بعض النتائج في نظرية المعادلات التكاملية- التفاضلية ذات الرتب الكسرية مع شروط حدودية

عزام صلاح الدين يونس

كلية التربية

جامعة الموصل

تاريخ استلام البحث: ٢٠١٠/١/١٢ **تاريخ قبول البحث:** ٢٠١٠/٦/٢٩

ABSTRACT

This paper deals with the existence and uniqueness of the solution for a boundary value problem of fractional order integro-differential equation, when $0 < a < 1$ using Banach fixed point theorem and Shafer's fixed point theorem. This investigation based on the well known Riemann-Liouville fractional differential operator.

الملخص

تناولنا في هذه الدراسة وجود و وحدانية الحل لمعادلة تكاملية – تفاضلية ذات رتبة كسرية a عندما $0 < a < 1$ مع شروط حدودية و ذلك باستخدام مبرهنتي بناخ وشافير للنقطة الثابتة. واعتمدنا في تعريف الرتبة الكسرية على المؤثر المعروف بمؤثر ريمان- ليوفيل للمشتقة الكسرية.

أولاً: مقدمة تاريخية

لقد ارتبط حساب التفاضل و التكامل الكسري بالعديد من العلماء لعل أشهرهم Hospital G.W.,L. Leibnitz, B. Riemann و J. Liouville [3] الذين أعطوا التعاريف الأساسية للمشتقة الكسرية، ومن بعد هؤلاء استمرت الأبحاث في هذا المجال وباتجاهات مختلفة. إذ وسع الباحث Bassam. M.A. [2] تعريف Holmgren-M.Riesz وطبق النتائج التي حصل عليها على بعض نظريات الوجود للمعادلات التفاضلية الاعتيادية. ودرس كل من الباحثين AL-Abdeen A.Z و Arora H.L. [1] وجود ووحدانية الحل للمعادلة التفاضلية ذات الرتب الكسرية الآتية :

$$x^a(t) = f(t,x) \qquad x^{a-1}(t_0) = x_0, \qquad 0 < a < 1$$

مستخدمين في ذلك طريقة بناخ للنقطة الثابتة. كذلك درس [4] و[5] وجود ووحدانية الحل لمعادلات تفاضلية ذات رتب كسرية مع شروط حدودية.

في هذا البحث تناولنا وجود ووحدانية الحل لمعادلة تفاضلية- تكاملية ذات رتبة كسرية مع شروط حدودية و باستخدام المؤثر التفاضلي لريمان- ليوفل و من الشكل التالي :

$$^{R}D^{a}y(t) = f(t, y(t), I_0^t{}^{b}\Psi(s, y(s))), \quad t \in [0,T] \qquad \ldots(1)$$

مع الشرط الحدودي

$$a\, y^{a-1}(0) + b\, y^{a-1}(T) = c \qquad \ldots(2)$$

حيث f دالة معرفة ومستمرة على المجـــال $[0,T]\times R\times R$ و a,b,c ثوابـــت و أن $a+b\neq 0$ ، كـــذلك $^{R}D^{a}$ هو المؤثر التفاضلي لريمان- ليوفل.

ثانياً: تعاريف ومبرهنات

سنقدم في هذا البند بعض التعاريف التي سنستخدمها في هذا البحث.

ليكن $C[0,T]$ فضاء بناخ للدوال الحقيقية المستمرة على الفترة $[0,T]$ مع المعيار:

$$\|y\|_{\infty}=\sup\{|y(t)|:t\in[0,T]\}$$

تعريف:

لتكن الدالة f معرفة دائما تقريبا على الفترة $[a,b]$ وقابلة للقياس حسب مفهوم ليبيك ولتكن $a>0$ فيعرف التكامل من الرتبة a للدالة f الشكل

$$\overset{b}{\underset{a}{I}}{}^{a}f=\frac{1}{\Gamma a}\int_{a}^{b}(b-s)^{a-1}f(s)ds$$

بشرط أن يكون التكامل موجودا.

تعريف:

لتكن الدالة f معرفة دائما تقريبا على الفترة $[a,b]$ وقابلة للقياس حسب مفهوم ليبيك ولتكن $a>0$ فتعرف مشتقة ريمان- ليوفل من الرتبة a للدالة f بالشكل

$$(^{R}D_{a}^{a}y)(t)=D^{n}\overset{t}{\underset{a}{I}}{}^{n-a}y=\frac{1}{\Gamma(n-a)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\int_{a}^{t}(t-s)^{n-a-1}f(s)ds$$

حيث $n=[a]+1$, كما سنستخدم الرموز $^{R}D_{a}^{-a}y(t)=\overset{t}{\underset{a}{I}}{}^{a}y(s)$, $y^{(a)}(t)=^{R}D_{a}^{a}y(t)$

مبرهنة 1: [3]

لتكن f دالة قابلة للقياس على الفترة $[a,b]$ وأن $a>0$, $b>0$ فإن

$$\overset{t}{\underset{a}{I}}{}^{a}\ \overset{s}{\underset{a}{I}}{}^{b}\ f=\overset{t}{\underset{a}{I}}{}^{a+b}\ f=\overset{t}{\underset{a}{I}}{}^{b}\ \overset{s}{\underset{a}{I}}{}^{a}\ f \qquad , \qquad {}^{R}\overset{t}{\underset{a}{D}}{}^{a}\ \overset{s}{\underset{a}{I}}{}^{a}\ f=f \quad a.e.$$

مبرهنة 2: [3]

إذا كانت $a>0$ و $b>-1$ و $t>a$ فإن

$$\overset{t}{\underset{a}{I}}{}^{a}\ \frac{(s-a)^{b}}{\Gamma(b+1)}=\frac{(t-a)^{b+a}}{\Gamma(b+a+1)}$$

$${}^{R}\overset{t}{\underset{a}{D}}{}^{a}\ \frac{(s-a)^{b}}{\Gamma(b+1)}=\frac{(t-a)^{b-a}}{\Gamma(b-a+1)}$$

وإذا كانت $b-a\in Z^{-}$ فإن الطرف الأيمن يساوي صفراً لأن

$$\Gamma(b-a+1)=+\infty\ (-\infty)$$

مأخوذة:

إذا كانت $0<a<1$ و $y:(0,T]\to R$ دالة مستمرة. فان الدالة y تكون حلا للمعادلة التفاضلية من الرتبة الكسرية:

$$ {}^{R}D^{a}y(t)=f(t,y(t),\overset{t}{I}_{0}^{b}\Psi(s,y(s))),\quad t\in[0,T] \qquad \ldots(1)$$

حيث f , Y دوال مستمرة على منطلقها وتحقق الشرط الحدودي

$$a\,y^{a-1}(0)+b\,y^{a-1}(T)=c \qquad \ldots(2)$$

إذا و فقط إذا كان y حلا للمعادلة التكاملية ذات الرتبة الكسرية

$$\begin{aligned} y(t)=&\frac{1}{\Gamma a}\int_{0}^{t}(t-s)^{a-1}f(s,y(s),\overset{s}{I}_{0}^{b}\Psi(s,y(s)))ds+\\ &+\frac{t^{a-1}}{\Gamma a}\left[\frac{-b}{(a+b)}\int_{0}^{T}f(s,y(s),\overset{s}{I}_{0}^{b}\Psi(s,y(s)))ds+\frac{c}{(a+b)}\right] \end{aligned} \qquad \ldots(3)$$

البرهان:

ليكن y حلا للمعادلة التفاضلية (1) ويحقق الشرط الحدودي (2). بأخذ التكامل لطرفي المعادلة (1) فإن

$$\overset{t}{I}_{0}^{1}\ {}^{R}D^{a}y(s)=y_{0}+\int_{0}^{t}f(s,y(s),\overset{s}{I}_{0}^{b}\Psi(s,y(s)))ds$$

حيث أن y_0 هو ثابت اختياري، كما يمكن كتابتها بالشكل

$$y^{(a-1)}(t)=y_{0}+\int_{0}^{t}f(s,y(s),\overset{s}{I}_{0}^{b}\Psi(s,y(s)))ds \qquad \ldots(4)$$

ومنها نجد أن

$$y^{(a-1)}(0)=y_{0}$$

$$y^{(a-1)}(T)=y_{0}+\int_{0}^{T}f(s,y(s),\overset{s}{I}_{0}^{b}\Psi(s,y(s)))ds$$

وبتعويض قيم $y^{(a-1)}(0)$ و $y^{(a-1)}(T)$ في الشرط الحدودي (2) فإن

$$ay_{0}+b\left(y_{0}+\int_{0}^{T}f(s,y(s),\overset{s}{I}_{0}^{b}\Psi(s,y(s)))ds\right)=c$$

ومنها نحسب قيمة y_0

$$y_{0}=-\frac{b}{a+b}\int_{0}^{T}f(s,y(s),\overset{s}{I}_{0}^{b}\Psi(s,y(s)))ds+\frac{c}{a+b}$$

بالعودة إلى المعادلة (4) وملاحظة تكافؤ الرموز $y^{(a-1)}(t)=\overset{t}{I}_{0}^{1-a}y(s)$ فإن

$$\overset{t}{I}_{0}^{1-a}y(s)=y_{0}+\int_{0}^{t}f(s,y(s),\overset{s}{I}_{0}^{b}\Psi(s,y(s)))ds$$

نشتق حدود المعادلة ونجعلها من الرتبة $a-1$ وحسب المبرهنة (1) والمبرهنة (2) فإن

$$\begin{aligned}
{}_0^tD^{1-a}\ {}_0^tI^{1-a}\ y(s) &= {}_0^tD^{1-a}\ y_0 + {}_0^tD^{1-a}\int_0^t f(s,y(s),{}_0^sI^b\,\Psi(s,y(s)))ds \\
&= y_0\frac{t^{a-1}}{\Gamma(a)} + D\,{}_0^tI^a\int_0^t f(s,y(s),{}_0^sI^b\,\Psi(s,y(s)))ds \\
&= y_0\frac{t^{a-1}}{\Gamma(a)} + D\int_0^t {}_0^tI^a\ f(s,y(s),{}_0^sI^b\,\Psi(s,y(s)))ds
\end{aligned}$$

$$y(t) = y_0\frac{t^{a-1}}{\Gamma(a)} + {}_0^tI^a\ f(s,y(s),{}_0^sI^b\,\Psi(s,y(s)))ds$$

وبتعويض قيمة y_0 نستنتج

$$\begin{aligned}
y(t) &= \frac{1}{\Gamma a}\int_0^t (t-s)^{a-1} f(s,y(s),{}_0^sI^b\,\Psi(s,y(s)))ds + \\
&+\frac{t^{a-1}}{\Gamma a}\left[\frac{-b}{(a+b)}\int_0^T f(s,y(s),{}_0^sI^b\,\Psi(s,y(s)))ds + \frac{c}{(a+b)}\right]
\end{aligned}$$

مما يعني أن كل حل للمعادلة التفاضلية (1) يحقق الشرط الحدودي (2) سيكون حلا للمعادلة التكاملية (3).

ولإثبات العكس نبدأ بالمعادلة التكاملية (3) وليكن y حلا لها. نشتق طرفي المعادلة ونجعلها من الرتبة a

$$\begin{aligned}
y^{(a)}(t) &= D_0^a\,{}_0^tI^a\ f(s,y(s),{}_0^sI^b\,\Psi(s,y(s))) + \\
&+D_0^a\frac{t^{a-1}}{\Gamma a}\left[\frac{-b}{(a+b)}\int_0^T f(s,y(s),{}_0^sI^b\,\Psi(s,y(s)))ds + \frac{c}{(a+b)}\right]
\end{aligned}$$

وحسب المبرهنتين (1) و(2) نستنتج

$$y^{(a)}(t) = f(t,y(t),{}_0^tI^b\,\Psi(s,y(s)))$$

أي أن الدالة y تحقق المعادلة التفاضلية (1).

بقي أن نثبت أن y تحقق الشرط الحدودي (2)، بأخذ التكامل من الرتبة $a-1$ لطرفي المعادلة التكاملية (3)

وبملاحظة تكافؤ المؤثرين ${}_0^tI^{1-a}\,y(s) = y^{(a-1)}(t)$ فإن

$$\begin{aligned}
y^{(a-1)}(t) &= {}_0^tI^{1-a}\ {}_0^tI^a\ f(s,y(s),{}_0^sI^b\,\Psi(s,y(s))) + \\
&+{}_0^tI^{1-a}\frac{t^{a-1}}{\Gamma a}\left[\frac{-b}{(a+b)}\int_0^T f(s,y(s),{}_0^sI^b\,\Psi(s,y(s)))ds + \frac{c}{(a+b)}\right]
\end{aligned}$$

وحسب المبرهنتين (1) و(2) نستنتج

$$\begin{aligned}
y^{(a-1)}(t) &= \int_0^t f(s,y(s),{}_0^sI^b\,\Psi(s,y(s)))ds \\
&+\left[\frac{-b}{(a+b)}\int_0^T f(s,y(s),{}_0^sI^b\,\Psi(s,y(s)))ds + \frac{c}{(a+b)}\right]
\end{aligned}$$

وتكون القيم الحدودية للدالة y:

$$y^{(a-1)}(0)=\left[\frac{-b}{(a+b)}\int_0^T f(s,y(s),\overset{s}{I}_0^{\,b}\Psi(s,y(s)))ds+\frac{c}{(a+b)}\right]$$

$$y^{(a-1)}(T)=\int_0^T f(s,y(s),\overset{s}{I}_0^{\,b}\Psi(s,y(s)))ds+$$
$$+\left[\frac{-b}{(a+b)}\int_0^T f(s,y(s),\overset{s}{I}_0^{\,b}\Psi(s,y(s)))ds+\frac{c}{(a+b)}\right]$$

$$\therefore ay^{a-1}(0)+by^{a-1}(T)=a\left[\frac{-b}{(a+b)}\int_0^T f(s,y(s),\overset{s}{I}_0^{\,b}\Psi(s,y(s)))ds+\frac{c}{(a+b)}\right]$$
$$+b\left[\int_0^T f(s,y(s),\overset{s}{I}_0^{\,b}\Psi(s,y(s)))ds+\right.$$
$$\left.+\left[\frac{-b}{(a+b)}\int_0^T f(s,y(s),\overset{s}{I}_0^{\,b}\Psi(s,y(s)))ds+\frac{c}{(a+b)}\right]\right]$$
$$=\left[\frac{-ab+b(b+a)-b^2}{(a+b)}\right]\int_0^T f(s,y(s),\overset{s}{I}_0^{\,b}\Psi(s,y(s)))ds+\frac{(a+b)c}{(a+b)}$$
$$=c$$

لذا فإن كل حل للمعادلة التكاملية (3) سوف يكون حلا للمعادلة التفاضلية (1) ويحقق الشرط الحدودي (2)

ثالثاً: وجود ووحدانية الحل

في هذا البند سنبرهن وجود ووحدانية الحل للمسالة (1)-(2) باستخدام مبرهنة بناخ للنقطة الثابتة حسب مفهوم التطبيقات الانكماشية على فضاء بناخ $C[0,T]$.

مبرهنة:

إذا كانت $f:[0,T]\times R\times R\to R$ و $\Psi:[0,T]\times R\to R$ دوالاً مستمرة. وإذا كانت K_1,K_2,K_3 ثوابت موجبة بحيث أنه لكل $t\in[0,T]$ و $y_1,y_2,w_1,w_2\in R$ فإن

$$|f(t,y_1,w_1)-f(t,y_2,w_2)|\le K_1|y_1-y_2|+K_2|w_1-w_2| \quad \ldots(5)$$

$$|\Psi(t,y_1)-\Psi(t,y_2)|\le K_3|y_1-y_2| \quad \ldots(6)$$

وإذا كانت

$$\left[\left(\frac{K_1\Gamma(a)T^a}{\Gamma(2a)}+\frac{K_2K_3\Gamma(a)T^{a+b}}{\Gamma(2a+b)}\right)+\frac{b}{(a+b)}\left(\frac{K_1T^a}{\Gamma(a+1)}+\frac{K_2K_3T^{a+b}}{\Gamma(a+b+1)}\right)\right]<1 \quad \ldots(7)$$

فان للمعادلة (1) مع الشرط الحدودي (2) حل وحيد على الفترة $(0,T]$.

البرهان:

لإثبات وجود ووحدانية الحل للمسألة (1)-(2) على الفترة $(0,T]$ سنستفيد من النقطة الثابتة للمؤثر:

$$T:C[0,T]\to C[0,T]$$

$$T(y)(t)=t^{1-a}\Gamma(a)\,{}_0^tI^a\, f(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y(s),{}_0^sI^b\,\Psi(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y(s)))+$$
$$-\frac{b}{(a+b)}\int_0^T f(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y(s),{}_0^sI^b\,\Psi(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y(s)))ds+\frac{c}{(a+b)}$$

ولكل $y_1,y_2\in C[0,T]$ فإن

$$|T(y_1)(t)-T(y_2)(t)|\le t^{1-a}\Gamma(a)\,{}_0^tI^a\left|f(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y_1(s),{}_0^sI^b\,\Psi(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y_1(s)))-\right.$$
$$\left.-f(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y_2(s),{}_0^sI^b\,\Psi(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y_2(s)))\right|+$$
$$+\frac{b}{(a+b)}\int_0^T\left|f(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y_1(s),{}_0^sI^b\,\Psi(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y_1(s)))\right.$$
$$\left.-f(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y_2(s),{}_0^sI^b\,\Psi(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y_2(s)))\right|ds$$

ومن الشرط (5) و(6) نحصل على

$$|T(y_1)(t)-T(y_2)(t)|\le t^{1-a}\Gamma(a)\,{}_0^tI^a\left(K_1\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}|y_1(s)-y_2(s)|+\right.$$
$$\left.+K_2\,{}_0^sI^b\left|\Psi(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y_1(s))-\Psi(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y_2(s))\right|\right)$$
$$+\frac{b}{(a+b)}\int_0^T\left(K_1\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}|y_1(s)-y_2(s)|+\right.$$
$$\left.+K_2\,{}_0^sI^b\left|\Psi(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y_1(s))-\Psi(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y_2(s))\right|\right)ds$$
$$\le t^{1-a}\Gamma(a)\,{}_0^tI^a\left(\frac{K_1s^{a-1}}{\Gamma(a)}|y_1(s)-y_2(s)|+K_2K_3\,{}_0^sI^b\,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}|y_1(s)-y_2(s)|\right)+$$
$$+\frac{b}{(a+b)}\int_0^T\left(\frac{K_1s^{a-1}}{\Gamma(a)}|y_1(s)-y_2(s)|+K_2K_3\,{}_0^sI^b\,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}|y_1(s)-y_2(s)|\right)ds$$
$$\le t^{1-a}\Gamma(a)\,{}_0^tI^a\left(\frac{K_1s^{a-1}}{\Gamma(a)}|y_1(s)-y_2(s)|+K_2K_3\,{}_0^sI^b\,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}|y_1(s)-y_2(s)|\right)+$$
$$+\frac{b}{(a+b)}\int_0^T\left(\frac{K_1s^{a-1}}{\Gamma(a)}|y_1(s)-y_2(s)|+K_2K_3\,{}_0^sI^b\,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}|y_1(s)-y_2(s)|\right)ds$$
$$\le t^{1-a}\Gamma(a)\,{}_0^tI^a\left(K_1\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}+K_2K_3\,{}_0^sI^b\,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}\right)\|y_1-y_2\|+$$
$$+\frac{b}{(a+b)}\int_0^T\left(K_1\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}+K_2K_3\,{}_0^sI^b\,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}\right)ds\|y_1-y_2\|$$

$$= t^{1-a}\Gamma(a)\,I_0^{t\,a}\left(K_1\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}+K_2K_3\frac{s^{a+b-1}}{\Gamma(a+b)}\right)\|y_1-y_2\|+$$

$$+\frac{b}{(a+b)}\int_0^T\left(K_1\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}+K_2K_3\frac{s^{a+b-1}}{\Gamma(a+b)}\right)ds\|y_1-y_2\|$$

$$= t^{1-a}\Gamma(a)\left(K_1\frac{s^{2a-1}}{\Gamma(2a)}+K_2K_3\frac{s^{2a+b-1}}{\Gamma(2a+b)}\right)\|y_1-y_2\|+$$

$$+\frac{b}{(a+b)}\left(K_1\frac{T^a}{\Gamma(a+1)}+K_2K_3\frac{T^{a+b}}{\Gamma(a+b+1)}\right)\|y_1-y_2\|$$

$$=\left(K_1\frac{\Gamma(a)s^a}{\Gamma(2a)}+K_2K_3\frac{\Gamma(a)s^{a+b}}{\Gamma(2a+b)}\right)\|y_1-y_2\|+$$

$$+\frac{b}{(a+b)}\left(K_1\frac{T^a}{\Gamma(a+1)}+K_2K_3\frac{T^{a+b}}{\Gamma(a+b+1)}\right)\|y_1-y_2\|$$

$$\le\left[\left(K_1\frac{\Gamma(a)T^a}{\Gamma(2a)}+K_2K_3\frac{\Gamma(a)T^{a+b}}{\Gamma(2a+b)}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{b}{(a+b)}\left(K_1\frac{T^a}{\Gamma(a+1)}+K_2K_3\frac{T^{a+b}}{\Gamma(a+b+1)}\right)\right]\|y_1-y_2\|$$

$$\therefore\|T(y_1)-T(y_2)\|\le\left[\left(K_1\frac{\Gamma(a)T^a}{\Gamma(2a)}+K_2K_3\frac{\Gamma(a)T^{a+b}}{\Gamma(2a+b)}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{b}{(a+b)}\left(K_1\frac{T^a}{\Gamma(a+1)}+K_2K_3\frac{T^{a+b}}{\Gamma(a+b+1)}\right)\right]\|y_1-y_2\|$$

ومن الشرط (7) نستنتج أن المؤثر T هو مؤثر انكماشي على الفضاء $C[0,T]$ و حسب مبرهنة بناخ للنقطة الثابتة فان المؤثر T يمتلك نقطة ثابتة وحيدة ولتكن z أي أنه

$$z(t)=T(z)(t)$$

$$\therefore z(t)=t^{1-a}\Gamma(a)I_0^{t\,a}f(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}z(s),I_0^{s\,b}\Psi(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}z(s)))-$$

$$-\frac{b}{(a+b)}\int_0^T f(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}z(s),I_0^{s\,b}\Psi(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}z(s)))ds+\frac{c}{(a+b)}$$

$$\therefore\frac{t^{a-1}}{\Gamma(a)}z(t)=I_0^{t\,a}f(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}z(s),I_0^{s\,b}\Psi(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}z(s)))+$$

$$+\frac{t^{a-1}}{\Gamma(a)}\left(-\frac{b}{(a+b)}\int_0^T f(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}z(s),I_0^{s\,b}\Psi(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}z(s)))ds+\frac{c}{(a+b)}\right)$$

بوضع $y(t)=\frac{t^{a-1}}{\Gamma(a)}z(t)$ نستنتج

$$y(t)=\frac{1}{\Gamma a}\int_0^t (t-s)^{a-1} f(s,y(s),\overset{s}{I}_0^{\,b}\,\Psi(s\,,y(s)))ds+$$
$$+\frac{t^{a-1}}{\Gamma a}\left[\frac{-b}{(a+b)}\int_0^T f(s,y(s),\overset{s}{I}_0^{\,b}\,\Psi(s\,,y(s)))ds+\frac{c}{(a+b)}\right]$$

وتكون الدالة $y(t)$ حلا للمعادلة (1) على الفترة $[0,T)$ مع الشرط (2).

بقي أن نثبت أن الدالة $y(t)$ هي الحل الوحيد للمعادلة (1) مع الشرط (2). لذا نفرض وجود حل آخر $\tilde{y}(t)$ فإن

$$\tilde{y}(t)=\frac{1}{\Gamma a}\int_0^t (t-s)^{a-1} f(s,\tilde{y}(s),\overset{s}{I}_0^{\,b}\,\Psi(s\,,\tilde{y}(s)))ds+$$
$$+\frac{t^{a-1}}{\Gamma a}\left[\frac{-b}{(a+b)}\int_0^T f(s,\tilde{y}(s),\overset{s}{I}_0^{\,b}\,\Psi(s\,,\tilde{y}(s)))ds+\frac{c}{(a+b)}\right]$$

بوضع $\tilde{z}(t)=t^{1-a}\Gamma(a)\tilde{y}(t)$ فإن

$$\tilde{y}(t)=\frac{t^{a-1}}{\Gamma(a)}\tilde{z}(t)$$
$$\frac{t^{a-1}}{\Gamma(a)}\tilde{z}(t)=\overset{t}{I}_0^{\,a} f(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}\tilde{z}(s),\overset{s}{I}_0^{\,b}\,\Psi(s\,,\frac{s^{\,a-1}}{\Gamma(a)}\tilde{z}(s)))+$$
$$+\frac{t^{a-1}}{\Gamma(a)}\left(-\frac{b}{(a+b)}\int_0^T f(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}\tilde{z}(s),\overset{s}{I}_0^{\,b}\,\Psi(s\,,\frac{s^{\,a-1}}{\Gamma(a)}\tilde{z}(s)))ds+\frac{c}{(a+b)}\right)$$
$$\therefore \tilde{z}(t)=t^{1-a}\Gamma(a)\overset{t}{I}_0^{\,a} f(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}\tilde{z}(s),\overset{s}{I}_0^{\,b}\,\Psi(s\,,\frac{s^{\,a-1}}{\Gamma(a)}\tilde{z}(s)))-$$
$$-\frac{b}{(a+b)}\int_0^T f(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}\tilde{z}(s),\overset{s}{I}_0^{\,b}\,\Psi(s\,,\frac{s^{\,a-1}}{\Gamma(a)}\tilde{z}(s)))ds+\frac{c}{(a+b)}$$
$$\therefore \tilde{z}(t)=T(\tilde{z})(t)$$

مما يعني أن $\tilde{z}$ تمثل نقطة ثابتة للمؤثر T، ولكن النقطة الثابتة للمؤثر وحيدة لذلك $\tilde{z}=z$ وأن

$$\tilde{y}(t)=\frac{t^{a-1}}{\Gamma(a)}\tilde{z}(t)=\frac{t^{a-1}}{\Gamma(a)}z(t)=y(t)$$

وبذلك نكون قد أثبتنا وحدانية الحل للمعادلة (1) والشرط (2).

ثالثا: وجود الحل

في هذا البند سنبرهن وجود الحل للمسالة (1)-(2) تحت شروط أخف من الشروط السابقة باستخدام مبرهنة شافير للنقطة الثابتة على فضاء بناخ $C[0,T]$.

مبرهنة:

إذا كانت

1- الدالة $f:[0,T]\times R\times R\to R$ مستمرة.

2- يوجد ثابت $M>0$ بحيث أن

$$|f(t,y,z)| \le M \qquad \ldots(8)$$

لكل $t \in [0,T]$ و $y,z \in R$.

فان المعادلة (1) مع الشرط الحدودي (2) تمتلك حلا واحدا على الأقل على الفترة $(0,T]$.

البرهان:

لإثبات وجود الحل للمسألة (1)-(2) على الفترة $(0,T]$ سنستفيد من النقطة الثابتة للمؤثر:

$$T : C[0,T] \to C[0,T]$$

$$T(y)(t) = t^{1-a}\Gamma(a)\,{}_0^t I^a f(s, \frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)} y(s), {}_0^s I^b \Psi(s, \frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)} y(s))) +$$

$$- \frac{b}{(a+b)} \int_0^T f(s, \frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)} y(s), {}_0^s I^b \Psi(s, \frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)} y(s)))ds + \frac{c}{(a+b)}$$

سوف نستخدم مبرهنة شافير للنقطة الثابتة لبرهان أن المؤثر $T(y)$ يمتلك نقطة ثابتة وسنجزئ هذا البرهان إلى عدة مراحل:

i. $T(y)$ تطبيق مستمر.

ii. صور المجاميع المقيدة تحت التطبيق $T(y)$ تكون مجاميع مقيدة في $C([0,T],R)$.

iii. صور المجاميع المقيدة تحت التطبيق $T(y)$ تكون مجاميع متساوية الاستمرارية في $C([0,T],R)$.

iv. شرط القيود الأولية (A priority bounds).

i. إثبات الجزء الأول من البرهان:

لإثبات أن التطبيق $T(y)$ مستمر لتكن $\{y_n\}$ متتابعة متقاربة في $C([T,0],R)$ ولتكن $y_n \to y$.

فلكل $t \in [0,T]$ يكون

$$|T(y_n)(t) - T(y)(t)| \le t^{1-a} \int_0^t (t-s)^{a-1} \Big| f(s, \frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)} y_n(s), {}_0^s I^b \Psi(s, \frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)} y_n(s))) -$$

$$- f(s, \frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)} y(s), {}_0^s I^b \Psi(s, \frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)} y(s))) \Big| +$$

$$+ \frac{b}{(a+b)} \int_0^T \Big| f(s, \frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)} y_n(s), {}_0^s I^b \Psi(s, \frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)} y_n(s)))$$

$$- f(s, \frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)} y(s), {}_0^s I^b \Psi(s, \frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)} y(s))) \Big| ds$$

وباستخدام المعيار المعرف $\|y\|_\infty = \sup\{|y(t)| : t \in [0,T]\}$

$$|T(y_n)(t) - T(y)(t)| = t^{1-a} \int_0^t (t-s)^{a-1} \sup_{s \in [0,T]} \Big| f(s, \frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)} y_n(s), {}_0^s I^b \Psi(s, \frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)} y_n(s))) -$$

$$- f(s, \frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)} y(s), {}_0^s I^b \Psi(s, \frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)} y(s))) \Big| +$$

$$+\frac{b}{(a+b)}\int_0^T \sup_{s\in[0,T]}\left| f(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y_n(s),I_0^{s\,b}\,\Psi(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y_n(s))) - f(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y(s),I_0^{s\,b}\,\Psi(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y(s)))\right| ds$$

$$\le \left\| f(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y_n(s),I_0^{s\,b}\,\Psi(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y_n(s))) - f(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y(s),I_0^{s\,b}\,\Psi(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y(s)))\right\| * \left[t^{1-a}\int_0^t (t-s)^{a-1}ds + \frac{b}{(a+b)}\int_0^T ds\right]$$

$$\le \left\| f(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y_n(s),I_0^{s\,b}\,\Psi(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y_n(s))) - f(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y(s),I_0^{s\,b}\,\Psi(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y(s)))\right\| * \left[\frac{T}{a}+\frac{b}{(a+b)}T\right]$$

وبما أن f دالة مستمرة نحصل على

$$\le \left\| f(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y_n(s),I_0^{s\,b}\,\Psi(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y_n(s))) - f(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y(s),I_0^{s\,b}\,\Psi(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y(s)))\right\| * \left[\frac{T}{a}+\frac{b}{(a+b)}T\right] \longrightarrow 0 \quad \text{عندما} \quad n\longrightarrow\infty$$

ii. إثبات الجزء الثاني:

لإثبات أن صور المجاميع المقيدة تحت التطبيق $T(y)$ تكون مجاميع مقيدة يكفي أن نبرهن أن لكل $h>0$ يوجد عدد ثابت موجب مثل t بحيث أن لكل $y\in B_h=\{y\in C([0,T],R):\|y\|_\infty\le h\}$ تكون $\|T(y)\|_\infty\le t$. لكل $t\in[0,T]$ بواسطة الشرط 2 نحصل على

$$|T(y)(t)| = t^{1-a}\Gamma(a)I_0^{t\,a}\left| f(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y(s),I_0^{s\,b}\,\Psi(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y(s)))\right| + \frac{b}{(a+b)}\int_0^T\left| f(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y(s),I_0^{s\,b}\,\Psi(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y(s)))\right| ds+\frac{c}{(a+b)}$$

ومن الشرط (8) نحصل على

$$|T(y)(t)|\le Mt^{1-a}\,t^a\,\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a+1)}+\frac{T|b|M}{|a+b|}+\frac{|c|}{|a+b|}$$

$$\therefore \|T(y)\|_\infty\le\frac{M\,T}{a}-\frac{T\,|b|M}{|a+b|}+\frac{|c|}{|a+b|}=t$$

iii. إثبات الجزء الثالث:

لإثبات أن صور المجاميع المقيدة تحت التطبيق $T(y)$ تكون مجاميع متساوية الاستمرارية في $C([0,T],R)$ نفرض $t_1,t_2\in(0,T],t_1<t_2$ ولتكن B_h مجموعة مقيدة في الفضاء $C([0,T],R)$ وأن $y\in B_h$ فان:

$$|T(y)(t_2)-T(y)(t_1)|=$$

$$=\left|t_2^{1-a}\int_0^{t_2}(t_2-s)^{a-1}f(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y(s),\overset{s}{I}_0^{b}\Psi(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y(s)))ds+\right.$$

$$\left.-t_1^{1-a}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{a-1}f(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y(s),\overset{s}{I}_0^{b}\Psi(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y(s)))ds\right|$$

$$t_2^{1-a}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{a-1}f(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y(s),\overset{s}{I}_0^{b}\Psi(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y(s)))ds$$ بإضافة وطرح الحد

$$|T(y)(t_2)-T(y)(t_1)|=$$

$$=\left|t_2^{1-a}\int_0^{t_2}(t_2-s)^{a-1}f(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y(s),\overset{s}{I}_0^{b}\Psi(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y(s)))ds+\right.$$

$$-t_2^{1-a}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{a-1}f(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y(s),\overset{s}{I}_0^{b}\Psi(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y(s)))ds+$$

$$+t_2^{1-a}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{a-1}f(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y(s),\overset{s}{I}_0^{b}\Psi(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y(s)))ds+$$

$$\left.-t_1^{1-a}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{a-1}f(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y(s),\overset{s}{I}_0^{b}\Psi(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y(s)))ds\right|$$

$$|T(y)(t_2)-T(y)(t_1)|=\left|t_2^{1-a}\int_0^{t_1}(t_2-s)^{a-1}f(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma a}y(s),\overset{s}{I}_0^{b}\Psi(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y(s)))ds+\right.$$

$$+t_2^{1-a}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{a-1}f(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma a}y(s),\overset{s}{I}_0^{b}\Psi(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y(s)))ds+$$

$$-t_2^{1-a}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{a-1}f(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma a}y(s),\overset{s}{I}_0^{b}\Psi(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y(s)))ds+$$

$$+t_2^{1-a}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{a-1}f(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma a}y(s),\overset{s}{I}_0^{b}\Psi(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y(s)))ds+$$

$$\left.-t_1^{1-a}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{a-1}f(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y(s),\overset{s}{I}_0^{b}\Psi(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y(s)))ds\right|$$

$$\leq\left|t_2^{1-a}\left[\int_0^{t_1}\left((t_2-s)^{a-1}-(t_1-s)^{a-1}\right)f(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y(s),\overset{s}{I}_0^{b}\Psi(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y(s)))ds+\right.\right.$$

$$\left.+\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{a-1}f(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y(s),\overset{s}{I}_0^{b}\Psi(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y(s)))ds\right]+$$

$$\left.+\left(t_2^{1-a}-t_1^{1-a}\right)\int_0^{t_1}(t_1-s)^{a-1}f(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y(s),\overset{s}{I}_0^{b}\Psi(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}y(s)))ds\right|$$

وحسب الشرط (8)

$$|T(y)(t_2)-T(y)(t_1)| \le Mt_2^{1-a}\left[\int_0^{t_1}(t_2-s)^{a-1}-(t_1-s)^{a-1}ds+\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{a-1}ds\right]+$$

$$+M\left(t_2^{1-a}-t_1^{1-a}\right)\int_0^{t_1}(t_1-s)^{a-1}ds$$

$$|T(y)(t_2)-T(y)(t_1)| \le \frac{Mt_2^{1-a}}{a}\left[\left(t_2^{a}-t_1^{a}\right)-(t_2-t_1)^{a}+(t_2-t_1)^{a}\right]$$

$$+\frac{M\Gamma(a)\left(t_2^{1-a}-t_1^{1-a}\right)t_1^{a}}{a}$$

$$=\frac{M}{a}\left[t_2^{1-a}\left(t_2^{a}-t_1^{a}\right)+\left(t_2^{1-a}-t_1^{1-a}\right)t_1^{a}\right]$$

وعندما $t_1 \to t_2$ فإن الطرف الأيمن من المتباينة أعلاه يقترب من الصفر من غير أن يعتمد على اختيار الدالة y مما يعني أن المجموعة B_h متساوية الاستمرارية.

الآن من النتائج التي حصلنا عليها من i. وii. وiii. نستنتج حسب مبرهنة Arzela-Ascoli أن $T:C([0,T],R)\to C([0,T],R)$ تطبيق كامل الاستمرارية (completely continuous).

iv. إثبات الجزء الرابع:

لإثبات شرط القيود الأولية يجب أن نثبت أن المجموعة

$$r=\{y\in C([0,T],R): y=lT(y),\quad for\ some\ \ 0<l<1\}$$

مقيدة.

لكل $y\in r$ يوجد $0<l<1$ بحيث $y=lT(y)$

الآن لكل $t\in[0,T]$ نحصل على

$$|y(t)|=l\,|T(y)(t)|$$

ومن برهان ii. نستنتج

$$\|y\|_\infty = l\,\|T(y)\|_\infty \le l\left(\frac{M\,T}{a}-\frac{T\,|b|M}{|a+b|}+\frac{|c|}{|a+b|}\right)$$

$$\le \frac{M\,T}{a}-\frac{T\,|b|M}{|a+b|}+\frac{|c|}{|a+b|}=t$$

و هذا يبين لنا أن المجموعة r مقيدة.

الآن وحسب مبرهنة شافير للنقطة الثابتة.نستنتج أن المؤثر T يمتلك نقطة ثابتة ولتكن z أي أن

$$z=T(z)$$

$$\therefore z(t)=t^{1-a}\Gamma(a)\,I_0^{t\,a}\,f\left(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}z(s),I_0^{s\,b}\,\Psi\left(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}z(s)\right)\right)-$$

$$-\frac{b}{(a+b)}\int_0^{T} f\left(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}z(s),I_0^{s\,b}\,\Psi\left(s,\frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)}z(s)\right)\right)ds+\frac{c}{(a+b)}$$

$$\Rightarrow \frac{t^{a-1}}{\Gamma(a)} z(t) = {}_0^t I^a \, f(s, \frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)} z(s), {}_0^s I^b \, \Psi(s, \frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)} z(s))) +$$

$$+ \frac{t^{a-1}}{\Gamma(a)} \left(- \frac{b}{(a+b)} \int_0^T f(s, \frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)} z(s), {}_0^s I^b \, \Psi(s, \frac{s^{a-1}}{\Gamma(a)} z(s))) ds + \frac{c}{(a+b)} \right)$$

بوضع $y(t) = \frac{t^{a-1}}{\Gamma(a)} z(t)$ نستنتج

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma a} \int_0^t (t-s)^{a-1} f(s, y(s), {}_0^s I^b \, \Psi(s, y(s))) ds +$$

$$+ \frac{t^{a-1}}{\Gamma a} \left[\frac{-b}{(a+b)} \int_0^T f(s, y(s), {}_0^s I^b \, \Psi(s, y(s))) ds + \frac{c}{(a+b)} \right]$$

وتكون الدالة $y(t)$ حلا للمعادلة (1) على الفترة $[0,T]$ مع الشرط (2).

المصادر

[1] AL-Abedeen, A.Z.and Arora, H.L :A global existence and uniqueness theorem for ordinary differential equation of generalized order, Canada. Math. Ball. 21(1978),276-271.

[2] Bssam,M.A :Some properties of Holmgren-Riesz transform, Ann. Scuola, Norm. Sup. Pisa. 15(1961), 1-24.

[3] Gorenflo Rudolf, Mainardi Francesco: Essentials Of Fractional Calculus. MaPhySto Cinter, preliminary version (2000).

[4] Mouffak B, Boualem A. S. Existence And Uniqueness Of Solutions To Impulsive Fractional Differential Equations. Issn: 1072-6691, Electronic Journal Of Differential Equations, Vol. 2009(2009), No. 10, pp. 1–11.

[5] Sotiris K.N Mouffak B, Samira H.. Boundary Value Problem For Differential Equation With Fractinal Order, Volume 3(2008) ISSN 1842-6298(Electronic), 1843-7265 (Print).