

## تحليل الاستقرار في معادلة الحمل والانتشار

سعد عبد الله مناع

كلية علوم الحاسبات والرياضيات

جامعة الموصل

بدران جاسم سالم

كلية التربية الأساسية

جامعة الموصل

تاريخ استلام البحث: ٢٠٠٧/٢/١٩

تاريخ قبول البحث: ٢٠٠٧/٦/٢٨

### ABSTRACT

The Stability Analysis of Convection & Diffusion equation by using Fourier mode Stability analysis in two cases has been considered , the first one when the amplitude is constant and the second one when the amplitude is variable .

In the first case, the solution is always stable and in the second case the solution is conditionally stable .

### الملخص

تمت في هذا البحث دراسة تحليل الاستقرار لمعادلة الحمل والانتشار باستخدام طريقة تحليل الاستقرار من النمط Fourier (Fourier mode Stability analysis) في حالتين، الأولى في حالة كون السعة ثابتة والثانية في حالة كون السعة متغيرة باستخدام الحل التحليلي وقد تبين انه في حالة كون السعة ثابتة فان الحل يكون مستقراً دائماً، أما في حالة كون السعة متغيرة فان الحل يكون مستقراً على نحو مشروط .

### 1- المقدمة والنموذج الرياضي: Introduction & Mathematical Model

أن أي نظام مهما كانت طبيعته إذا وجد في حالة ما  $S$  يقال أن الحالة  $S$  مستقرة (stable) إذا كانت الإزعاجات أو التأثيرات الخارجية التي يتعرض لها النظام لا تؤثر في الحالة  $S$ . النظام الشمسي على سبيل المثال موجود حالياً في حالة معتمدة على الزمن ذلك أن الكواكب تدور حول الشمس بصورة منتظمة وفي حالة دخول جسم سماوي إضافي صغير إلى النظام الشمسي فان هذا النظام لا يتأثر إذ لا تتأثر الحالة الأصلية لهذا النظام بالإزعاجات الصغيرة، أي أن النظام الشمسي مستقر [10].

## 2- النموذج الرياضي:

أن من معادلات الانتشار-التفاعل المعروفة معادلة الحمل والانتشار الآتية: [9]

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - V \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \quad \dots(1)$$

حيث

$$x \in (0,1)$$

$$u(x,0) = \phi(x)$$

$$u(1,t) = u(0,t) = 0$$

$$t > 0$$

$$D, V > 0$$

D يمثل معامل الانتشار بينما V يمثل معامل التفاعل [4].

درس Maginu في عام (1978) [9] استقرارية الحلول اللازمة لهذا النوع من معادلات التفاعل - الانتشار باستخدام طريقة Liapunov الثانية إذ حصل على شروط الاستقرار وبيّن أن هذه الشروط مرتبطة على نحو وثيق بشروط الوجود لهذه الحدود.

وجد Keyes في عام 1979 [8] كيفية انتقال النبضات العصبية خلال المحاور واستخدم مسألة الحمل والانتشار بفرض أن معامل الانتشار معلوم .

واستخدم الباحثان هودكن وكيسي في عام 1979 [8] مسألة الحمل والانتشار لمعرفة تركيز البوتاسيوم بعد عزل محورات كبير للحبار في محلول ملحي خاص ووجدوا أن تركيز البوتاسيوم المشع يمكن أن يقترب بالمنحني  $u(x,0) = Ae^{-\frac{x^2}{2}}$ .

كما قام كل من Smoller و Conley في عام (1980) [3] بتوضيح ودراسة كيفية استخدام عدد من المفاهيم التكنولوجية للحصول على معلومات أدق بشأن الحلول اللازمة لمعادلات التفاعل والانتشار.

Hickernell & Yortsos في عام 1986 [6] اختبرا الاستقرارية الخطية لعمليات الإزاحة القابلة للامتزاج في منطقة متسامية بغياب الانتشار والتشتت .

اختبر Howes في عام 1986 [7] استقرارية الحلول الثابتة لمعادلات التغير الحراري والانتشار للتأثيرات في البيانات الأولية وقد استخدمت بشكل خاص شروط على حدود التفاعل والانتشار لإثبات استقرارية الطبقة اللازمة.

تناول Buss & Clever في عام 1994 [2] طريقة دراسة متتاليات الانقسام في شكل جريان المائع وقدموا النتائج الجديدة حول انتشار النبض وحمله في نقطة من مائع تم تسخينه من الأسفل.

واقترح Fortunate & Kurizhi عام 1998 [5] طريقة تعمل وبشكل مؤثر على استقرارية النقاط الصامدة في الحركة التقليدية لنظام جيشاني حساس .

وفي عام (2000) درس Atoull & King [1] استقرارية طريقة العناصر المنتهية وتبين لهما في معامل لزوجة صغير جدا تكون طريقة Galerkin غير مستقرة.

وفي هذه الدراسة تمت دراسة مفصلة لاستقرارية الحلول اللازمية لمعادلة الحمل والانتشار باستخدام تحليل الاستقرارية نمط Fourier في حالتين الأولى في حالة كون السعة ثابتة والثانية في حالة كون السعة متغيرة.

### 3- تحليل الاستقرار:

أن هذا النوع من دراسة الاستقرار يوضح كثيراً من خواص الاستقرار الشائعة في ميكانيك الموائع والفيزياء وعلم الأحياء إذ يوضح كيف أن تغيراً أو إزعاجاً صغيراً في النظام الفيزيائي يمكن أن يؤدي في النهاية إلى نتائج بعيدة كما يساعدنا هذا النوع من دراسة تحليل الاستقرار في دراسة السلوك المستقبلي للنظام الفيزيائي ويبين كذلك تأثير عدم الاستقرار في النظام [10].

### 4- التحويلات اللابعدية لمعادلة الحمل والانتشار:

لتحويل معادلة الحمل والانتشار المتمثلة بالمعادلة (1) إلى الحالة اللابعدية في  $x, t$  فأنا نحتاج إلى التحويلات الآتية :

$$X = \frac{x}{L}$$

$$T = \frac{t}{L^2}$$

وباستخدام هذا التحويل نحصل على:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{1}{L} \frac{\partial u(x,t)}{\partial X}$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial X^2}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial u(x,t)}{\partial T}$$

وبعد تعويض الكميات أعلاه في المعادلة (1) ينتج:

$$\frac{1}{L^2} \frac{\partial u(x,t)}{\partial T} = \frac{D}{L^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial X^2} - \frac{V}{L} \frac{\partial u(x,t)}{\partial X}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u(x,t)}{\partial T} = D \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial X^2} - VL \frac{\partial u(x,t)}{\partial X}$$

$$0 < X < 1$$

$$D, V > 0$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$

...(2)

حيث أن المعادلة (2) تمثل الصيغة اللابعدية لمعادلة الحمل والانتشار.

## 5- تحليل الاستقرار من النمط Fourier لمعادلة الحمل والانتشار:

### 5-1 - تحليل الاستقرار في حالة كون السعة ثابتة:

الفكرة الأساسية لهذه الطريقة هي افتراض الحل على الشكل الآتي [10]:

$$u(X, T) = u_1(X) + u_2(X, T) \quad \dots(3)$$

إذ تمثل  $u_1(X)$  الحل اللازم للمعادلة (2) في حين تمثل  $u_2(X, T)$  الإزعاج الذي يعانيه النظام حيث:

$$u_2(X, T) = A e^{ik(X - cT)} \quad \dots(4)$$

$$i = \sqrt{-1} \quad , \quad c = c_1 + ic_2 \quad , \quad k > 0 \quad , \quad A > 0$$

إذ أن  $A$  يمثل سعة الموجة، و  $k$  يمثل العدد الموجي (عدد الذبذبات التي تحدث في زمن معين في الفترة  $[-p, p]$ )،  $c$  هي سرعة الموجة وهي ذات قيمة معقدة، وأن القيمة الموجبة أو السالبة لـ  $c_2$  هي التي تحدد حالة الاستقرار أو عدمه، ففي حالة كون  $c_2 > 0$  يزداد الإزعاج بمرور

الزمن، وإن الحل يكون غير مستقر في هذه الحالة. أما في حالة كون  $c_2 < 0$  فإن الإزعاج يتلاشى بمرور الزمن ويكون الحل مستقرًا في هذه الحالة. أما عندما  $c_2 = 0$  فهي تعطي منحنى الاستقرارية المتعادلة وهو المنحني الذي يفصل بين المنطقة المستقرة وغير المستقرة.

وبتعويض المعادلة (3) في المعادلة (2) نحصل على:

$$\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial T} = D \left( \frac{\partial^2 u_1(x)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial X^2} \right) - VL \left( \frac{\partial u_1(x)}{\partial X} + \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial X} \right)$$

وبفصل الحالتين الزمنية واللازمية نحصل على:

$$\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial T} = D \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial X^2} - VL \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial X} \quad \dots(5)$$

$$D \frac{\partial^2 u_1(x)}{\partial X^2} - VL \frac{\partial u_1(x)}{\partial X} = 0 \quad \dots(6)$$

حيث أن المعادلة (5) تمثل الحالة الزمنية في حين أن المعادلة (6) تمثل الحالة اللازمية، التي يكون الحل بالشكل الآتي [8]:

$$u_1(X) = \frac{A\sqrt{B}}{\sqrt{B+4D}} e^{-\left[ \frac{(X-V)^2}{B+4D} \right]} \quad \dots(7)$$

حيث أن كلاً من  $A, B$  ثوابت اختيارية معلومة.

وبتعويض المعادلة (4) في المعادلة (5) نحصل على:

$$-ickAe^{ik(X-cT)} = -Dk^2 Ae^{ik(X-cT)} - VLAike^{2ik(X-cT)}$$

$$\Rightarrow -ic = -Dk - iVL$$

$$\Rightarrow -ic_1 + c_2 = -Dk - iVL$$

$$c_1 = VL$$

$$c_2 = -Dk$$

وبما أن  $D, k$  موجبة دائماً فإن  $c_2 < 0$  وبذلك فإن النظام في هذه الحالة يكون مستقراً دائماً تحت أية ظروف.

## 2-5 - تحليل الاستقرار في حالة كون السعة متغيرة:

سوف تتم في هذا الجزء دراسة الاستقرار تحليلياً، ففي حالة كون السعة متغيرة فإن المعادلة (4) تتحول إلى [10]:

$$u_2(X, T) = A(X) e^{ik(X-cT)} \quad \dots(8)$$

وبتعويض المعادلة (8) في المعادلة (5) ينتج:

$$\begin{aligned} i k A(X) e^{ik(X-cT)} &= D A''(X) e^{ik(X-cT)} + 2i D k A'(X) e^{ik(X-cT)} \\ &- D k^2 A(X) e^{ik(X-cT)} + V L i k A(X) e^{ik(X-cT)} + V L A'(X) e^{ik(X-cT)} \\ \Rightarrow c_2 k A(X) &= D A''(X) - D k^2 A(X) + V L A'(X) \\ \Rightarrow A''(X) + \frac{V L}{D} A'(X) - \left(\frac{c_2 k}{D} - k^2\right) A(X) &= 0 \end{aligned} \quad \dots(9)$$

الحل العام للمعادلة (9) مع الشروط الحدودية في المعادلة (2) هو [10]:

$$A(X) = e^{-\frac{\beta X}{2}} (A \cos \beta X + B \sin \beta X) \quad \dots(10)$$

حيث أن:

$$\beta = \frac{V L}{2 D} \sqrt{1 - 4 c_2 k}$$

وأن  $A, B$  ثوابت اختيارية، وباستخدام الشروط الحدودية نحصل على:

$$\begin{aligned} A(0) &= 0 \\ \Rightarrow A &= 0 \\ A(1) &= 0 \\ \Rightarrow B &= 0 \\ A(X) &= 0 \end{aligned}$$

وهو الحل التافه .

ولتحديد قيمة  $b$  نفرض أن  $B \neq 0$  إذا

$$B \sin \beta = 0$$

$$\Rightarrow \beta = n\pi, n = 1, 2, 3, \dots$$

ولكن:

$$\beta = \frac{VL}{2D} \sqrt{1 - 4C_2 k}$$

إذا:

$$\frac{VL}{2D} \sqrt{1 - 4C_2 k} = n\pi$$

$$\sqrt{1 - 4C_2 k} = \frac{2Dn\pi}{VL}$$

$$1 - 4C_2 K = \left( \frac{2Dn\pi}{VL} \right)^2$$

$$C_2 = \frac{1}{4k} \left[ 1 - \left( \frac{2Dn\pi}{VL} \right)^2 \right] \quad \dots(11)$$

للمعادلة (11) الحالات الثلاث الآتية:

(i) إذا كانت  $\left( \frac{2Dn\pi}{VL} \right)^2 < 1$  فإن  $C_2 > 0$  والحل غير مستقر في هذه الحالة.

(ii) إما إذا كانت  $\left( \frac{2Dn\pi}{VL} \right)^2 > 1$  فإن  $C_2 < 0$  والحل مستقر في هذه الحالة.

(iii) أما إذا كانت  $\left( \frac{2Dn\pi}{VL} \right)^2 = 1$  فإن  $C_2 = 0$  وللحصول على منحنى الاستقرار نأخذ أقل قيمة ذاتية عندما  $n = 1$  فإن:

$$L = \frac{2D\pi}{V} \quad \dots(12)$$

| $L$ | $V = 0.1$<br>$D$ | $V = 0.3$<br>$D$ | $V = 0.5$<br>$D$ |
|-----|------------------|------------------|------------------|
| 0   | 0.0              | 0.0              | 0.0              |
| 1   | 0.015915         | 0.047746         | 0.079577         |
| 2   | 0.031830         | 0.095496         | 0.159154         |
| 3   | 0.047746         | 0.143294         | 0.236732         |
| 4   | 0.063661         | 0.190985         | 0.318309         |
| 5   | 0.079577         | 0.238732         | 0.397887         |
| 6   | 0.095496         | 0.286478         | 0.477464         |
| 7   | 0.111408         | 0.334225         | 0.557042         |
| 8   | 0.127323         | 0.381971         | 0.636619         |
| 9   | 0.143294         | 0.429718         | 0.716197         |
| 10  | 0.159154         | 0.493380         | 0.795774         |

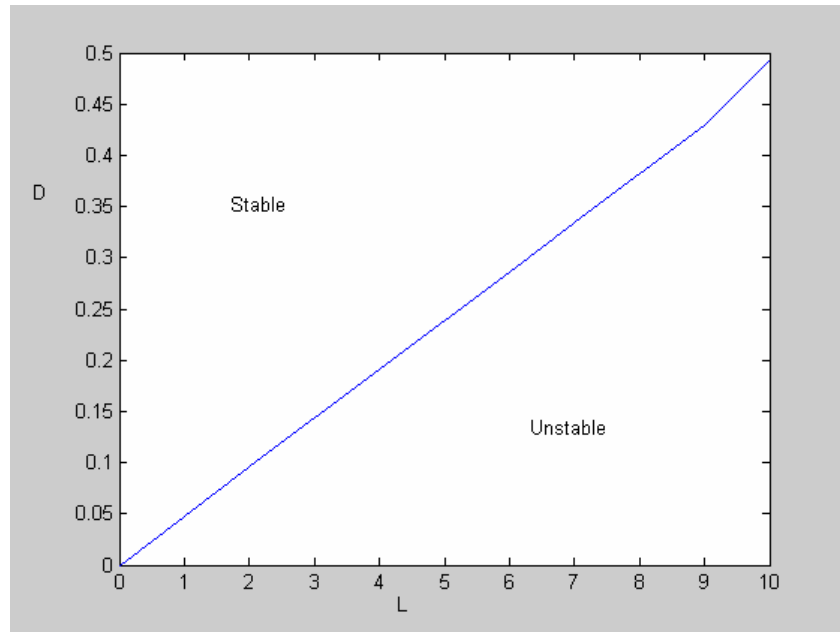
Table (1)

يمثل قيم معامل الانتشار في المعادلة (12)

| $L$ | $D = 0.1$<br>$V$ | $D = 0.3$<br>$V$ | $D = 0.5$<br>$V$ |
|-----|------------------|------------------|------------------|
| 1   | 0.628318         | 1.884955         | 3.141592         |
| 2   | 0.314159         | 0.942477         | 1.570796         |
| 3   | 0.209439         | 0.628318         | 1.047197         |
| 4   | 0.157079         | 0.471238         | 0.785398         |
| 5   | 0.125663         | 0.376991         | 0.628318         |
| 6   | 0.104719         | 0.314159         | 0.523598         |
| 7   | 0.089759         | 0.269279         | 0.448798         |
| 8   | 0.078539         | 0.2356194        | 0.392699         |
| 9   | 0.069813         | 0.209439         | 0.349065         |
| 10  | 0.062831         | 0.188495         | 0.3141592        |

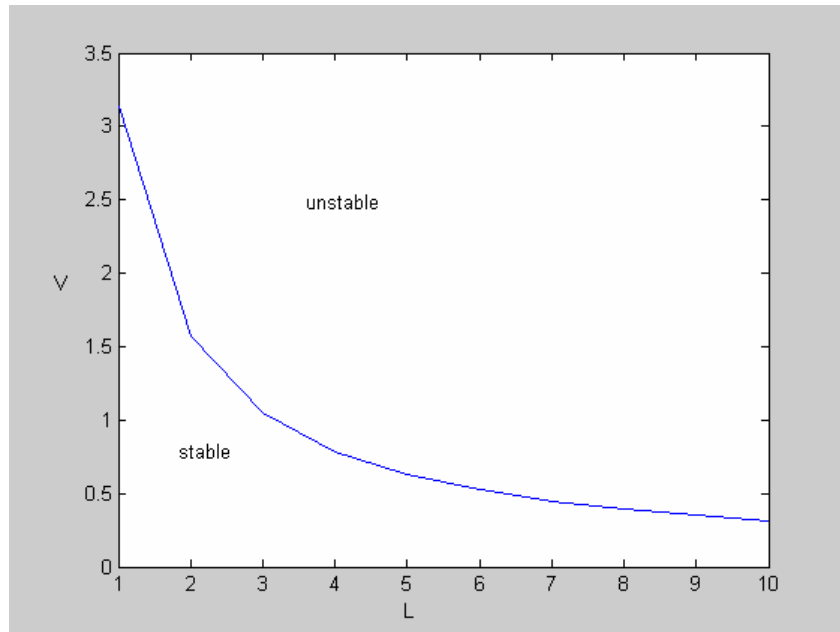
Table (2)

يمثل قيم معامل الحمل في المعادلة (12)



الشكل (1)

يمثل مناطق الاستقرار للمعادلة (12) عندما  $(V = 0.1, 0.3, 0.5)$



الشكل (2)

يمثل مناطق الاستقرار للمعادلة (12) عندما  $(D = 0.1, 0.3, 0.5)$

## 6 - الاستنتاجات:

تبين من خلال الجداول والإشكال أن مناطق الاستقرارية تزداد كلما كانت قيم معامل الحمل  $V$  وقيم معامل الانتشار  $D$  كبيرة وذلك لكون معامل الحمل يتناسب عكسياً مع معامل الانتشار وهذا واضح من المعادلة (12) وبالعكس كلما كانت قيم معامل الحمل  $V$  وقيم معامل الانتشار  $D$  صغيرة قلت مناطق الاستقرارية. كذلك تمت دراسة تحليل الاستقرارية لمعادلة الحمل والانتشار وقد تم الحصول على النتائج الآتية:

$$(i) \text{ الحل غير مستقر إذا كانت } \left(\frac{2Dn\pi}{VL}\right)^2 < 1$$

$$(ii) \text{ الحل مستقر إذا كانت } \left(\frac{2Dn\pi}{VL}\right)^2 > 1$$

$$L = \frac{2D\pi}{V} \text{ وان منحنى الاستقرارية المتعادل هو:}$$

المصادر

- [1] Atoull J.A& King, B.B. Stabilized Finite Element Methods and Feed back control for Burger Equation American control conference, 25-31.(2000)
- [2] Busse, F.H., and Clever, R.M. Higher Order Bifurcations in Fluid Systems and Coherent Structures in Turbulence Non-Linear Coherent Structures in Physics and Biology. PP. 405-415. (1994).
- [3] Conley, C. & Smoller, J., Topological Techniques in Reaction-Diffusion Equation, In: Jager, W, Rost, H. & Tautu, P., Eds., Biological Growth and Spread, Lecture Notes in Biological Math. 38 pp.473-483 (1980).
- [4] Edward Allen, and John Burns The Impact of Finite Precision Arithmetic and Sensitivity on the Numerical Solution of Partial Differential Equation (2000)
- [5] Fortunato, M., Kurizki, G. and Schleich W.P., Stabilization of Deterministically Chaotic Systems by Interference and Quantum Measurements The Ikeda Map Case Physical Review Letters , Vol. 80, No.26,PP 5730-5733 (1998).
- [6] Hickernell, F. J. &Yortsos, Y.C., Linear Stability of Miscible Displacement Processes in Porous Media in the Absence of Dispersion, Studies, in Applied Mathematics Vol. Lxxiv.No. 2., P.P.93-116 (1986).
- [7] Howes, F.A. some Stability Results for Advection-Diffusion Equation, Studies in Applied Mathematics, Vo. Lxxiv.No.1.,p.p 27-31(1986)
- [8] Keyes S, W.(size – Distribution Analysis of Macromolecules by sedimentation velocity Ultracentrifugation and Convection & Diffusion equation) Biophysical journal volume 78 pp 1606-1619 (1979)
- [9] Maginu, K., Stability of Stationary Solutions of a Semilinear Parabolic (PDE), J.Math. Anal. Appl. 63,pp.224-243, (1978).
- [10] Logan J. D. Applied Mathematics Wiley and Sony (1987)