تأثير التكاليف الثابتة على الحل الأمثل لنموذج البرمجة العددية

مشتاق طالب حسين

جامعة الانبار، كلية الادارة والاقتصاد، الرمادي

Receiving Date: 01-09-2010 - **Accept Date:** 21-12-2010

الخلاصة

البرمجة العددية نستطيع تطبيقها في المجالات العديدة للاعمال. من ناحية اخرى، مشاكل البرمجة العددية بصورة عامة تكون اكثر تعقيدا وتحتاج وقت اكثر لحلها مما تحتاجه البرمجة الخطية. في هذا البحث تم اخذ حالة دراسية لمشكلة في تخطيط وتوزيع الانتاج، في هذه المشكلة هناك اربعة مصانع لكل مصنع كلفة ثابتة كما ان كل مصنع ينتج اربعة انواع من المنتجات كل منتج من هذه المنتجات ينقل الى خمسة مراكز طلب رئيسية.

قام الباحث بصياغة المشكلة بحالتين : **الحالة الاولى** بناء النموذج الرياضي للمشكلة باستخدام نموذج البرمجة العددية التامة دون ادخال التكاليف الثابتة في الصياغة الرياضية للنموذج وحل النموذج باستخدام البرنامج الجاهز (WinQSB) . في هذه الحالة وجد ان الربح الصافي الشهري للشركة يساوي (921166)دولار.

الحالة الثانية في هذه الحالة ادخلت الكلفة الثابتة لكل مصنع في بناء النموذج الرياضي لنفس المشكلة لكن باستخدام المتغيرات الثنائية لنموذج البرمجة العددية ومن ثم حل الاخير باستخدام البرنامج الجاهز (WinQSB) ، بعد ذلك وجد ان الربح الصافي للشركة ازداد عن ربح الحالة الاولى بمقدار مساوي الى (33000) دولار اي اصبح مقداره يساوي(954166) دولار وهذا يدل على الدور الفعال للتكاليف الثابتة على الحل الامثل كما يبين الدور الكبير الذي تلعبه المتغيرات الثنائية في حالة ادخالها في بناء نماذج البرمجة العددية ذات الشروط المنطقية .

1- المقدمة Introduction

في السنوات الاخيرة، الكثير من الاعمال تتنافس فيما بينها منافسة مطلقة حول نوعية البضائع المقدمة الى المستهلك، ان اصحاب المصانع او المنتجين هم من يريد انتاج البضائع باعلى نوعية واقل كلفة .واحدة من اكثر الطرق التقليدية هو تعظيم دالة الربح (maximize) عن طريق تطوير نموذج رياضي كأداة دعم للقرار. ومن هذه النماذج الرياضية المستخدمة بشكل واسع في المجالات الصناعية هي البرمجة الخطية (linear programming). [5]

البرمجة الخطية هي اداة تساعد في الحصول على الامثلية (optimization) للمشكلات التي تواجه الادارة العليا التي بدورها تريد ايجاد دالة التعظيم (maximize) مثل (الارباح، الكفأة ،السرعة...) او دالة التقليل(minimize) مثل (الكلفة، الوقت ،المسافة ...)، وتكون هذه الدالة خاضعة لمجموعة من القيود الخطية وعليه فان البرمجة الخطية هي نموذج رياضي يبحث عن دالة التعظيم او التقليل الخطية الخاضعة لمجموعة من القيود الخطية.[4]

في هذا البحث تم التعامل مع احد انواع البرمجة الخطية الا وهو البرمجة الخطية العددية (integer linear programming)، وبعد التعرف على اهم انواع نماذج البرمجة العددية والصيغة الرياضية العامة لنموذج البرمجة العددية، وكذلك تم بيان مفهوم الكلفة الثابتة في الانتاج والتعرف على الصيغة الرياضية لدالة الكلفة الثابتة. بعد ذلك تم اخذ حالة دراسية لمشكلة في تخطيط وتوزيع الانتاج ، بعد الحصول على البيانات الضرورية للمشكلة قيد البحث تبين ان هناك اربعة مصانع رئيسية لكل مصنع كلفة ثابتة كذلك كل مصنع يقوم بانتاج اربعة انواع من المنتجات(اجهزة الكترونية) نوع(K80,K50,K30,K20) وكل منتج ينقل الى خمسة مراكز طلب رئيسية. بعد ذلك تم بناء النموذج الرياضي للمشكلة بحالتين: الحالة الاولى بناء النموذج الرياضي باستخدام نموذج البرمجة العددية التامة(total integer programming) دون ادخال التكاليف الثابتة في الصياغة الرياضية للنموذج .

الحالة الثانية ادخال التكاليف الثابتة لكل مصنع في بناء النموذج الرياضي للمشكلة باستخدام نموذج البرمجة العددية الثنائية(binary integer programming) . بعد ذلك تم حل نموذج كل حالة باستخدام البرنامج الجاهز (WinQSB) والحصول على النتائج التي سيرد تفصيلها فيما بعد .

2- هدف البحث The Aim of Research

كثيرا من نماذج البرمجة الخطية تتجاهل الكلفة الثابتة في صياغة دالة الهدف لان من الصعوبة السيطرة عليها في هذه النماذج ، من هنا جاء هدف البحث في بيان تاثير ادخال التكاليف الثابتة في الصياغة الرياضية لدالة هدف نماذج البرمجة العددية على الحل الامثل وذلك باستخدام المتغيرات الثنائية.

3- البرمجة الخطية العددية Integer Linear Programming (ILP)

في مشاكل البرمجة الخطية متخذ القرار يسمح لمتغيرات القرار بان تاخذ مدى مستمرمن القيم التي تكون مقيدة بقيود المشكلة. لكن هناك الكثير من النماذج الخطية تكون فيها متغيرات القرار بعضها او جميعها محددة بقيم عددية صحيحة وهذا ما يعرف بنموذج البرمجة العددية مثل(عدد المكائن التي يحتاجها مصنع معين، عدد الطائرات المراد تصنيعها وعدد الموظفين اللذين يجب تخصيصهم لوظيفة معينة...الخ). [4]

3.1- انواع نماذج البرمجة العددية Types of Integer Programming Models

- نماذج البرمجة العددية التامة total integer programming models : تكون فيها جميع متغيرات القرار ذات حلول عددية صحيحة. [2]
- نماذج البرمجة العددية المختلطة mixed integer programming models : تكون فيها بعض متغيرات القرار ذات قيم عددية صحيحة. [7]
- نماذج البرمجة العددية الثنائية pure binary (zero- one) integer programming models : تكون فيها جميع متغيرات القرار من النوع الثنائي (1-0). [7]
- نماذج البرمجة العددية الثنائية المختلطة mixed binary integer programming models : تكون فيها بعض متغيرات القرار ثنائية (binary) وبقية المتغيرات هي اما قيم عددية صحيحة او قيم مستمرة. [7]

3.2- الصيغة الرياضية العامة لنماذج البرمجة العددية General Integer Programming Formulation

ان الصيغة العامة لنماذج البرمجة العددية تبحث عن الامثلية(اقصى او ادنى) لمتغيرات دالة الهدف الخطية والتي تكون مقيدة بمجموعة من القيود الخطية(معادلات او متباينات).وكالاتي:[3]

$$\text{Maximize or Minimize } Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Subject to:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq, =, \geq b_i \qquad i=1, 2,....., m$$

$$x_j \geq 0 \text{ \& integer} \qquad j=1,2,.....,n$$

حيث ان :

Z= تمثل قيمة دالة الهدف.

x_j= يمثل متغير القرار.

c_j= تمثل معاملات متغيرات القرار(x_j) في دالة الهدف.

b_i= تمثل كمية المصدر (i) المخصصة للقيد i.

a_{ij}=تمثل كمية المصدر i المخصصة للفعالية j.

4- الكلفة الثابتة Fixed Cost

ان دالة الهدف لنماذج البرمجة العددية هي اما تعظيم الارباح اوتقليل التكاليف اصبح من الضروري الافتراض بان هناك تكاليف ثابتة دائما تحدث لذلك فان هذه التكاليف يجب ادخالها ضمن صياغة النموذج الرياضي للمشكلة . [3]

الفعالية الاقتصادية تتعرض لنوعين من التكاليف: تكاليف بداية تشغيل الفعالية(تكاليف ثابتة) وتكاليف متغيرة التي هي عبارة عن نسبة من مستوى الفعالية مثال ذلك كلفة تنصيب او اعداد الخط الانتاجي هي كلفة ثابتة لانها لاتتحدد بعدد الوحدات المنتجة بينما كلفة الايدي العاملة والمواد الاولية هي نسبة من كمية الانتاج لذا فهي تكون متغيرة. [6,3]

نفرض ان F هي الكلفة الثابتة ، c هو متغير وحدة الكلفة و x هي مستوى الانتاج، وعليه فان دالة الكلفة يمكن التعبير عنها بالصيغة الاتية : [6]

$$C(x)=\begin{cases} F+cx & x>0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

ان من الصعوبة تحليل الدالة C(x) ، من اجل تذليل هذه الصعوبة وايجاد الحل فاننا نستخدم المتغيرات الثنائية لنموذج البرمجة العددية .في مثل هذه الحالة فان الصيغة العامة لنموذج البرمجة العددية لمشاكل التعظيم تكون كالاتي:

$$\text{Maximize } Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{i=1}^{m} F_i y_i$$

Subject to:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i y_i \qquad i=1, 2,\ldots., m$$

$$x_j \ge 0 \text{ \& integer} \qquad j=1,2,\ldots,n$$

$$y_i=0,1$$

F_i=الكلفة الثابتة للمصدر i

y_i= المتغير الثنائي للمصدر i

Case Study حالة دراسية-5

شركة لصناعة الاجهزة الالكترونية تقوم بانتاج اربعة انواع من الاجهزة (K80,K50,K30,K20)، تمتلك الشركة اربعة مصانع رئيسية (IV,III,II,I) لانتاج كل واحد من المنتجات الاربعة. الوحدات المنتجة من كل منتج وفي كل مصنع تنقل من كل مصنع من المصانع الاربعة الى خمسة مراكز توزيع رئيسية (5,4,3,2,1) لمواجهة الطلب عليها. الكلفة الثابتة لكل مصنع، كلفة الانتاج، الوقت المستغرق لانتاج وحدة واحدة من كل منتج والطاقة الشهرية المتاحة للانتاج بـ(الساعات) هي كما موضح في الجدول(1-5) .

جدول(1-5)

المصنع	تكاليف ثابتة	كلفة الانتاج/لكل وحدة				الوقت المستغرق /ساعات				الطاقة المتاحة ساعة/شهر
		K20	K30	K50	K80	K20	K30	K50	K80	
I	45000	7	8	6	6	0.02	0.03	0.02	0.01	850
II	40000	9	9	9	5	0.01	0.02	0.04	0.03	835
III	33000	8	8	8	7	0.02	0.03	0.01	0.05	750
IV	39000	6	7	7	8	0.03	0.02	0.01	0.02	800

سعر بيع كل جهاز هو (19,20,18,16) على التوالي، تنبؤ الطلب الشهري بـ(الوحدات) على الانواع الاربعة للاجهزة ولكل مركز توزيع مبينة في الجدول(2-5)

جدول (2-5)

المنتج /مراكز التوزيع	1	2	3	4	5
K20	3000	2000	3000	7000	3000
K30	4000	5000	5000	8000	7000
K50	5000	7000	6000	6000	4000
K80	3000	5000	4000	8000	6000

الشركة يجب ان تلبي ما لا يقل عن 60% من الطلب الشهري على كل منتج وفي كل مركز توزيع . ان كلف النقل بـ(الدولار) للوحدة الواحدة من كل مصنع الى كل مركز توزيع مبينة في الجدول (3-5)

- بعد مراسلة الشركة على الموقع الالكتروني www.grotal.com تم الحصول على بيانات المشكلة، قام الباحث ببناء النموذج الرياضي المناسب لها كما سياتي لاحقا.

جدول(3-5)

المصنع /مراكز التوزيع	1	2	3	4	5
I	2	1	1	2	3
II	1	3	3	4	1
III	3	2	2	3	4
IV	2	1	2	1	2

ان مشكلة الشركة هي :

1- تحديد عدد الوحدات المنتجة من كل منتج(جهاز الكتروني) وفي كل مصنع.

2- تحديد عدد الوحدات الواجب نقلها من كل مصنع الى كل مركز توزيع.

3- عدد الوحدات المنقولة من كل مصنع الى كل مركز توزيع ولكل منتج يجب ان تساوي الطاقة الانتاجية لذلك المصنع.

4- تحديد اعلى ربح شهري .

5- كل مركز توزيع يجب ان يستلم ما بين 60% الى 100% من طلبه على المنتجات الاربعة.

5.1 صياغة النموذج الرياضي للمشكلة

في هذا البحث طور نموذج رياضي لعملية تخطيط الانتاج باستخدام البرمجة العددية ، قام الباحث بصياغة النموذج الرياضي للمشكلة قيد الدراسة بحالتين: **الحالة الاولى** صياغة النموذج الرياضي باستبعاد التكاليف الثابتة في صياغة دالة الهدف ومن ثم حل النموذج الرياضي والحصول على الحل المناسب . **الحالة الثانية** ادخال التكاليف الثابتة في صياغة دالة هدف النموذج الرياضي للمشكلة ومن ثم حل النموذج والحصول على الحل الامثل

الحالة الاولى

تعريف متغيرات القرار

w_i =عدد الوحدات المنتجة من الجهاز K20 في المصنع i /شهريا

x_i= عدد الوحدات المنتجة من الجهاز K30 في المصنع i /شهريا

y_i= عدد الوحدات المنتجة من الجهاز K50 في المصنع i /شهريا

z_i= عدد الوحدات المنتجة من الجهاز K80 في المصنع i /شهريا

w_{ij}=عدد وحدات المنتج K20 المنقولة من المصنع i الى مركز التوزيع j /شهريا.

x_{ij}=عدد وحدات المنتج K30 المنقولة من المصنع i الى مركز التوزيع j /شهريا.

y_{ij}= عدد وحدات المنتج K50 المنقولة من المصنع i الى مركز التوزيع j /شهريا.

z_{ij}= عدد وحدات المنتج K80 المنقولة من المصنع i الى مركز التوزيع j /شهريا.

صياغة دالة الهدف

ان ربح الوحدة الواحدة من المنتجات الاربعة (K80,K50,K30,K20) ولكل مصنع من المصانع الاربعة كالاتي :

الربح=(سعر البيع للوحدة الواحدة– تكلفة انتاج الوحدة الواحدة)

w_1 =16–6=10، w_2=16–9=7، w_3=16–8=8، w_4=16–6=10

x_1 =18–8=10 ، x_2=18–9=9، x_3 =18– 8= 10، x_4=18–7=11

y_1 =20–6=14، y_2=20–8=12، y_3=20–9=11، y_4=20–8=12

z_1=19–6=13، z_2=19–5=14، z_3=19–7=12،z_4=19–8=11

ان متغير كلف النقل المبينة في الجدول(3-5) يجب حسابها ضمن دالة الهدف.وذلك بضرب هذه الكلف بالمتغيرات $w_{ij}, x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}$ وعلى التوالي وطرحها من ربح الوحدة الواحدة لكل منتج في كل مصنع وبهذا ستكون دالة الهدف بالصيغة الاتية:

Maximize$Z=9W_1+7W_2+8W_3+10W_4+10X_1+9X_2+10X_3+11X_4+14Y_1+12Y_2+11Y_3+12Y_4+13Z_1+14Z_2+12Z_3+11Z_4-2W_{11}-1W_{12}-1W_{13}-2W_{14}-3W_{15}-1W_{21}-3W_{22}-3W_{23}-4W_{24}-1W_{25}-3W_{31}-2W_{32}-2W_{33}-3W_{34}-4W_{35}-2W_{41}-1W_{42}-2W_{43}-1W_{44}-2W_{45}-2X_{11}-1X_{12}-1X_{13}-2X_{14}-3X_{15}-1X_{21}-3X_{22}-3X_{23}-4X_{24}-1X_{25}-3X_{31}-2X_{32}-2X_{33}-3X_{34}-4X_{35}-2X_{41}-1X_{42}-2X_{43}-1X_{44}-2X_{45}-2Y_{11}-1Y_{12}-1Y_{13}-2Y_{14}-3Y_{15}-1Y_{21}-3Y_{22}-3Y_{23}-4Y_{24}-1Y_{25}-3Y_{31}-2Y_{32}-2Y_{33}-3Y_{34}-4Y_{35}-2Y_{41}-1Y_{42}-2Y_{43}-1Y_{44}-2Y45-2Z11-1Z_{12}-1Z_{13}-2Z_{14}-3Z_{15}-1Z_{21}-3Z_{22}-3Z_{23}-4Z_{24}-1Z_{25}-3Z_{31}-2Z_{32}-2Z_{33}-3Z_{34}-4Z_{35}-2Z_{41}-1Z_{42}-2Z_{43}-1Z_{44}-2Z_{45}$

صياغة قيود المشكلة

1- النموذج الرياضي يجب ان يحقق الكمية المنقولة من كل مصنع الى كل مركز توزيع تساوي الكمية المنتجة في المصنع نفسة وللمنتجات الاربعة.لذلك فان هذه القيود تكون بالصيغة الاتية:

$$W_{11}+W_{12}+W_{13}+W_{14}+W_{15}=W_1$$
$$W_{21}+W_{22}+W_{23}+W_{24}+W_{25}=W_2$$
$$W_{31}+W_{32}+W_{33}+W_{34}+W_{35}=W_3$$
$$W_{41}+W_{42}+W_{43}+W_{44}+W_{45}=W_4$$

قيود نقل المنتج K20 من المصنع الاول،الثاني،الثالث والرابع الى مراكز التوزيع الخمسة

$$X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14}+X_{15}=X_1$$
$$X_{21}+X_{22}+X_{23}+X_{24}+X_{25}=X_2$$
$$X_{31}+X_{32}+X_{33}+X_{34}+X_{35}=X_3$$
$$X_{41}+X_{42}+X_{43}+X_{44}+X_{45}=X_4$$

قيود نقل المنتج K30 من المصنع الاول،الثاني،الثالث والرابع الى مراكز التوزيع الخمسة

$$Y_{11}+Y_{12}+Y_{13}+Y_{14}+Y_{15}=Y_1$$
$$Y_{21}+Y_{22}+Y_{23}+Y_{24}+Y_{25}=Y_2$$
$$Y_{31}+Y_{32}+Y_{33}+Y_{34}+Y_{35}=Y_3$$
$$Y_{41}+Y_{42}+Y_{43}+Y_{44}+Y_{45}=Y_4$$

قيود نقل المنتج K50 من المصنع الاول،الثاني،الثالث والرابع الى مراكز التوزيع الخمسة

$$Z_{11}+Z_{12}+Z_{13}+Z_{14}+Z_{15}=Z_1$$
$$Z_{21}+Z_{22}+Z_{23}+Z_{24}+Z_{25}=Z_2$$
$$Z_{31}+Z_{32}+Z_{33}+Z_{34}+Z_{35}=Z_3$$
$$Z_{41}+Z_{42}+Z_{43}+Z_{44}+Z_{45}=Z_4$$

قيود نقل المنتج K80 من المصنع الاول،الثاني،الثالث والرابع الى مراكز التوزيع الخمسة

2- الوقت المستغرق لانتاج الوحدة الواحدة ولجميع المنتجات الاربعة في كل مصنع يجب ان لايتجاوز الوقت الكلي المتاح لكل مصنع.

$$0.02W_1+0.03X_1+0.02Y_1+0.01Z_1 \leq 850$$
$$0.01W_2+0.02X_2+0.04Y_2+0.03Z_2 \leq 835$$
$$0.02W_3+0.03X_3+0.01Y_3+0.05Z_3 \leq 750$$
$$0.03W_4+0.02X_4+0.01Y_4+0.02Z_4 \leq 800$$

3- كمية الانتاج التي تسلم من كل مصنع الى كل مركز توزيع يجب ان لاتتجاوز الطلب او ليست اقل من 60% من الطلب.

$$W_{11}+W_{21}+W_{31}+W_{41} \le 3000$$
$$W_{11}+W_{21}+W_{31}+W_{41} \ge 1800$$
$$W_{12}+W_{22}+W_{32}+W_{42} \le 2000$$
$$W_{12}+W_{22}+W_{32}+W_{42} \ge 1200$$
$$W_{13}+W_{23}+W_{33}+W_{43} \le 3000$$
$$W_{13}+W_{23}+W_{33}+W_{43} \ge 1800$$
$$W_{14}+W_{24}+W_{34}+W_{44} \le 7000$$
$$W_{14}+W_{24}+W_{34}+W_{44} \ge 4200$$
$$W_{15}+W_{25}+W_{35}+W_{45} \le 3000$$
$$W_{15}+W_{25}+W_{35}+W_{45} \ge 1800$$

$$X_{11}+X_{21}+X_{31}+X_{41} \le 4000$$
$$X_{11}+X_{21}+X_{31}+X_{41} \ge 2400$$
$$X_{12}+X_{22}+X_{32}+X_{42} \le 5000$$
$$X_{12}+X_{22}+X_{32}+X_{42} \ge 3000$$
$$X_{13}+X_{23}+X_{33}+X_{43} \le 5000$$
$$X_{13}+X_{23}+X_{33}+X_{43} \ge 3000$$
$$X_{14}+X_{24}+X_{34}+X_{44} \le 8000$$
$$X_{14}+X_{24}+X_{34}+X_{44} \ge 4800$$
$$X_{15}+X_{25}+X_{35}+X_{45} \le 7000$$
$$X_{15}+X_{25}+X_{35}+X_{45} \ge 4200$$
$$Y_{11}+Y_{21}+Y_{31}+Y_{41} \le 5000$$
$$Y_{11}+Y_{21}+Y_{31}+Y_{41} \ge 3000$$
$$Y_{12}+Y_{22}+Y_{32}+Y_{42} \le 7000$$
$$Y_{12}+Y_{22}+Y_{32}+Y_{42} \ge 4200$$
$$Y_{13}+Y_{23}+Y_{33}+Y_{43} \le 6000$$
$$Y_{13}+Y_{23}+Y_{33}+Y_{43} \ge 3600$$
$$Y_{14}+Y_{24}+Y_{34}+Y_{44} \le 6000$$

$$Y_{14}+Y_{24}+Y_{34}+Y_{44} \geq 3600$$

$$Y_{15}+Y_{25}+Y_{35}+Y_{45} \leq 4000$$

$$Y_{15}+Y_{25}+Y_{35}+Y_{45} \geq 2400$$

$$Z_{11}+Z_{21}+Z_{31}+Z_{41} \leq 3000$$

$$Z_{11}+Z_{21}+Z_{31}+Z_{41} \geq 1800$$

$$Z_{12}+Z_{22}+Z_{32}+Z_{42} \leq 5000$$

$$Z_{12}+Z_{22}+Z_{32}+Z_{42} \geq 3000$$

$$Z_{13}+Z_{23}+Z_{33}+Z_{43} \leq 4000$$

$$Z_{13}+Z_{23}+Z_{33}+Z_{43} \geq 2400$$

$$Z_{14}+Z_{24}+Z_{34}+Z_{44} \leq 8000$$

$$Z_{14}+Z_{24}+Z_{34}+Z_{44} \geq 4800$$

$$Z_{15}+Z_{25}+Z_{35}+Z_{45} \leq 6000$$

$$Z_{15}+Z_{25}+Z_{35}+Z_{45} \geq 3600$$

4-جميع متغيرات القرار غير سالبة وصحيحة.

$$W_i, X_i, Y_i, Z_i, W_{ij}, X_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij} \geq 0 \qquad i=1,2,3,4$$

$$J=1,2,3,4,5$$

بعد حل النموذج الرياضي للمشكلة (الحالة الاولى)، باستخدام البرنامج الجاهز (WinQSB)، تظهر لنا النتائج المبينة في الجدول(4-5) .

جدول(4-5)

NO	Decision Variable	Solution value	NO	Decision Variable	Solution value	NO.	Decision Variable	Solution value
1	W1	3000.00	19	W13	3000.00	37	X11	0
2	W2	0	20	W14	0	38	X12	0

3	W3	0	21	W15	0	39	X13	4667.00
4	W4	15000.0	22	W21	0	40	X14	0
5	X1	4667.00	23	W22	0	41	X15	0
6	X2	6833.00	24	W23	0	42	X21	0
7	X3	0	25	W24	0	43	X22	0
8	X4	17500.0	26	W25	0	44	X23	0
9	Y1	24000.0	27	W31	0	45	X24	0
10	Y2	4000.00	28	W32	0	46	X25	6833.00
11	Y3	0	29	W33	0	47	X31	0
12	Y4	0	30	W34	0	48	X32	0
13	Z1	16999.0	31	W35	0	49	X33	0
14	Z2	9001.00	32	W41	3000.00	50	X34	0
15	Z3	0	33	W42	2000.00	51	X35	0
16	Z4	0	34	W43	0	52	X41	4000.00
17	W11	0	35	W44	7000.00	53	X42	5000.00
18	W12	0	36	W45	3000.00	54	X43	333.00
55	X44	8000.00	69	Y33	0	83	Z22	1.00
56	X45	167.00	70	Y34	0	84	Z23	0
57	Y11	5000.00	71	Y35	0	85	Z24	0
58	Y12	7000.00	72	Y41	0	86	Z25	6000.00
59	Y13	6000.00	73	Y42	0	87	Z31	0
60	Y14	6000.00	74	Y43	0	88	Z32	0
61	Y15	0	75	Y44	0	89	Z33	0
62	Y21	0	76	Y45	0	90	Z34	0
63	Y22	0	77	Z11	0	91	Z35	0
64	Y23	0	78	Z12	4999.00	92	Z41	0
65	Y24	0	79	Z13	4000.00	93	Z42	0
66	Y25	4000.00	80	Z14	8000.0	94	Z43	0
67	Y31	0	81	Z15	0	95	Z44	0
68	Y32	0	82	Z21	3000.00	96	Z45	0

Objective Function (Max.) = 1078166.00

الحل اعلاه يفترض ان جميع المصانع الاربعة تعمل،قيمةدالةالهدف تساوي(1078166) دولار، نطرح من هذه القيمة مجموع التكاليف الثابتة للمصانع الاربعة والتي تساوي(157000) دولار وبهذا فان الربح الشهري الصافي للشركة من المصانع الاربعة **يساوي (921166) دولار**.

الشركة ترغب بدراسة امكانية زيادة الربح الشهري من هذه المنتجات الاربعة. في مثل هذه الحالة تبرز اهمية ادخال التكاليف الثابتة في الصياغة الرياضية لدالة هدف نموذج البرمجة العددية وهذا يستدعي استخدام المتغيرات الثنائية للبرمجة العددية في هذه الصياغة من اجل الحصول على الحل الامثل، لذا سوف نقوم ببعض التغيير في صياغة النموذج الرياضي للمشكلة قيد الدراسة وذلك باستخدام متغيرات القرار الثنائية (binary decision variables).

الحالة الثانية:

المتغيرات العددية الثنائية(binary integer variables) تلعب دورا خاص في البرمجة العددية، حيث ان هذه المتغيرات نستطيع استخدامها في حالة وجود شروط منطقية في النموذج الرياضي للمشكلة مثال ذلك الحوادث المتنافية (mutually exclusive). هناك نوعين مهمين من المشاكل التي تدخل المتغيرات الثنائية في حلها هما مشاكل الكلفة الثابتة ومشاكل تخصيص المحطات.

في هذا البحث تم استخدام المتغيرات الثنائية في صياغة النموذج الرياضي للمشكلة قيد الدراسة وكالاتي:

B_1 =1: في حالة اشتغال المصنع I.

B_1=0: في حالة عدم اشتغال المصنع I.

B_2=1: في حالة اشتغال المصنع II.

B_2=0: في حالة عدم اشتغال المصنع II.

B_3=1: في حالة اشتغال المصنع III.

B_3=0: في حالة عدم اشتغال المصنعIII.

B_4 =1: في حالة اشتغال المصنع IV.

B_4 =0: في حالة عدم اشتغال المصنع IV.

صياغة دالة الهدف: ان دالة الهدف للنموذج الثاني هي نفسها للنموذج الاول الا ان في هذه الدالة سندخل الكلفة الثابتة لكل مصنع في صياغة دالة الهدف باستخدام متغيرات القرار الثنائية وكالاتي

MaximizeZ=

$9W_1+7W_2+8W_3+10W_4+10X_1+9X_2+10X_3+11X_4+14Y_1+12Y_2+11Y_3+12Y_4+13Z_1+14Z_2+12Z_3+11Z_4-2W_{11}-1W_{12}-1W_{13}-2W_{14}-3W_{15}-1W_{21}-3W_{22}-3W_{23}-4W_{24}-1W_{25}-3W_{31}-2W_{32}-2W_{33}-3W_{34}-4W_{35}-2W_{41}-1W_{42}-2W_{43}-1W_{44}-2W_{45}-2X_{11}-1X_{12}-1X_{13}-2X_{14}-3X_{15}-1X_{21}-3X_{22}-3X_{23}-4X_{24}-1X_{25}-3X_{31}-2X_{32}-2X_{33}-3X_{34}-4X_{35}-2X_{41}-1X_{42}-2X_{43}-1X_{44}-2X_{45}-2Y_{11}-1Y_{12}-1Y_{13}-2Y_{14}-3Y_{15}-1Y_{21}-3Y_{22}-3Y_{23}-4Y_{24}-1Y_{25}-3Y_{31}-2Y_{32}-2Y_{33}-3Y_{34}-4Y_{35}-2Y_{41}-1Y_{42}-2Y_{43}-1Y_{44}-2Y45-2Z11-1Z_{12}-1Z_{13}-2Z_{14}-3Z_{15}-1Z_{21}-3Z_{22}-3Z_{23}-4Z_{24}-1Z_{25}-3Z_{31}-2Z_{32}-2Z_{33}-3Z_{34}-4Z_{35}-2Z_{41}-1Z_{42}-2Z_{43}-1Z_{44}-2Z_{45}$ **-45000B1-40000B2-33000B3-39000B4**

صياغة قيود المشكلة

1-النموذج الرياضي يجب ان يحقق الكمية المنقولة من كل مصنع الى كل مركز توزيع تساوي الكمية المنتجة في المصنع نفسة وللمنتجات الاربعة. لذا فهي تبقى نفس صياغة قيود الحالة الاولى.

2–الوقت المستغرق لانتاج الوحدة الواحدة ولجميع المنتجات الاربعة في كل مصنع يجب ان لايتجاوز الوقت الكلي المتاح لكل مصنع. هذه القيود ستدخل المتغيرات الثنائية في صياغتها لانها خاصة بطاقة كل مصنع من الوقت المتاح (اي باشتغال كل مصنع) .

$0.02W_1+0.03X_1+0.02Y_1+0.01Z_1$ **-850B1** ≤ 0

$0.01W_2+0.02X_2+0.04Y_2+0.03Z_2$ **-835B2** ≤ 0

$0.02W_3+0.03X_3+0.01Y_3+0.05Z_3$ **-750B3** ≤ 0

$0.03W_4+0.02X_4+0.01Y_4+0.02Z_4$ **-800B4** ≤ 0

3–كمية الانتاج التي تسلم من كل مصنع الى كل مركز توزيع يجب ان لاتتجاوز الطلب او ليست اقل من 60% من الطلب.هذه القيود هي نفسها قيود نموذج الحالة الاولى.

4- جميع متغيرات القرار غير سالبة وصحيحة، جميع المتغيرات الثنائية (1-0).

$W_i, X_i, Y_i, Z_i, W_{ij}, X_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij} \geq 0$ i=1,2,3,4

All B_i=0, 1 j=1,2,3,4,5

بعد حل النموذج الرياضي(الحالة الثانية) للمشكلة باستخدام البرنامج الجاهز (WinQSB)، تظهر لنا النتائج المبينة في الجدول(5-5) .

جدول (5-5)

NO.	Decision Variable	Solution value	NO	Decision Variable	Solution value	NO.	Decision Variable	Solution value
1	W1	3000.00	34	W43	0	67	Y31	0
2	W2	0	35	W44	7000.00	68	Y32	0
3	W3	0	36	W45	3000.00	69	Y33	0
4	W4	15000.00	37	X11	0	70	Y34	0
5	X1	4667.00	38	X12	0	71	Y35	0
6	X2	6833.00	39	X13	4667.00	72	Y41	0
7	X3	0	40	X14	0	73	Y42	0
8	X4	17500.00	41	X15	0	74	Y43	0
9	Y1	24000.00	42	X21	0	75	Y44	0
10	Y2	4000.00	43	X22	0	76	Y45	0
11	Y3	0	44	X23	0	77	Z11	0
12	Y4	0	45	X24	0	78	Z12	4999.00
13	Z1	16999.00	46	X25	6833.00	79	Z13	4000.00
14	Z2	9001.00	47	X31	0	80	Z14	8000.00
15	Z3	0	48	X32	0	81	Z15	0
16	Z4	0	49	X33	0	82	Z21	3000.00
17	W11	0	50	X34	0	83	Z22	1.00
18	W12	0	51	X35	0	84	Z23	0
19	W13	3000.00	52	X41	4000.00	85	Z24	0
20	W14	0	53	X42	5000.00	86	Z25	6000.00

21	W15	0	54	X43	333.00	87	Z31	0
22	W21	0	55	X44	8000.00	88	Z32	0
23	W22	0	56	X45	167.00	89	Z33	0
24	W23	0	57	Y11	5000.00	90	Z34	0
25	W24	0	58	Y12	7000.00	91	Z35	0
26	W25	0	59	Y13	6000.00	92	Z41	0
27	W31	0	60	Y14	6000.00	93	Z42	0
28	W32	0	61	Y15	0	94	Z43	0
29	W33	0	62	Y21	0	95	Z44	0
30	W34	0	63	Y22	0	96	Z45	0
31	W35	0	64	Y23	0	97	B1	1.00
32	W41	3000.00	65	Y24	0	98	B2	1.00
33	W42	2000.00	66	Y25	4000.00	99 100	B3 B4	0 1.00

ان الحل الامثل لنموذج البرمجة العددية الثنائية في هذه الحالة يفرض على الشركة اغلاق المصنع الثالث(B_3=0)، الربح الشهري الصافي المتحقق للشركة **يساوي(954166) دولار**.

6- الاستنتاجات Conclusions

- صعوبة ادخال التكاليف الثابتة في الصياغة الرياضية لدالة هدف نموذج البرمجة الخطية لان متخذ القرارلا يستطيع صياغتها بسهولة في هذا النموذج.
- ان نماذج البرمجة العددية تعطي المرونة الكافية في بناء النموذج الرياضي المناسب لمشكلات تخطيط الانتاج الذي بدوره يؤدي الى الحصول على الحل الامثل .

- ضرورة ادخال التكاليف الثابتة في الصياغة الرياضية لدالة هدف نماذج البرمجة العددية والتي تؤدي بدورها الى تحسين الحل .
- استخدام المتغيرات الثنائية في بناء النموذج الرياضي لمشاكل البرمجة العددية ذات الشروط المنطقية او التي تتعامل مع اكثر من حدث وفي انٍ واحد .
- ان الارباح الشهرية للشركة ازدادت بمقدار (33000) دولار عما كانت عليه في حال اشتغال المصانع الاربعة .

References

[1] Barnhart,Cynthia & Wilson Nigel H.M "integer programming"2003.

[2]Bernard W. Taylor" Introduction to management science", Ninth Edition 2006 Virginia Polytechnic Institute and State University.publisher:Prentice Hall.

[3] Hillier, Frederick S & Lieberman "introduction to operations research" seventh edition 2001, Mc Graw.

[4] Lawrence, John A . & Pasternack, Barry A. "applied management science" 1998, John Wiley &Sons.Inc.

[5] Ritvirool Apichai "production planning in the milk industry" October 2007, Naresuan University.

[6] Taha,Hamdy A . "Operations Research An Introduction" eighth edition. 2007 Prentice-Hall, Inc.

[7] www.math.ohiou.edu "integer programming models"2008