

المجاميع القالبية الأصغرية ذات حجم 22 في المستوى $PG(2, 13)$

فرح حازم قدو

كلية علوم الحاسبات والرياضيات

جامعة الموصل

تاريخ استلام البحث: ٢٠٠٩/٩/٦

تاريخ قبول البحث: ٢٠١٠/٤/١١

ABSTRACT

A blocking set B in projective plane $PG(2, q)$ is a set of points such that every line in the plane intersect B in at least one point and there exist a line intersect B in only one point, we say that B is minimal if B has no minimal blocking subset. In this project we proved the non-existence of minimal blocking set of size 22 contains 8-secant and not contains 9-secant in $PG(2, 13)$. Also we have proved the existence of minimal blocking set of the size 22 of redei-type. Also we give some properties of such blocking set.

الملخص

المجموعة القالبية B في المستوى الإسقاطي $PG(2, q)$ هي مجموعة نقاط بحيث أن كل خط في المستوى يقطع B بما لا يقل عن نقطة واحدة ويوجد خط يقطع B بنقطة واحدة فقط، نقول أن B أصغرية إذا لم تحتوي بداخلها على أي مجموعة أصغرية، في هذا البحث تم إثبات عدم وجود مجاميع قالبية أصغرية في المستوى $PG(2, 13)$ من الحجم (22) تمتلك قاطعاً ثمانية ولا تمتلك قاطعاً تساعياً، كذلك أثبتنا وجود مجموعة قالبية أصغرية من نوع - ريدي ذات حجم 22 في المستوى $PG(2, 13)$ وأعطينا بعض خواص المجموعات القالبية الأصغرية ذات حجم 22 في المستوى المذكور.

1- المقدمة

يقال للمجموعة B القالبية - t إنها أصغرية أو غير قابلة للتحليل عندما لا توجد مجموعة جزئية فعلية تتشكل منها مجموعة قالبية - t ، وبصورة خاصة عندما $t = 1$ فإن B تسمى مجموعة قالبية. Richardson [5] هو أول من بحث في المستويات ذات الرتب الكبيرة، كما أنه أثبت أن أصغر حجم للمجموعة القالبية في المستوى $PG(2, 3)$ هو (6). وبعد (13) سنة قدم الباحث Dipaola [2] فكرة عن المثلث الإسقاطي الذي يعد مثلاً للمجموعة القالبية ذات الحجم $(q + 1) / 2$ في المستويات الديزاريكية ذات الرتب الفردية.

2- المجاميع القالبية في المستوى الإسقاطي $PG(2, 13)$ (2-1) الإسقاط الدوار على $GF(13)$:

لتكن $F(x) = X^3 - X^2 - 2$ متعددة حدود على الحقل $GF(13)$ فإن المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

هي إسقاط دوار على المستوي $PG(2,13)$ ، المستوي الإسقاطي $PG(2,13)$ يحتوي على (183) نقطة و(183) خطاً وكل خط يحوي (14) نقطة، وكل نقطة يمر بها (14) خطاً. كما مبين في الجدول (1) و(2).
لتكن $P_1 = (1, 0, 0)$ هي النقطة الابتدائية فأن باقي نقاط المستوي يمكن إيجادها بمدار واحد باستخدام العلاقة الآتية:

$$p_i = p_{i-1} T, \forall i = 2, \dots, q^2 + q + 1$$

(2-2) مبرهنة: [3]

في المستوي الإسقاطي $PG(2,q)$ ، $q \geq 4$ توجد مجموعة قابلية ذات الحجم b حيث أن:

$$2q - 1 \leq b \leq 3q - 3$$

ملاحظة: لتكن B مجموعة قابلية ذات حجم K ولتكن n قاطع L حيث $n = 1, 2, 3, \dots, q$. فإذا كانت $n = q + 1$ فإن B تسمى تافهة.

(2-3) مبرهنة:

لتكن B مجموعة قابلية أصغريه ذات الحجم 22 في الفضاء الإسقاطي $PG(2,13)$ وليكن L قاطعاً لـ B من النقاط فأن:

$$1 \leq n \leq 9$$

البرهان:

ليكن L هو قاطع لـ B ولتكن $P = (x, y, z)$ نقطة في الفضاء الإسقاطي $PG(2,q)$ ، $P \in L \setminus B$.
ليكن L هو قاطع لـ B بعشرة نقاط وبما أنه يوجد من النقطة P ثلاثة عشر خطاً يقطع B بنقطة واحدة على الأقل فإنه بتوزيع نقاط B على الخطوط الثلاثة عشر سيظهر خط خارجي وهذا تناقض.

(2-4) مبرهنة:

يوجد على الأكثر ثلاثة عشر قاطعاً أحادياً يمر خلال نقطة لا تنتمي إلى B

البرهان:

نفرض أنه يوجد أربعة عشر قاطعاً أحادياً فإنه

$$|B| = 14 \times 1 = 14$$

وهذا تناقض لحجم B .

(2-5) مبرهنة (كاكس) : [4]

في المستوى الإسقاطي $PG(2, q)$ ، لتكن B مجموعة قالبية أصغرية ذات حجم $q + K$. إذا وجد L يقطع B في $K - 1$ من النقاط بالضبط، فإنه توجد نقطة Q لا تنتمي إلى B حيث أن كل خط يصل النقطة Q بنقطة من $L \setminus B$ يحتوي بالضبط على نقطتين من B وأن $K \geq (q + 3)/2$

(2-6) مبرهنة:

لا توجد مجموعة قالبية أصغرية ذات حجم 22 في المستوى الإسقاطي $PG(2, 13)$ تمتلك قاطعاً ثمانياً ولا تمتلك قاطعاً تساعياً.

البرهان:

لتكن $P = (x, y, z)$ نقطة في المستوى الإسقاطي $PG(2, q)$ وليكن L_1 قاطعاً ثمانياً. نفترض أن L_1 هو خط اللانهاية ($L_1 : Z = 0$) وليكن $L_1 / B = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ وبحسب مبرهنة كاكس توجد نقطة Q لا تنتمي إلى B . بحيث أن $Q A_i$ ، $i = 1, \dots, 6$ هي قواطع ثنائية. وهذه الخطوط تحتوي على 12 نقطة من B ، ولتكن U_1 هي النقطة الثالثة عشر وبما أن النقاط A_i تقع على قاطع ثنائي واحد وأثنى عشر قواطع أحادية، فإن الخطوط $U_1 A_i$ و $i = 1, \dots, 6$ هي قواطع أحادية. أما الخط $U_1 Q$ فهو الخط الذي يمر خلال نقطة من نقاط $B \cap L_1$. وباستخدام التحويلات الخطيين:

$$T_1 : (x, y, z) \rightarrow (y + z, x + 12z, 0)$$

$$T_2 : (x, y, z) \rightarrow (12y + z, x + y, 0)$$

فان تأثير الزمرة الخطية $S_3 = \langle T_1, T_2 \rangle$ على خط اللانهاية يؤدي إلى ثلاثة مدارات:

المدار الأول: $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 12, 0)\}$

المدار الثاني: $\{(1, 5, 0), (1, 8, 0), (1, 4, 0), (1, 2, 0), (1, 7, 0), (1, 10, 0)\}$

المدار الثالث: $\{(1, 9, 0), (1, 3, 0)\}$

لتكن النقاط $A_5 = (1, 9, 0)$ ، $A_4 = (1, 5, 0)$ ، $A_3 = (1, 12, 0)$ ، $A_2 = (0, 1, 0)$ ، $A_1 = (1, 0, 0)$

$A_6 = (1, 11, 0)$. أما نقطة المصدر الثالثة فستكون $Q = (0, 0, 1)$ ، ونقطة المصدر الرابعة ستكون

$$U_1 = (1, 1, 1)$$

ليكن $AG(2, 13) = PG(2, 13) / L_1$ هو المستوى الأفيني. نفترض أن

$B_1 = B \setminus (L_1 \cup \{U_1, U_2\})$ والتي تحتوي على نقاط أفينية $P_i = (x, y)$ حيث $i = 0, \dots, 12$.

$(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (0, 5), (0, 6), (0, 7), (0, 8), (0, 9), (0, 10), (0, 11), (0, 12)$

$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8), (1, 9), (1, 10), (1, 11), (1, 12)$

$(2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (2, 8), (2, 9), (2, 10), (2, 11), (2, 12)$

$(3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (3, 7), (3, 8), (3, 9), (3, 10), (3, 11), (3, 12)$

$(4, 0), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (4, 7), (4, 8), (4, 9), (4, 10), (4, 11), (4, 12)$

$(5, 0), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (5, 7), (5, 8), (5, 9), (5, 10), (5, 11), (5, 12)$

$(6, 0), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6), (6, 7), (6, 8), (6, 9), (6, 10), (6, 11), (6, 12)$

(7, 0), (7, 1), (7, 2), (7, 3), (7, 4), (7, 5), (7, 6), (7, 7), (7, 8), (7, 9), (7, 10), (7, 11), (7, 12)
 (8, 0), (8, 1), (8, 2), (8, 3), (8, 4), (8, 5), (8, 6), (8, 7), (8, 8), (8, 9), (8, 10), (8, 11), (8, 12)
 (9, 0), (9, 1), (9, 2), (9, 3), (9, 4), (9, 5), (9, 6), (9, 7), (9, 8), (9, 9), (9, 10), (9, 11), (9, 12)
 (10, 0), (10, 1), (10, 2), (10, 3), (10, 4), (10, 5), (10, 6), (10, 7), (10, 8), (10, 9), (10, 10), (10, 11), (10, 12)
 (11, 0), (11, 1), (11, 2), (11, 3), (11, 4), (11, 5), (11, 6), (11, 7), (11, 8), (11, 9), (11, 10), (11, 12)
 (12, 0), (12, 1), (12, 2), (12, 3), (12, 4), (12, 5), (12, 6), (12, 7), (12, 8), (12, 9), (12, 10), (12, 11), (12, 12)

باختيار الاحتمال $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 12, 0), (1, 5, 0), (1, 9, 0), (1, 11, 0)\}$ فإنه سيعطينا واحداً وعشرين احتمالاً وهي:

الحالة الأولى:

باختيار النقطتين (5, 0) ، (10, 0) فإن النقطة (5, 0) ستحذف النقاط:
 $\{(3,2),(7,11),(2,11),(10,12),(11,2),(0,7),(10,6),(0,10),(7,9),(10,3)\}$.

أما النقطة (10, 0) فستحذف النقاط:
 $\{(0,10), (7, 11), (3, 7), (4, 9), (3, 2), (9, 4), (7, 12), (7, 6), (0, 7)\}$.
 ليبقى لدينا نقطة واحدة (8, 5) وهذا تناقض.

الحالة الثانية:

باختيار النقطتين (5, 0) ، (9, 0) ، فإن النقطة (5, 0) ستحذف النقاط:
 $\{(3,2),(7,11),(2,11),(10,12),(11,2),(0,7),(0,16),(0,10),(7,9), (10, 3)\}$.

أما النقطة (9, 0) فستحذف النقاط:
 $\{(4, 10), (10, 11), (4, 7), (5, 3), (0, 10), (0, 7), (4, 5), (10, 12)\}$.
 ليبقى لدينا نقطة واحدة (3, 7) وهذا تناقض.

الحالة الثالثة:

باختيار النقطتين (5, 0) ، (4, 0) ، فإن النقطة (5, 0) ستحذف النقاط:
 $\{(3,2),(7,11),(2,11),(10,12),(11,2),(0,7),(0,16),(0,10),(7,9),(10,3)\}$.

أما النقطة (4, 0) فستحذف النقاط:
 $\{(5, 2), (0, 4), (0, 6), (9, 3), (8, 5), (0, 8), (3, 2)\}$.

لنحصل على الاحتمال الوحيد وهو لا يشكل مجموعة قابلية:
 $\{(5,0),(4,0),(0,12),(0,11),(7,6),(9,4),(12,8),(10,11),(6,2), (11, 8), (3, 7), (2, 9)\}$.

الحالة الرابعة:

باختيار النقطتين (5, 0) ، (12, 0) ، فإن النقطة (5, 0) ستحذف النقاط:
 $\{(3, 2) ، (7, 11) ، (2, 11) ، (10, 12) ، (11, 2) ، (0, 7) ، (10, 6) ، (0, 10) ، (7, 9) ، (10, 3)\}$

أما النقطة (12, 0) فستحذف النقاط:
 $\{(9,3), (0, 12), (10, 3), (11, 8), (3, 7), (11, 2), (0, 11)\}$.

لا يوجد أي عنصر وهذا تناقض.

الحالة الخامسة:

باختيار النقطتين (5, 0)، (7, 0)، فإن النقطة (5, 0) ستحذف النقاط:
 $\{(3,2), (7,11), (2,11), (10,12), (11,2), (0,7), (10,6), (0,10), (7,9), (10, 3)\}$
 أما النقطة (7, 0) فستحذف النقاط:
 $\{(2, 5), (0, 7), (12, 8), (5, 3), (0, 4), (8, 5), (6, 2)\}$
 ليبقى لدينا نقطة واحدة (11, 8) وهذا تناقض.

الحالة السادسة:

باختيار النقطتين (5, 0)، (3, 0)، فإن النقطة (5, 0) ستحذف النقاط:
 $\{(3,2), (7,11), (2,11), (10,12), (11,2), (0,7), (10,6), (0,10), (7,9), (10, 3)\}$.
 أما النقطة (3, 0) فستحذف النقاط:
 $\{(7,9), (10,6), (6,2), (0,11), (4,5), (9,4), (0,12), (4,9), (10,11), (12, 8), (10, 12), (0, 6)\}$
 لا يوجد أي عنصر وهذا تناقض.

الحالة السابعة:

باختيار النقطتين (10, 0)، (9, 0)، فإن النقطة (10, 0) ستحذف النقاط:
 $\{(0, 10), (7, 11), (3, 7), (4, 9), (3, 2), (9, 4), (7, 12), (7, 6), (0, 7)\}$.
 أما النقطة (9, 0) فستحذف النقاط:
 $\{(10, 12), (4, 5), (0, 7), (0, 10), (5, 3), (4, 7), (10, 11), (4, 10)\}$.
 لا يوجد أي عنصر وهذا تناقض.

الحالة الثامنة:

باختيار النقطتين (10, 0)، (4, 0)، فإن النقطة (10, 0) ستحذف النقاط:
 $\{(0,10), (7, 11), (3, 7), (4, 9), (3, 2), (9, 4), (7, 12), (7, 6), (0, 7)\}$.
 أما النقطة (4, 0) فستحذف النقاط:
 $\{(5, 2), (0, 4), (0, 6), (9, 3), (8, 5), (0, 8), (3, 2)\}$.
 ليبقى لدينا نقطة واحدة (6, 2) وهذا تناقض.

الحالة التاسعة:

باختيار النقطتين (10, 0)، (12, 0)، فإن النقطة (10, 0) ستحذف النقاط:
 $\{(0, 10), (7, 11), (3, 7), (4, 9), (3, 2), (9, 4), (7, 12), (7, 6), (0, 7)\}$
 أما النقطة (12, 0) فستحذف النقاط:
 $\{(0, 11), (11, 2), (3, 7), (11, 8), (10, 3), (0, 12), (9, 3)\}$.
 لا يحتوي على أي عنصر وهذا تناقض.

الحالة العاشرة:

باختيار النقطتين $(10, 0)$ ، $(7, 0)$ ، النقطة $(10, 0)$ فستحذف النقاط:
 $\{(0,10), (7, 11), (3, 7), (4, 9), (3, 2), (9, 4), (7, 12), (7, 6), (0, 7)\}$.
 أما النقطة $(7,0)$ فستحذف النقاط :
 $\{(2,5), (0, 7), (12, 8), (5, 3), (0, 4), (8, 5), (6, 2)\}$.
 فسيحتوي على عنصر واحد وهذا تناقض.

الحالة الحادي عشر:

باختيار النقطتين $(10, 0)$ ، $(3, 0)$ ، فان النقطة $(10, 0)$ ستحذف النقاط:
 $\{(0,10), (7, 11), (3, 7), (4, 9), (3, 2), (9, 4), (7, 12), (7, 6), (0, 7)\}$.
 أما النقطة $(3, 0)$ فستحذف النقاط:
 $\{(0,6),(10,12),(12,8),(10,11),(4,9),(0,12),(9,4),(4,5),(0,11),(6,2),(10,6),(7,9)\}$
 فسيحتوي على عنصر واحد وهذا تناقض.

الحالة الثانية عشر:

باختيار النقطتين $(9, 0)$ ، $(4, 0)$ ، فان النقطة $(4, 0)$ ستحذف النقاط:
 $\{(10, 12), (4, 5), (0, 7), (0, 10), (5, 3), (4, 7), (10, 11), (4, 10)\}$.
 أما النقطة $(4, 0)$ فستحذف النقاط:
 $\{(5, 2), (0, 4), (0, 6), (9, 3), (8, 5), (0, 8), (3, 2)\}$.
 فستحتوي على نقطة واحدة وهي $(3, 7)$ وهذا تناقض.

الحالة الثالثة عشر:

باختيار النقطتين $(9, 0)$ ، $(12, 0)$ ، فان النقطة $(9, 0)$ ستحذف النقاط:
 $\{(10, 12), (4, 5), (0, 7), (0, 10), (5, 3), (4, 7), (10, 11), (4, 10)\}$
 أما النقطة $(12, 0)$ فستحذف النقاط:
 $\{(9, 3), (0, 12), (10, 3), (11, 8), (3, 7), (11, 2), (0, 11)\}$.
 فيوجد نقطة واحدة وهي $(6, 2)$ وهذا تناقض.

الحالة الرابعة عشر:

باختيار النقطتين $(9, 0)$ ، $(7, 0)$ ، فان النقطة $(9, 0)$ ستحذف النقاط:
 $\{(10, 12), (4, 5), (0, 7), (0, 10), (5, 3), (4, 7), (10, 11), (4, 10)\}$.
 أما النقطة $(7,0)$ فستحذف النقاط :
 $\{(2, 5), (0, 7), (12, 8), (5, 3), (0, 4), (8, 5), (6, 2)\}$.
 فيوجد نقطة واحدة وهذا $(11, 8)$ وهذا تناقض.

الحالة الخامسة عشر:

باختيار النقطتين $(9, 0)$ ، $(3, 0)$ ، فان النقطة $(9, 0)$ ستحذف النقاط:
 $\{(10, 12), (4, 5), (0, 7), (0, 10), (5, 3), (4, 7), (10, 11), (4, 10)\}$.

أما النقطة (3, 0) فستحذف النقاط:

{(7,9),(10,6),(6,2),(0,11),(4,5),(9,4),(0,12),(4,9),(10,11), (12, 8), (10, 12), (0, 6)}.

فيوجد نقطة واحدة وهي (7, 11) وهذا تناقض.

الحالة السادسة عشر:

باختيار النقطتين (4, 0)، (12, 0)، فإن النقطة (4, 0) ستحذف النقاط:

{(3, 2), (0, 8), (8, 5), (9, 3), (0, 6), (0, 4), (5, 2)}.

أما النقطة (12, 0) فستحذف النقاط:

{(9,3),(0,12),(10,3),(11,8),(3,7),(11,2),(0,11),(2,11),(10,3), (7, 9), (11, 3)}

فيوجد نقطة واحدة وهي (6, 2) وهذا تناقض.

الحالة السابعة عشر:

باختيار النقطتين (4, 0)، (7, 0)، فإن النقطة (4, 0) ستحذف النقاط:

{(3, 2), (0, 8), (8, 5), (9, 3), (0, 6), (0, 4), (5, 2)}.

أما النقطة (7, 0) فتحذف النقاط:

{(6, 2), (8, 5), (0, 4), (5, 3), (12, 8), (0, 7), (2, 5)}.

فيوجد نقطة واحدة وهي (11, 3) وهذا تناقض.

الحالة الثامنة عشر:

باختيار النقطتين (4, 0)، (3, 0)، فإن النقطة (4, 0) ستحذف النقاط:

{(3, 2), (0, 8), (8, 5), (9, 3), (0, 6), (0, 4), (5, 2)}.

أما النقطة (3, 0) فستحذف النقاط:

{(7,9),(10,6),(6,2),(0,11),(4,5),(9,4),(0,12),(4,9),(10,11),(12, 8), (10, 12), (0, 6)}.

فيوجد نقطة واحدة وهي (11, 3) وهذا تناقض.

الحالة التاسعة عشر:

باختيار النقطتين (12, 0)، (7, 0)، فإن النقطة (12, 0) ستحذف النقاط:

{(0, 11), (11, 2), (3, 7), (11, 8), (10, 3), (0, 12), (9, 3)}.

أما النقطة (7, 0) فستحذف النقاط:

{(6, 2), (8, 5), (0, 4), (5, 3), (12, 8), (0, 7), (2, 5)}.

فيوجد نقطة واحدة وهي (10, 12) وهذا تناقض.

الحالة العشرون:

باختيار النقطتين (12, 0)، (3, 0)، فإن النقطة (12, 0) ستحذف النقاط:

{(0, 11), (11, 2), (3, 7), (11, 8), (10, 3), (0, 12), (9, 3)}.

أما النقطة (3, 0) فستحذف النقاط:

{(7,9),(10,6),(6,2),(0,11),(4,5),(9,4),(0,12),(4,9),(10,11), (12, 8), (10, 12), (0, 6)}.

فيوجد نقطة واحدة وهي (10, 12) وهذا تناقض.

الحالة الحادية والعشرون:

باختيار النقطتين (7, 0)، (3, 0)، فإن النقطة (7, 0) ستحذف النقاط:
 $\{(6, 2), (8, 5), (0, 4), (5, 3), (12, 8), (0, 7), (2, 5)\}$.
 أما النقطة (3, 0) فستحذف النقاط:
 $\{(7,9), (10,6), (6, 2), (0, 11), (4, 5), (9,4), (0,12), (4,9), (10,11), (12,8), (10,12), (0,6)\}$.
 فيوجد نقطة واحدة وهي (12, 2) وهذا تناقض.

(2-7) تعريف : [3]

إذا كانت B مجموعة قلبية في الفضاء الإسقاطي PG(2,q) فإن B تسمى من النوع - ريدي إذا وجد خط في الفضاء الإسقاطي يحوي على K من النقاط B بحيث أن $|B|=q+k$.

3- البحث عن مجموعة قلبية أصغرية من نوع - ريدي ذات الحجم 22 في المستوى الإسقاطي PG (2, 13)

لتكن $P = (x, y, z)$ نقطة في المستوى الإسقاطي، وليكن L خط اللانهاية والذي هو خط ريدي ولتكن $B_1 = B \setminus L$ وهي مجموعة نقاط أفينية $P_i = (x_i, y_i)$ ، $i = 1, \dots, 13$ ، ولتكن Q_i لكل $i = 1, \dots, 5$ نقاط واقعة على L حيث إن $Q_1 = (1, 0, 0)$ ، $Q_2 = (0, 1, 0)$ ، $Q_3 = (1, 12, 0)$ ، $Q_4 = (1, 5, 0)$ ، $Q_5 = (1, 9, 0)$ تم الحصول عليها من تأثير الزمرة $\langle T_1, T_2 \rangle \cong S_3$ حيث أن:

$$T_1 : (x, y, z) \rightarrow (y + z, x + 12z, 0)$$

$$T_2 : (x, y, z) \rightarrow (12y + z, x + y, 0)$$

والذي يقسم نقاط خط اللانهاية إلى ثلاثة مدارات:

المدار الأول: $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 12, 0)\}$.

المدار الثاني: $\{(1, 5, 0), (1, 8, 0), (1, 4, 0), (1, 2, 0), (1, 7, 0), (1, 10, 0)\}$.

المدار الثالث: $\{(1, 9, 0), (1, 3, 0)\}$.

وبتثبيت المدار الأول $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$ مع نقطة من المدار الثاني والثالث خارج B فإننا نحصل على شروط اختيار $i = 1, \dots, 13$ وهي:

$$x_i \neq x_j$$

$$y_i \neq y_j$$

$$x_i + y_i \neq x_j + y_j$$

$$y_i - 5x_i \neq y_j - 5x_j$$

$$y_i - 9x_i \neq y_j - 9x_j$$

وبهذا سنحصل على النقاط الآتية:

$\{(0, 0), (1, 2), (2, 6), (3, 3), (4, 1), (5, 5), (6, 9), (7, 7), (8, 4), (9, 8), (10, 10), (11, 11), (12, 12)\}$.

وتحويلها إلى نقاط إسقاطية كما في الجدول (1):

$\{(0, 0, 1), (1, 2, 1), (1, 3, 7), (1, 1, 9), (1, 10, 10), (1, 1, 8), (1, 8, 11), (1, 1, 2), (1, 7, 5), (1, 11, 3), (1, 1, 4), (1, 1, 6), (1, 1, 12)\}$.

وإضافتها إلى نقاط $L \cap B$ والتي:

$\{(1, 11, 0), (1, 10, 0), (1, 4, 0), (1, 1, 0), (1, 8, 0), (1, 3, 0), (1, 2, 0), (1, 6, 0), (1, 7, 0)\}$.

سنحصل على مجموعة قالبية ذات حجم 22 من نوع - ريدي.

(3-1) مبرهنة:

توجد مجموعة قالبية أصغرية من النوع - ريدي ذات الحجم 22 في PG (2, 13) .

وفيما يأتي بعض خواص المجاميع القالبية الأصغرية ذات الحجم 22 من النوع - ريدي في الفضاء الإسقاطي PG(2,13).

1. لتكن B مجموعة قالبية ذات الحجم 22 وتمتلك قطعاً تساعياً L فأنة:
أ / يوجد على الأكثر قاطعين ثمانية يمران خلال P ، $P \in L \cap B$.
ب / لا يوجد قطع ثمانية خلال $P \in L \setminus B$.
2. لتكن B مجموعة قالبية ذات حجم 22 وتمتلك قطعاً تساعياً L ، فأنة يوجد على الأكثر ثلاث قواطع سباعية لـ P ، $P \in L \cap B$.
3. ليكن L قطعاً تساعياً لـ B، فانه يوجد لكل نقطة P ، $P \in L \cap B$ قاطعان سداسيان على الأكثر.
4. ليكن L قطعاً تساعياً لـ B ، فأنة يوجد لكل نقطة $P \in L \cap B$ في B ثلاث قواطع خماسية على الأكثر.
5. لكل نقطة P ، $P \in B$ يمر خلالها على الأكثر قاطعين تساعيين.
6. لأي قاطعين تساعيين لـ B، فأن نقطة تقاطعهما تكون داخل B.
7. لأي قاطعين سباعيين لـ B، فأن نقطة تقاطعهما تكون في B.

البرهان:

1. نفرض وجود ثلاث قواطع ثمانية في $P \in L \cap B$ فان: $|B| \geq 1 + 6 + 3 * 7 = 28$ وهذا تناقض.
2. نفرض وجود أربعة قواطع سباعية فان: $|B| \geq 4 * 6 + 1 = 25$ وهذا تناقض.
3. نفرض وجود ثلاث قواطع سداسية $P \in L \cap B$ فان: $|B| \geq 3 * 5 + 8 + 1 = 24$ وهذا تناقض.
4. نفرض وجود أربعة قواطع خماسية في $P \in L \cap B$ فان: $|B| \geq 1 + 4 * 4 + 8 = 25$ وهذا تناقض.
5. نفرض وجود ثلاث قواطع تساعية من نقطة $P \in B$ فان: $|B| \geq 1 + 3 * 8 = 25$ وهذا تناقض.
6. نفرض L_1, L_2 قاطعان تساعيان يلتقيان $P \notin L \cap B$ فان: $|B| \geq 2 * 9 + 12 * 1 = 30$ وهذا تناقض.
7. نفرض L_1, L_2 قاطعان سباعيان يلتقيان في $P \notin B$ فان: $|B| \geq 2 * 7 + 12 * 1 = 26$ وهذا تناقض.

الجدول (1)

i	P_i	i	P_i	i	P_i	i	P_i	i	P_i
1	(1, 0, 0)	40	(1, 0, 12)	79	(1, 5, 4)	118	(1, 4, 8)	157	(1, 9, 7)
2	(0, 1, 0)	41	(1, 6, 7)	80	(1, 5, 6)	119	(1, 9, 4)	158	(1, 1, 3)
3	(0, 0, 1)	42	(1, 1, 0)	81	(1, 12, 2)	120	(1, 5, 0)	159	(1, 11, 5)
4	(1, 0, 7)	43	(0, 1, 1)	82	(1, 10, 10)	121	(0, 1, 5)	160	(1, 4, 12)
5	(1, 1, 7)	44	(1, 0, 1)	83	(1, 2, 1)	122	(1, 0, 11)	161	(1, 6, 5)
6	(1, 1, 8)	45	(1, 7, 7)	84	(1, 7, 8)	123	(1, 3, 7)	162	(1, 4, 5)
7	(1, 9, 3)	46	(1, 1, 1)	85	(1, 9, 5)	124	(1, 1, 10)	163	(1, 4, 10)
8	(1, 11, 2)	47	(1, 7, 1)	86	(1, 4, 4)	125	(1, 2, 9)	164	(1, 2, 2)
9	(1, 10, 0)	48	(1, 7, 4)	87	(1, 5, 1)	126	(1, 8, 10)	165	(1, 10, 1)
10	(0, 1, 10)	49	(1, 5, 3)	88	(1, 7, 3)	127	(1, 2, 10)	166	(1, 7, 12)
11	(1, 0, 9)	50	(1, 11, 10)	89	(1, 11, 6)	128	(1, 2, 11)	167	(1, 6, 10)
12	(1, 8, 7)	51	(1, 2, 3)	90	(1, 12, 9)	129	(1, 3, 0)	168	(1, 2, 6)
13	(1, 1, 2)	52	(1, 11, 3)	91	(1, 8, 12)	130	(0, 1, 3)	169	(1, 12, 5)
14	(1, 10, 4)	53	(1, 11, 11)	92	(1, 6, 3)	131	(1, 0, 5)	170	(1, 4, 3)
15	(1, 5, 5)	54	(1, 3, 1)	93	(1, 11, 8)	132	(1, 4, 7)	171	(1, 11, 12)
16	(1, 4, 1)	55	(1, 7, 2)	94	(1, 9, 2)	133	(1, 1, 11)	172	(1, 6, 8)
17	(1, 7, 9)	56	(1, 10, 12)	95	(1, 10, 6)	134	(1, 3, 10)	173	(1, 9, 9)
18	(1, 8, 11)	57	(1, 6, 2)	96	(1, 12, 10)	135	(1, 2, 0)	174	(1, 8, 1)
19	(1, 3, 5)	58	(1, 10, 2)	97	(1, 2, 5)	136	(0, 1, 2)	175	(1, 7, 11)
20	(1, 4, 6)	59	(1, 10, 3)	98	(1, 4, 2)	137	(1, 0, 4)	176	(1, 3, 2)
21	(1, 12, 3)	60	(1, 11, 0)	99	(1, 10, 8)	138	(1, 5, 7)	177	(1, 10, 11)
22	(1, 11, 9)	61	(0, 1, 11)	100	(1, 9, 6)	139	(1, 1, 12)	178	(1, 3, 11)
23	(1, 8, 4)	62	(1, 0, 11)	101	(1, 12, 11)	140	(1, 6, 0)	179	(1, 3, 3)
24	(1, 5, 8)	63	(1, 2, 7)	102	(1, 3, 4)	141	(0, 1, 6)	180	(1, 11, 1)
25	(1, 9, 0)	64	(1, 1, 9)	103	(1, 5, 9)	142	(1, 0, 6)	181	(1, 7, 6)
26	(0, 1, 9)	65	(1, 8, 2)	104	(1, 8, 8)	143	(1, 12, 7)	182	(1, 12, 0)
27	(1, 0, 2)	66	(1, 10, 9)	105	(1, 9, 1)	144	(1, 1, 6)	183	(0, 1, 12)
28	(1, 10, 7)	67	(1, 8, 9)	106	(1, 7, 5)	145	(1, 12, 6)		
29	(1, 1, 4)	68	(1, 8, 6)	107	(1, 4, 9)	146	(1, 12, 8)		
30	(1, 5, 12)	69	(1, 12, 12)	108	(1, 8, 0)	147	(1, 9, 11)		
31	(1, 6, 11)	70	(1, 6, 1)	109	(0, 1, 8)	148	(1, 3, 8)		
32	(1, 3, 12)	71	(1, 7, 10)	110	(1, 0, 3)	149	(1, 9, 8)		
33	(1, 6, 12)	72	(1, 2, 8)	111	(1, 11, 7)	150	(1, 9, 10)		
34	(1, 6, 4)	73	(1, 9, 12)	112	(1, 1, 5)	151	(1, 2, 12)		
35	(1, 5, 11)	74	(1, 6, 9)	113	(1, 4, 11)	152	(1, 6, 6)		
36	(1, 3, 9)	75	(1, 8, 3)	114	(1, 3, 6)	153	(1, 12, 1)		
37	(1, 8, 5)	76	(1, 11, 4)	115	(1, 12, 4)	154	(1, 7, 0)		
38	(1, 4, 0)	77	(1, 5, 10)	116	(1, 5, 2)	155	(0, 1, 7)		
39	(0, 1, 4)	78	(1, 2, 4)	117	(1, 10, 5)	156	(1, 0, 8)		

الجدول (2)

L1	1	2	9	25	38	42	60	108	120	129	135	140	154	182
L2	2	3	10	26	39	43	61	109	121	130	136	141	155	183
L3	3	4	11	27	40	44	62	110	122	131	137	142	156	1
L4	4	5	12	28	41	45	63	111	123	132	138	143	157	2
L5	5	6	13	29	42	46	64	112	124	133	139	144	158	3
L6	6	7	14	30	43	47	65	113	125	134	140	145	159	4
L7	7	8	15	31	44	48	66	114	126	135	141	146	160	5
L8	8	9	16	32	45	49	67	115	127	136	142	147	161	6
L9	9	10	17	33	46	50	68	116	128	137	143	148	162	7
L10	10	11	18	34	47	51	69	117	129	138	144	149	163	8
L11	11	12	19	35	48	52	70	118	130	139	145	150	164	9
L12	12	13	20	36	49	53	71	119	131	140	146	151	165	10
L13	13	14	21	37	50	54	72	120	132	141	147	152	166	11
L14	14	15	22	38	51	55	73	121	133	142	148	153	167	12
L15	15	16	23	39	52	56	74	122	134	143	149	154	168	13
L16	16	17	24	40	53	57	75	123	135	144	150	155	169	14
L17	17	18	25	41	54	58	76	124	136	145	151	156	170	15
L18	18	19	26	42	55	59	77	125	137	146	152	157	171	16
L19	19	20	27	43	56	60	78	126	138	147	153	158	172	17
L20	20	21	28	44	57	61	79	127	139	148	154	159	173	18
...														
...														
...														
L183	183	1	8	24	37	41	59	107	119	128	134	139	153	4

المصادر

- [1] Bruen, A. A. (1986), Arcs and multiple blocking set, combinatorica, symposia, Mathematica 28, Academic. Press, 15-29.
- [2] Dipaola, J. (1969), On minimum blocking coalitions in small projective plane games, SIAMJ. Appl. Math., 17, 378-392.
- [3] Hirschfeld, J. W. P. (1979), "Projective Geometries over Finite Fields", Oxford University Press, Oxford.
- [4] Innamorate, S. and Storme, L. (2004), Minimal blocking sets in PG (2, 8) and maximal partial spreads in PG (3, 8) , Designs, Codes and Cryptography, 13, 15-26.
- [5] Richardson, M. (1956), On finite projective games , Proc. Amer. Math, Soc., 7, 458-465.
- [6] Younis, S. A., (2009) "The Packing Problem Projective Plane PG (2, 29) and Minimal blocking sets in PG (2, 11)" , M. Sc. Thesis, Mosul.