)}) \leq t_{n+1}$

عندئذ يكون لدينا

$$K_i^1 = f(t_n + c_i h_n, Y_i^1, Z'^{(1-1)}(t_n + c_i h_n - t(t_n + c_i h_n, Y_i^{(1)})))$$

وإلا فعندئذ سيكون

$$K_i^1 = f(t_n + c_i h_n, Y_i^1, Z'(t_n + c_i h_n - t(t_n + c_i h_n, Y_i^{(1)})))$$

خطوة (3): احسب

$$Z_n^{(1)}(t_n + q h_n) = y_{n-1}(t_n) + h_n \bar{b}_1(q) K_1 + h_n \sum_{i=2}^{\bar{s}+1} \bar{b}_i(q) K_i^{(1)}$$

4- تحليل تقارب الطريقة الهجينة بين الاندراج الخاص والطريقة التكرارية لـ RK

في هذا البند سوف نقوم بتحليل الشروط الكافية التي تجعل الطريقة الهجينة المقترحة متقاربة. لكي نصل إلى نتيجة التقارب، سنفرض أن الحل يكون سهلاً (smooth) بشكل كاف ما عدا عند عدد محدد من النقاط، وأن لمسائل المعادلات التفاضلية المتأخرة زمنياً من النوع المتحايث وبتأخير متلاش (VNDEs) فإن الطريقة العددية تكون (consistent) بتحقيق الشرط التالي [4]:

$$z_n(t_n + \theta h_n) = z(t_n) + h_n \sum_{i=1}^{s+1} b_i(\theta) f(t_n, z(t_n), \dot{z}(t_n - \tau(t_n, y(t_n)))) + O(h_n^2)$$

مأخوذة (1) [4] : إذا كانت المتتابعة $\{\beta_n(t)\}$ تحقق المتباينة التالية:-

$$\beta_n \leq [1 + Lh_n]\beta_{n-1} + (d_n h_n) \quad n = 0, 1, \dots$$

$\{d_n\}$ و $\{h_n\}$ تمثل متتابعات غير سالبة وان L هو ثابت غير سالب

$$\beta_n \leq [\beta_{-1} + \sum_{i=0}^n d_i h_i] \exp(\sum_{j=0}^n L h_j) \quad \text{فان :}$$

مأخوذة (2): إذا كانت الدوال y و τ تحقق شروط ليبشتر التالية:

$$\begin{aligned} 1 - \|\dot{y}(t_2) - \dot{y}(t_1)\| &\leq L_y \|t_2 - t_1\| \\ 2 - \|\tau(t, y_2) - \tau(t, y_1)\| &\leq L_\tau \|y_2 - y_1\| \end{aligned}$$

حيث إن L_y تمثل ثابت ليبشتر لمشتقة الدالة y' و L_τ تمثل ثابت ليبشتر لمشتقة الدالة τ . فإن:

$$\begin{aligned} \|\dot{z}(t - \tau(t, z(t))) - \dot{y}(t - \tau(t, y(t)))\| &\leq \|\dot{z}(t - \tau(t, z(t))) - \dot{y}(t - \\ \tau(t, z(t)))\| + L_y L_\tau \|z(t) - y(t)\| \end{aligned}$$

البرهان: بتطبيق المتباينة المثلثية وباستخدام شروط ليبشتر (1) و (2) أعلاه ، يكون لدينا:

$$\begin{aligned} &\|\dot{z}(t - \tau(t, z(t))) - \dot{y}(t - \tau(t, z(t)))\| + \\ &\quad + \|\dot{y}(t - \tau(t, z(t))) - \dot{y}(t - \tau(t, y(t)))\| \\ &\leq \|\dot{z}(t - \tau(t, z(t))) - \dot{y}(t - \tau(t, z(t)))\| + \\ &\quad + L_y \|\tau(t, z(t)) - \tau(t, y(t))\| \\ &\leq \|\dot{z}(t - \tau(t, z(t))) - \dot{y}(t - \tau(t, z(t)))\| \\ &\quad + L_y L_\tau \|z(t) - y(t)\| \end{aligned}$$

الآن ولتحليل تقارب الطريقة الهجينة سوف نفرض أن الدوال f و y' و τ تمثل دوال تحقق شروط ليبشتر وباستخدام شرط الـ consistency فإننا نصل إلى تقارب الطريقة الهجينة المقترحة وكالآتي:

$$\begin{aligned} u_n(t_n + \theta h_n) &= u_{n-1}(t_n) + h_n \sum_{i=1}^{s+1} b_i(\theta) k_i \\ \begin{cases} Y_1 = u_{n-1}(t_n) \\ k_1 = f(t_n, Y_1, \dot{z}_0(t_n - \tau(t_n, Y_1))) \end{cases} \end{aligned}$$

من الصيغة التالية:

حيث

وبالنسبة لقيمة $i = 2, \dots, s+1$ لدينا:

$$\begin{cases} Y_i = u_{n-1}(t_n) + h_n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j \\ k_i = f(t_n + c_i h_n, Y_i, \dot{z}_0(t_n + c_i h_n - \tau(t_n + c_i h_n, Y_i))) \end{cases}$$

وإذا كان $t_n + c_i h_n - \tau(t_n + c_i h_n, Y_i) \leq t_n + c_i h_n$ عندئذ يكون لدينا

$$k_i = f(t_n + c_i h_n, Y_i(t_n), \hat{z}_0(t_n + c_i h_n - \tau(t_n + c_i h_n, Y_i)))$$

وإلا فسيكون لدينا ، إذا كان : $i \leq s_1 + 1$

$$\therefore k_i = f(t_n + c_i h_n, Y_i, \hat{z}_{i-2}(t_n + c_i h_n - \tau(t_n + c_i h_n, Y_i)))$$

$$k_i = f(t_n + c_i h_n, Y_i, \hat{z}_{s_1}(t_n + c_i h_n - \tau(t_n + c_i h_n, Y_i))) \text{ وإلا}$$

إذ أن s_1 تمثل أكبر عدد لمشتقة الاندراج الخاص لكل خطوة. الآن لنفرض أن:

$$\alpha_n(t) = \|z(t) - y(t)\| , \quad \beta_n(t) = \max_{t_0 \leq s \leq t_{n+1}} [\alpha(s)]$$

$$z_n(t_n + \theta h_n) - u_n(t_n + \theta h_n)$$

$$\begin{aligned} &= (z(t_n) - u_{n-1}(t_n)) + h_n \sum_{i=1}^{s+1} b_i(\theta) [f(t_n, z(t_n), \dot{z}(t_n) \\ &\quad - \tau(t_n, y(t_n))) - f(t_n, u_{n-1}(t_n), \dot{z}_0(t_n - \tau(t_n, u_{n-1}(t_n))))] \\ &\quad + O(h_n^2) \end{aligned} \quad \dots(1)$$

ولقيم $i = 2, \dots, s+1$ لدينا:

$$\begin{aligned} &z_n(t_n + \theta h_n) - u_n(t_n + \theta h_n) \\ &= (z(t_n) - u_{n-1}(t_n)) + h_n \sum_{i=1}^{s+1} b_i(\theta) [f(t_n, z(t_n), \dot{z}(t_n) \\ &\quad - \tau(t_n, y(t_n))) - f(t_n + c_i h_n, Y_i(t_n), \dot{z}_0(t_n + c_i h_n - \tau(t_n + c_i h_n, Y_i(t_n))))] + O(h_n^2) \end{aligned} \quad \dots(2),$$

$$Y_i(t_n) = u_{n-1}(t_n) + h_n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j \quad \text{إذ أن:}$$

وإذا كان $t_n + c_i h_n - \tau(t_n + c_i h_n) \leq t_n + c_i h_n$ عندئذ يكون لدينا حالة المعادلة (2)

ذاتها ، في حين إذا كان $i \leq s_1 + 1$ فإنه يحل محل $\hat{z}_0$ في المعادلة (2) القيمة $\hat{z}_{i-2}$ وإلا إذا

كانت $i > s_1 + 1$ فإنه يحل محل $\hat{z}_0$ في المعادلة (2) القيمة $\hat{z}_{s_1}$ إذ إن s_1 تمثل أكبر عدد لمشتقة

الاندراج الخاص لكل خطوة. سنبرهن التقارب (convergence) في حالة $\hat{z}_0$ وبنفس الطريقة

يمكن البرهان في حالة $\hat{z}_{i-2}$ أو $\hat{z}_{s_1}$

$$\begin{aligned}
 & \|z_n(t_n + \theta h_n) - u_n(t_n + \theta h_n)\| \\
 & \leq \|z(t_n) - u_{n-1}(t_n)\| \\
 & + h_n \sum_{i=1}^{s+1} b_i(\theta) \left[L_1 \|z(t_n) - u_{n-1}(t_n)\| \right. \\
 & \left. + L_3 \left\| \dot{z}(t_n - \tau(t_n, y(t_n))) - \dot{z}_0(t_n - \tau(t_n, u_{n-1}(t_n))) \right\| \right] + O(h_n^2) \\
 & \leq \beta_{n-1}(t) + h_n \sum_{i=1}^{s+1} b_i(\theta) [L_1 \beta_{n-1}(t) + L_3 \left\| \dot{z}(t_n - \tau(t_n, y(t_n))) - \right. \\
 & \left. \dot{z}_0(t_n - \tau(t_n, u_{n-1}(t_n))) \right\|] + O(h_n^2) \dots(3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \|z_n(t_n + \theta h_n) - u_n(t_n + \theta h_n)\| \\
 & \leq \|z(t_n) - u_{n-1}(t_n)\| \\
 & + h_n \sum_{i=1}^{s+1} b_i(\theta) \left[L_1 \|z(t_n) - Y_i(t_n)\| \right. \\
 & \left. + L_3 \left\| \dot{z}(t_n - \tau(t_n, y(t_n))) - \dot{z}_0(t_n + c_i h_n - \tau(t_n + c_i h_n, Y_i(t_n))) \right\| \right] \\
 & + O(h_n^2) \\
 & \leq \beta_{n-1}(t) \\
 & + h_n \sum_{i=1}^{s+1} b_i(\theta) [L_1 \beta_{n-1}(t) \\
 & + L_3 \left\| \dot{z}(t_n - \tau(t_n, y(t_n))) - \dot{z}_0(t_n + c_i h_n - \tau(t_n + c_i h_n, Y_i(t_n))) \right\|] \\
 & + O(h_n^2) \dots(4)
 \end{aligned}$$

إذ إن: $Y_i(t_n) = u_{n-1}(t_n) + h_n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j$ الآن لنفرض أن $0 \leq \sum_{i=1}^{s+1} b_i(\theta) \leq 1$ وبما أن $\gamma_{(n)}(t) = \max_{t_n \leq \tau \leq t_{n+1}} \|\dot{z}(t) - \dot{y}(t)\|$ والأيمن هو أكبر من $\beta_{n-1}(t)$ وباستخدام المأخوذة (٢) فيكون لدينا:

$$\begin{aligned}
 & \beta_n(t) \leq \beta_{n-1}(t) \\
 & + h_n [L_1 \beta_{n-1}(t) + L_3 \left\| \dot{z}(t_n - \tau(t_n, y(t_n))) - \dot{z}_0(t_n - \tau(t_n, u_{n-1}(t_n))) \right\| \\
 & + L_3 L_{\dot{y}} L_{\tau} \beta_{n-1}(t)] + c_1 h_n^2 \\
 & \therefore \beta_n(t) \leq [1 + h_n (L_1 + L_3 L_{\dot{y}} L_{\tau})] \beta_{n-1}(t) + h_n L_3 \gamma_{n-1}(t) + c_1 h_n^2 \dots (5) \\
 & \beta_n(t) \leq \beta_{n-1}(t) + h_n [L_1 \beta_{n-1}(t) \\
 & + L_3 \left\| \dot{z}(t_n - \tau(t_n, y(t_n))) - \dot{z}_0(t_n + c_i h_n - \tau(t_n + c_i h_n, Y_i(t_n))) \right\| \\
 & + L_3 L_{\dot{y}} L_{\tau} \beta_{n-1}(t)] + c_1 h_n^2 \\
 & \therefore \beta_n(t) \leq [1 + h_n (L_1 + L_3 L_{\dot{y}} L_{\tau})] \beta_{n-1} + h_n L_3 \gamma_{n-1}(t) + c_1 h_n^2 \dots(6)
 \end{aligned}$$

إذ إن c_1 يمثل عدد غير سالب وأن $Y_i(t_n) = u_{n-1}(t_n) + h_n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j$ وايضا باستخدام الماخوذة (2) يكون لدينا:

$$\begin{aligned}
 & \|\dot{z}_n(t_n + \theta h_n) - \dot{u}_n(t_n + \theta h_n)\| \\
 & \leq L_1 \|z(t_n) - u_{n-1}(t_n)\| \\
 & + L_3 \left\| \dot{z}(t_n - \tau(t_n, y(t_n))) - \dot{z}_0(t_n - \tau(t_n, u_{n-1}(t_n))) \right\| + O(h_n) \\
 & \leq L_1 \|z(t_n) - u_{n-1}(t_n)\| \\
 & + L_3 \left\| \dot{z}(t_n - \tau(t_n, y(t_n))) - \dot{z}_0(t_n - \tau(t_n, u_{n-1}(t_n))) \right\| + L_3 L_y L_\tau \\
 & + c_2 h_n \leq (L_1 + L_3 L_y L_\tau) \|z(t_n) - u_{n-1}(t_n)\| + L_3 \gamma_n(t) + c_2 h_n \\
 & \leq (L_1 + L_3 L_y L_\tau) \beta_n(t) + L_3 \gamma_n(t) + c_2 h_n \quad \dots(7)
 \end{aligned}$$

إذ أن c_2 يمثل عدد غير سالب. كذلك

$$\begin{aligned}
 & \|\dot{z}_n(t_n + \theta h_n) - \dot{u}_n(t_n + \theta h_n)\| \\
 & \leq L_1 \|z(t_n) - Y_i(t_n)\| \\
 & + L_3 \left\| \dot{z}(t_n - \tau(t_n, y(t_n))) - \dot{z}_0(t_n + c_1 h_n - \tau(t_n + c_1 h_n, Y_i(t_n))) \right\| \\
 & + O(h_n) \leq (L_1 + L_3 L_y L_\tau) \|z(t_n) - Y_i(t_n)\| + L_3 \gamma_n(t) + c_2 h_n \\
 & \leq (L_1 + L_3 L_y L_\tau) \beta_n(t) + L_3 \gamma_n(t) + c_2 h_n \quad \dots(8)
 \end{aligned}$$

ومن المعادلتين (7) و (8)، نستنتج أن في كلا الحالتين سواء u_{n-1} أم Y_i يكون لدينا:

$$\|\dot{z}_n(t_n + \theta h_n) - \dot{u}_n(t_n + \theta h_n)\| \leq (L_1 + L_3 L_y L_\tau) \beta_n(t) + L_3 \gamma_n(t) + c_2 h_n \quad \dots(9)$$

الآن لنفرض أن

$$\begin{aligned}
 \gamma_n(t) &= \|\dot{z}_i(t_i + \theta h_i) - \dot{u}_i(t_i + \theta h_i)\| \\
 &\leq (L_1 + L_3 L_y L_\tau) \beta_i(t) + L_3 \gamma_i(t) + c_2 h_i \\
 \therefore \gamma_n(t) &\leq (L_1 + L_3 L_y L_\tau) \beta_n(t) + L_3 \gamma_n(t) + c_2 H
 \end{aligned}$$

$$H = \max_i h_i$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \gamma_n(t) - L_3 \gamma_n(t) &\leq (L_1 + L_3 L_y L_\tau) \beta_n(t) + c_2 H \\
 (1 - L_3) \gamma_n(t) &\leq (L_1 + L_3 L_y L_\tau) \beta_n(t) + c_2 H \\
 \therefore \gamma_n(t) &\leq \frac{1}{1 - L_3} [(L_1 + L_3 L_y L_\tau) \beta_n(t)] + \frac{1}{1 - L_3} c_2 H \quad \dots(10)
 \end{aligned}$$

نفرض أن $L = L_1 + L_3 L_y L_\tau$ وبتعويض المعادلة (10) بالمعادلة (5) أو (6) يكون لدينا:

$$\begin{aligned}
 \beta_n(t) &\leq (1 + h_n L) \beta_{n-1}(t) + h_n L_3 \frac{L}{1 - L_3} \beta_{n-1}(t) + h_n L_3 \frac{1}{1 - L_3} c_2 H \\
 &\quad + c_1 h_n^2 \leq (1 + \frac{L}{1 - L_3} h_n) \beta_{n-1}(t) + \left(c_1 h_n + \frac{c_2 L_3 H}{1 - L_3} \right) h_n \\
 &\leq (1 + \frac{L}{1 - L_3} h_n) \beta_{n-1}(t) + \left(c_1 H + \frac{c_2 L_3 H}{1 - L_3} \right) h_n \quad \text{since } H = \max_n h_n \\
 &\leq (1 + \frac{L}{1 - L_3} h_n) \beta_{n-1}(t) + \left(c_1 + \frac{c_2 L_3}{1 - L_3} \right) h_n H
 \end{aligned}$$

الآن من المأخوذة (1)، [4] يكون لدينا:

$$\beta_n(t) \leq [\beta_{-1} + \sum_{i=0}^n (c_1 + \frac{c_2 L_3}{1-L_3}) h_i H] \exp(\sum_{j=0}^n \frac{L}{1-L_3} h_j) \leq TH (c_1 + \frac{c_2 L_3}{1-L_3}) \exp(\frac{LT}{1-L_3})$$

حيث أن $T = \sum_{i=0}^n h_i$ وعليه عندما $H \rightarrow 0$ فإن $\beta_n(t) \rightarrow 0$. بذلك نستنتج أن الحل هو متقارب. ومن المعادلة (10) نستنتج أن مشتقة الحل متقاربة كذلك. أي أن:

$$\therefore \gamma_n(t) \leq \frac{H}{1-L_3} \left[LT(c_1 + \frac{c_2 L_3}{1-L_3}) \exp(\frac{LT}{1-L_3}) + c_2 \right]$$

وعندما $H \rightarrow 0$ فإن $\gamma_n(t) \rightarrow 0$.

5- التطبيق العملي:

(1-5) مجموعة مسائل: إن مجموعة المسائل الموضحة في أدناه مأخوذة من المصدر [4] والتي تعتبر من المسائل الاختبارية للمعادلات التفاضلية المتأخرة زمنياً. لقد تم اختيار هذه الحلول إما بشكلها الأملس (السهل) (smooth) أو امتلاكه لعدم استمرارية المشتقة عند بعض النقاط في مدى التكامل. لقد تم ملاحظة أن جميع المسائل المختارة تمتلك تأخيراً (delay) عند كل من الحلول والمشتقات

المسألة الأولى.

$$\begin{aligned} y''(t) &= Ay'(t-B) & t \geq 0 \\ Y(t) &= C & t \leq 0 \end{aligned}$$

$$y(t) = C \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{t}{B} \rfloor + 1} A^n \frac{(t - (n-1)B)^n}{n!} \quad t \geq 0 \text{ - الحل المضبوط:}$$

معلومات أخرى :- لقيم $A=B=C=1$ فإن الحل عند قيمة $t=10$ هو $y(10) = \frac{14640251}{44800}$

ولقيم $A=-1$ و $B=C=1$ فإن الحل عند $t=10$ هو $y(10) = \frac{10493}{518400}$

المسألة الثانية

$$y_1'(t) = 3.05 - 0.1 \exp(-0.02y_3(t)) - (1-t'(t)).(3.05 - 0.1 \exp(-0.02y_3(t-t(t)))) \quad t \geq 0$$

$$y_2'(t) = (1-t'(t)).(3.05 - 0.1 \exp(-0.02y_3(t-t(t))) - y_2(t)) \quad t \geq 0$$

$$y_3'(t) = 4.2 \exp(-0.05y_2(t)) - y_3(t) \quad t \geq 0$$

$$Y(t) = [1, 0.11]^T$$

$$t(t) = 0.2 + 1.2 \exp(-0.001 y_3(t)) \quad \text{إذ أن}$$

$$y_1(20) = 0.997721687800035 \quad \text{معلومات أخرى :- الحل المضبوط هو}$$

$$y_3(20) = 3.62275601804233 \quad \text{وأن } y_2(20) = 2.95698924553131$$

المسألة الثالثة

$$y'(t) = \cos(t)(1 + y(ty(t)^2)) + y(t)y'(ty(t)^2) - \sin(t + t \sin(t)^2) \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$Y(0) = 0$$

$$Y'(0) = 1$$

$$y(t) = \sin(t) \quad 0 \leq t \leq \frac{p}{2} \quad \text{الحل المضبوط}$$

(2-5) المطور ARCHI , ARCHI الوصف الكامل للبرنامجين

ARCHI [2](1)

صيغة هذا البرنامج (code) مبنية على أساس طريقة رانج-كوتا-الصريحة من الرتبة الخامسة لـ Domand و Prince مع اندراج من النوع quadric ذات الرتبة الخامسة. كيفية تناول عدم الاستمرارية : هنالك عملتان إما بمسار tracking أو بدون مسار not tracking ولاستخدام عملية المسار المستخدم يجب أن يخص اعتمادية عدم استمرارية المشتقة من بين مركبات المعادلات التفاضلية المتأخرة زمنيا Delay Differential Equations ، وكذلك يجب أن يخص الموقع عند عدم استمرارية المشتقات في الفترة الابتدائية ورتبة عدم استمرارية المشتقات [2]. وبذلك فإن الـ Code يقوم بتحديد عدم انتشار عدم

الاستمرارية من خلال إيجاد أصفار المعادلات غير الخطية المتعلقة والمبينة على أساس الطريقة المقترحة من قبل Wille, Baker أما المسألة أو العملية التي بدون مسار فهي مخصصة بميكانيكية سيطرة الخطأ للصيغة المشار إليها في هذا البرنامج Code.

للتأخير المتلاشي Vanishing delay هنالك عمليتان إما الاستكمال أو الاندراج.

ARCHI(2) المطور :

صيغة البرنامج المقترح الجديد (Code) إن هذه الصيغة المقترحة مبنية على أساس استخدام الطريقة الهجينة بين الاندراج الخاص والطرق التكرارية لـ RK لحل مسائل (VNDEs) والمبينة على أساس استخدام طريقة رانج-كوتا-الصريحة لـ Prince, Dormond المستخدم في البرنامج ARCHI القديم ولكن بتكوين تقريبات أولية أو اندراج خاص مبني على أساس جميع المعلومات المتوفرة من الخطوة السابقة وأول مراحل من الخطوة الحالية المحسوبة. وهذا الاندراج مبني على أساس فترتين زمنيتين، ثم استخدام هذا الاندراج الجديد مع الطرق التكرارية لطريقة RK .

التأخير المتلاشي (Vanishing delay) : إن وقوع التأخير (delay) في الخطوة الحالية المحسوبة بسبب كون التأخير أصغر من حجم الخطوة h أو قد يصل أحيانا إلى التلاشي أي $t \rightarrow 0$.

(3-5) النتائج العددية

في هذا البند نبين النتائج العددية للمسائل الثلاث التي حصلنا عليها حيث تم تلخيصها من خلال جداول توضح تلك النتائج والخطأ الناتج. إن النتائج العددية تشير إلى أن البرنامج الجديد المقترح يمتاز بالقوة والكفاءة مع مختلف أنواع المعادلات التفاضلية المتأخرة زمنيا من النوع المتحاذ ذو التأخير المتلاشي (VNDEs) مقارنة بالبرنامج القديم ARCHI

المسألة الأولى: جدول (1) مقدار الخطأ والحل عند (Xend = 10) باستخدام البرنامجين

ARCHI و Improved ARCHI لحل المسألة الأولى

مقدار الخطأ النسبي (Improved ARCHI)	مقدار الخطأ النسبي (ARCHI)	قيمة y عند Xend (Improved ARCHI)	قيمة y عند Xend (ARCHI)	ToL
-1.338640309711536E-011	5.671431564380214E-05	326.791316959911	326.809850710186	10 ⁻¹⁰
-1.338694710639743E-10	5.671419512220943E-05	326.791316920538	326.809850670800	10 ⁻⁹
-1.899848189879094E-08	5.669533160146401E-05	326.791310755747	326.809844506365	10 ⁻⁷
-5.261744620488340E-05	-2.156847192247291E-05	326.774122039745	326.784268574941	10 ⁻⁵
-1.072532158120887E-02	-1.089374933994247E-02	323.286374999897	323.231334270807	10 ⁻³

المسألة الثانية: جدول (2) مقدار الخطأ والحل عند y_1 عند $(X_{end} = 20)$ باستخدام البرنامجين

ARCHI و Improved ARCHI لحل المسألة الثانية

مقدار الخطأ النسبي (Improved ARCHI)	مقدار الخطأ النسبي (ARCHI)	قيمة y_1 عند X_{end} (Improved ARCHI)	قيمة y_1 عند X_{end} (ARCHI)	ToL
1.896192136641162E-08	2.957201061803971E-08	0.997721706718755	0.997721717304671	10^{-10}
1.645212091005988E-07	3.414536913215471E-07	0.997721851946413	0.997722028475788	10^{-9}
1.956920048451494E-06	-9.391057986696261E-06	0.997723640261609	0.997712318137810	10^{-7}
6.246361963979652E-05	-1.003882604313500E-03	0.997784009108048	0.996720092353706	10^{-5}
-0.120949259975030	-7.568106060456182E-03	0.877047987999583	0.990170824257884	10^{-3}

جدول (3) مقدار الخطأ والحل عند y_2 عند $(X_{end} = 20)$ باستخدام البرنامجين ARCHI و

Improved ARCHI لحل المسألة الثانية

مقدار الخطأ النسبي (Improved ARCHI)	مقدار الخطأ النسبي (ARCHI)	قيمة y_2 عند X_{end} (Improved ARCHI)	قيمة y_2 عند X_{end} (ARCHI)	ToL
-9.426237568277429E-012	-3.047628815977532E-011	2.95698924550344	2.95698924544119	10^{-10}
-1.020933337869678E-010	-7.030853677036930E-011	2.95698924522942	2.95698924532341	10^{-9}
-1.637299962276018E-009	-1.675896532660204E-009	2.95698924068983	2.95698924057570	10^{-7}
3.222635158728338E-08	-2.815976041903312E-06	2.95698934082429	2.95698091872044	10^{-5}
8.988221009764708E-05	-1.416647810170701E-06	2.95725502625993	2.95698505651897	10^{-3}

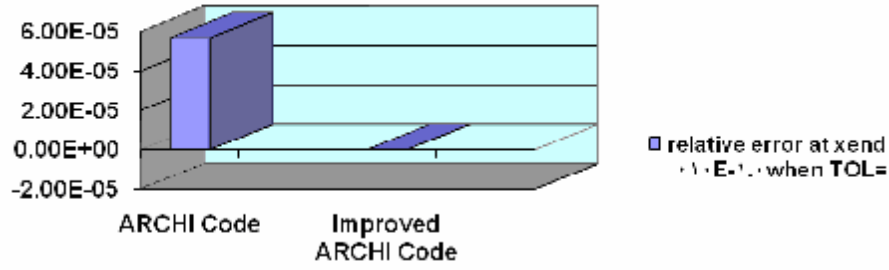
جدول (4) مقدار الخطأ والحل عند y_3 عند $(X_{end} = 20)$ باستخدام البرنامجين ARCHI و

Improved ARCHI لحل المسألة الثانية

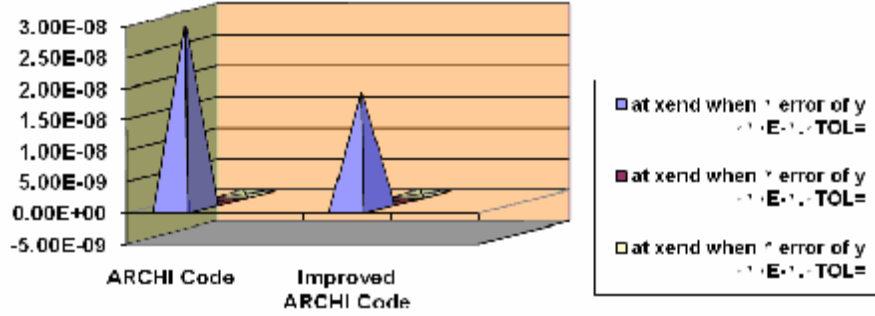
مقدار الخطأ النسبي (Improved ARCHI)	مقدار الخطأ النسبي (ARCHI)	قيمة y_2 عند X_{end} (Improved ARCHI)	قيمة y_2 عند X_{end} (ARCHI)	ToL
6.119771356338788E-012	1.778310831923591E-011	3.62275601806450	3.62275601810675	10^{-10}
5.514966261443988E-011	4.612199511200288E-011	3.62275601824212	3.62275601820942	10^{-9}
1.061315035855159E-09	1.353416045901668E-09	3.62275602188722	3.62275602294543	10^{-7}
-7.647850297498593E-08	-4.236490460329811E-06	3.62275574097937	3.62274067027102	10^{-5}
4.628785248664235E-04	-4.411177573071523E-05	3.62421554864283	3.62259621184134	10^{-3}

المسألة الثالثة: جدول (5) مقدار الخطأ والحل عند ($X_{end} = 1$) باستخدام البرنامجين ARCHI و Improved ARCHI لحل المسألة الثالثة

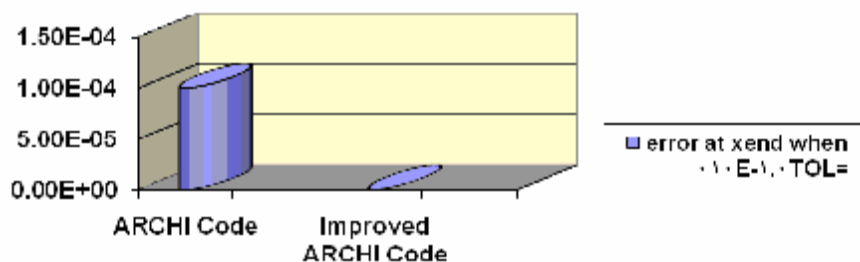
مقدار الخطأ النسبي (Improved ARCHI)	مقدار الخطأ النسبي (ARCHI)	قيمة y_2 عند X_{end} (Improved ARCHI)	قيمة y_2 عند X_{end} (ARCHI)	ToL
7.623983444560167E-09	1.000020188546280E-04	0.841470991223257	0.841555133605185	10^{-10}
1.813368883940569E-07	9.992740381026266E-05	0.841471137397627	0.841555070818790	10^{-9}
9.676552606416886E-06	9.312532403416007E-05	0.841479127346147	0.841549347066022	10^{-7}
1.287041587800089E-03	-6.543522469970586E-05	0.842553992539536	0.841415922964927	10^{-5}
-4.347237677155835E-04	-3.347506533729616E-04	0.841105177370957	0.841189301845938	10^{-3}



الشكل (1) المقارنة العددية بين الأخطاء عند النقطة النهائية للبرامج (ARCHI) و (Improve ARCHI) عند تطبيقها على المسألة الأولى وعندما $Tol=10^{-10}$



الشكل (2) المقارنة العددية بين الأخطاء عند النقطة النهائية للبرامج (ARCHI) و (Improve ARCHI) عند تطبيقها على المسألة الثانية وعندما $Tol=10^{-10}$



الشكل (3) المقارنة العددية بين الأخطاء عند النقطة النهائية للبرامج (ARCHI) و (Improve ARCHI) عند تطبيقها على المسألة الثالثة وعندما $Tol=10^{-10}$

من خلال الجداول (1)-(5) والأشكال (1)-(3) تبين إن البرنامج الجديد المقترح يكون ذات دقة أكبر وخطأ أقل من البرنامج القديم ARCHI وبذلك فإن الطريقة الهجينة تمتاز بالقوة والكفاءة مع مختلف أنواع المعادلات التفاضلية المتأخرة زمنياً من النوع VNDEs.

6- الاستنتاجات:

إن الإسهام الرئيس لهذا البحث هو بناء طريقة هجينة بين الاندراج الخاص والطريقة التكرارية لطريقة RK المستخدمة لحل مسائل (VNDEs) وتحليل التقارب للطريقة المقترحة. لقد استنتجنا أن الطريقة الهجينة بين الاندراج الخاص والطريقة التكرارية لطريقة RK بالإمكان أن تكيف لحل مسائل (VNDEs) وأن كفاءة هذه الطريقة بدت ملموسة من خلال تطبيق الطريقة الجديدة المقترحة الموضحة بالخوارزميتين (1) و (2) على البرنامج ARCHI. إن البرنامج ARCHI المطور أثبت كفاءته العالية ودقة نتائجه مقارنة بالبرنامج ARCHI الأصلي. في هذا البحث تم كذلك تحليل التقارب للطريقة الهجينة، وقد تم استنتاج أن مقياس

$$b_n(t) \leq TH \left(c_1 + \frac{c_2 L_3}{1 - L_3} \right) \exp\left(\frac{LT}{1 - L_3}\right)$$

التقارب لهذه الطريقة الهجينة المقترحة هو: $\beta_n(t) \rightarrow 0$ فإن $H \rightarrow 0$ أي أن الحل متقارب، ومشتقة الحل متقاربة كذلك في حالة التأخير المتلاشي أي لمسائل (VNDEs).

المصادر

- [1] Enright W. H. , Hu M. (1994), interpolating Runge –Kutta methods for vanishing delay differential equations. Numerical Algorithm , Vol.16,.
- [2] Faires J. D. , Burden R. L. (2003), Numerical Methods-Third Edition. Inc. Thomson Learning . Australia. Canada. Mexico. Singapore. Spain. United Kingdom. United States.
- [3] Fu H., Li S. , Chen G. (2001) , D -Convergence of Runge -Kutta Method for Stiff Delay Differential Equations. Journal of Computational Mathematics, Vol.19, No.3, pp.: 259-268.
- [4] Hayashi H. (1996) , Numerical Solution of Retarded and Neutral Delay Differential Equations using RK methods. University of Toronto, Department of Computer Sciences, Ph.D. Thesis .
- [5] Paul C. A. H. (1997), A user guide to ARCHI. University of Manchester /UMIST Manchester Center for Computational Mathematics, England, Vol.283, ISSN: 1360-1725
- [6] Paul C. A. H. (1991), Developing a Delay Differential Equation Solver. University of Manchester /UMIST Manchester Center for Computational Mathematics, England, Vol.204, ISSN: 1360-1725.
- [7] Shampine L. F., Thompson S. (2000), Solving Delay Differential Equations with DDE23. Southern Methodist University, March 23.
- [8] Shampine L. F. , Thompson S. (2001), Solving DDEs in MATLAB. Applied Numer. Math. , Vol.37, No.4 pp.: 441-458 .
- [9] Neves K.W. (1981), Control of interpolatory error in retarded differential equations . ACM Trans. Math.Soft. , 7:421-444.
- [10] Jackiewicz Z. (1981), One step methods for the numerical solution of volterra functional differential equations of neutral type.Applicable Anal., 12:1-11.