

في المقاسات والتشاكلات التصالبية

عبد العالي جاسم محمد

كلية التربية

جامعة الموصل

منال إدريس عبد فتحي

كلية علوم الحاسبات والرياضيات

جامعة الموصل

تاريخ استلام البحث ٢٢ / ١١ / ٢٠٠٦

تاريخ قبول البحث ٥ / ٣ / ٢٠٠٧

ABSTRACT

The purpose of this paper is to study the crossed modules and crossed homomorphisms, and since these concepts are related to the group actions on groups we presented these types of actions.

الملخص

الغرض من هذا البحث هو دراسة المقاسات والتشاكلات التصالبية، ولصلة هذين المفهومين بأفعال الزمر على الزمر فقد استعرضنا هذا النوع من الأفعال.

1- المقدمة:

تم الحصول على الكثير من نظريات الزمر، وخاصة الجزء الذي يتعامل مع الزمر المنتهية، إذ تم الحصول عليه بالأصل من دراسة زمر التباديل. إذ إن بعض المفاهيم (مثل العناصر الثابتة والعناصر المثبتة) لا تظهر في نظرية الزمر المجردة ولكنها واضحة في زمر التباديل [10] لذا فمن الطبيعي أن يكون مفهوم أفعال الزمر المنتهية على مجموعات منتهية قد بدأ بتعريف فعل زمرة مثل G على مجموعة مثل X على أنه تشاكل زمري من G إلى $S_{|X|}$ زمرة التباديل على X .

عندما تكون كل من H و K زمرة فإن $\text{Aut}K$ مجموعة التشاكلات من K على K هي زمرة جزئية من زمرة التباديل $S_{|X|}$ ، لذا فإنه يمكن القول بأن فعل الزمرة H على الزمرة K هو تشاكل زمري من الزمرة H إلى الزمرة $\text{Aut}K$.
إن دراسة المقاسات والتشاكلات التصالبية تعتبر من التطبيقات التي لها ارتباط كبير في مفهوم أفعال الزمر على الزمر.

Group actions on groups

2- أفعال الزمر على الزمر

يقدم هذا البند تعريفا لأفعال الزمر على الزمر مكافئا للتعريف الوارد في المقدمة، كذلك نستعرض بعضا من المفاهيم الأساسية كالأفعال المتعدية والحرية والمنتظمة، لمزيد من المعلومات الرجوع إلى [1] [8] [10].

تعريف 2-1: [10]

لتكن كل من H و K زمرة نقول أن هناك فعل زمري أيسر للزمرة H على الزمرة K إذا كان لكل $h \in H$ و $k \in K$ يوجد عنصر وحيد مثل $h_k \in K$ بحيث أن لكل $k, k_1, k_2 \in K$ ، $h, h_1, h_2 \in H$ ،

$$h(k_1 k_2) = h_{k_1} h_{k_2} \quad (\text{iii}), \quad h_2(h_1 k) = h_2 h_1 k \quad (\text{ii}), \quad e_k = k \quad (\text{i})$$

عندئذ سنرمز للزمرة K بالرمز K زمرة H ، وعند إهمال الشرط (iii) أي اعتبار K مجموعة نقول أن فعل الزمرة H يساري على المجموعة K . بصورة مماثلة نعرف الفعل الزمري الأيمن لزمرة على زمرة، كما يمكن عد كل زمرة H -يمنى هي زمرة H يسرى والعكس بالعكس وذلك وفق القاعدة $h_k = k^{h^{-1}}$ لكل $h \in H$ و $k \in K$.

المبرهنة التالية تظهر الربط بين التعريف (2-1) والتعريف الوارد في المقدمة.

مبرهنة 2-2: [10]

(i) لتكن K زمرة H ، فإن لكل $h \in H$ يوجد تطبيق $\rho_h : K \rightarrow K$ معرف بالقاعدة :

$$\rho_h(k) = h_k \quad \forall k \in K$$

وهذا التطبيق هو تشاكل تقابلي كذلك التطبيق $r : H \rightarrow \text{Aut } K$ المعرف بالقاعدة $\rho(h) = \rho_h$ لكل $h \in H$ هو تشاكل ويسمى التمثيل التشاكلي التقابلي للزمرة H المقترن بالفعل ρ هو اختصار (فعل الزمرة H على الزمرة K).

(ii) لتكن كل من K و H زمرة وليكن $\gamma : H \rightarrow \text{Aut } K$ تشاكلا، فإن للزمرة H فعلا على الزمرة K (K هي زمرة H) معرفا بالقاعدة: $h_k = (\gamma(h))(k)$ لكل $h \in H, k \in K$ والفعل المقترن هو g .

البرهان:- نفس أسلوب البرهان في [10]

ملاحظة 2-3:

لتكن كل من H و K زمرة، يوجد على الأقل فعل واحد للزمرة H على زمرة K يسمى الفعل التافه (Trivial Action) معرف بالقاعدة: $h_k = k$ لكل $h \in H$ و $k \in K$. القضية التالية تعطينا احد الشروط التي تؤدي إلى كون الفعل التافه هو الفعل الوحيد لزمرة على زمرة.

قضية (2-4):

ليكن p و q عددين أوليين بحيث أن $p \nmid q$ فان الفعل الوحيد لزمرة مرتبتها p على زمرة مرتبتها q هو الفعل التافه.

البرهان:

لتكن K زمرة مرتبتها q فإنها زمرة دوارة. لذا فان $\text{Aut}K = q-1$.
لتكن H زمرة مرتبتها p فإنها زمرة دوارة. لنفرض أن $K = \langle k \rangle$ و $H = \langle h \rangle$.
ليكن $r: H \rightarrow \text{Aut}K$ فعلا للزمرة H على الزمرة K . لذا فان ρ تشكل من الزمرة H إلى الزمرة $\text{Aut}K$ ولكن $|\text{Aut}K| = q-1 = |H|$. فان ρ غير متباين. لذا فإن $\ker \rho \neq \{e_H\}$.
ولكن $\ker \rho$ زمرة جزئية من الزمرة H فانه يجب أن يكون $\ker \rho = H$ لان مرتبة H عدد أولي. لذا فانه $r_x = r_{(x)} = r_e$ لكل $x \in H$. ومنها $h_k = \rho_h(k) = \rho_e(k) = e_k = k$ وهكذا فانه $h^s(kr) = k(1)^s r = k^r$ لكل $s, r \in \mathbb{Z}^+$ حيث أن $0 \leq r \leq q$ لكل $0 \leq s \leq p$.

ومنها نستنتج أن فعل الزمرة H على الزمرة K هو الفعل التافه فقط.
من المفاهيم الأساسية في نظرية أفعال الزمر المدارات (orbits) والتعدي (transitivity). كذلك فان الأفعال المنتظمة هي من الأفعال المهمة أيضا وسنلاحظ أن فعل زمرة على زمرة يكون منتظما إذا وفقط إذا كانت كلتا الزمرتين مكونة من العنصر المحايد فقط.

تعريف 2-5: [7]

لتكن K زمرة H - فأنها تسمى متعدية transitive H -group (فعل H الزمري على K متعديا) إذا كانت $K \neq j$ وان لأي $k_1, k_2 \in K$ يوجد $h \in H$ بحيث أن $h k_1 = k_2$.
ليكن $k \in K$ فإن المجموعة $[k] = \{h_k : h \in H\}$ تسمى مدار k وسوف نرمز لمجموعة مدارات K بالرمز $[K]$. لذا فان K هي زمرة H - متعدية إذا فقط إذا كان $|[K]| = 1$.

قضية مساعدة 2-6: لتكن K زمرة H - فان

$$(i) \quad h e = e \quad \text{لكل } h \in H, \quad (ii) \quad (h k)^{-1} = h (k^{-1}) \quad \text{لكل } h \in H \text{ و } k \in K.$$

البرهان: -

$$(i) \quad \text{ليكن } r: H \rightarrow \text{Aut} K \text{ هو فعل الزمرة } H\text{- على الزمرة } K \text{ معرف بالقاعدة:}$$

$$\rho_{(h)} = \rho_h \quad \text{لكل } h \in H$$

حيث $\rho_h: K \rightarrow K$ هو تشاكل تقابلي معرف بالقاعدة $r_h(k) = h k$ لكل $k \in K$.

لذا فان $r_h(e) = h e$ ولكن $\rho_h(e) = e$ لكون r_h تشاكل وهذا معناه أن $h e = e$

$$(ii) \quad h \in H \text{ و } k \in K \quad (h k)^h (k^{-1}) = {}^h(k k^{-1}) = {}^h(e) = e$$

$$\text{وكذلك } ({}^h k)^{-1} = {}^h(k^{-1}) \quad ({}^h k) = {}^h(k^{-1} k) = {}^h(e) = e \text{ لذا فانه } ({}^h k)^{-1} = {}^h(k^{-1})$$

قضية مساعدة 2-7: -

لتكن K زمرة H - فإن

$$(i) \quad [e] = \{e\}$$

$$(ii) \quad e \in [k] \quad \text{إذا وفقط إذا كان } k = e$$

البرهان: - مباشر

تعريف 2-8: [10]

لتكن K زمرة H - وليكن $k \in K$ يقال للمجموعة $\text{stab}_H(k) = \{h \in H: h k = k\}$

بالمجموعة المثبتة للعنصر k .

تعريف 2-9: [7]

نقول أن K هي زمرة H - حرة (free H -group) (أو فعل H الزمرتي على K هو فعل حر)

عندما يكون $\text{stab}_H(k) = \{e\}$ لكل $k \in K$

تعريف 2-10: [7]

إن فعل الزمرة H على الزمرة K يسمى فعلا منتظما (Regular) إذا كان هذا الفعل متعديا وحرًا.

قضية 2-11:

فعل الزمرة H على الزمرة K يكون منتظما إذا وفقط إذا كانت $K = \{e\}$ و $H = \{e\}$

البرهان:

ليكن فعل الزمرة H على الزمرة K منتظما. لذا فان هذا الفعل متعد وحر.
 لنفرض أن $K \neq \{e\}$. لذا فانه يوجد على الأقل عنصر مثل $k \in K$ بحيث أن $k \neq e$.
 بما أن $e \notin [k]$ فان $[e] \neq [k]$ وهذا يناقض فرضية كون K متعدية. لذا يجب أن يكون $K = \{e\}$.
 والآن ولكون الفعل حرا فانه $\text{stab}_H(k) = \{e\}$ لكل $k \in K$.
 لنفرض أن $H \neq \{e\}$ لذا فانه يوجد عنصر مثل $h \in H$ حيث أن $h \neq e$.
 لكون $h^2 e = e$ فإن $h \in \text{stab}_H(e)$ وهذا يؤدي إلى أن $\text{stab}_H(e) \neq \{e\}$.
 وهذا يناقض كون فعل الزمرة H على الزمرة K فعلا حرا.
 لذا فانه يجب أن يكون $H = \{e\}$.
 الآن نفرض أن $K = \{e\}$ و $H = \{e\}$ لذا فان فعل H على K هو متعد وحر، ومنها فعل H على K منتظم.

Crossed Modules

3- المقاسات التصلابية

حظي مفهوم المقاسات التصلابية باهتمام العديد من العلماء والباحثين إذ يعد J.H.Whitehead [2] من أوائل من تطرق إلى دراسة هذا المفهوم، ودرس بعدها من قبل K.J.Norriv, R.Brown وآخرين كما في [3][4][9].

تعريف 3-1 :- [3]

المقاس التصلابي $M = (\mu: M \rightarrow P)$ (أحيانا يرمز له بالرمز (M, P, μ)) ويتكون من التشاكل الزمري $m: M \rightarrow P$ مع فعل ايمن للزمرة P على الزمرة M بحيث يتحقق الشرطان:

$$(CM1): \mu(m^p) = p^{-1}\mu(m)p$$

$$(CM2): m^{m(n)} = n^{-1}mn$$

لكل $p \in P, m, n \in M$

أمثلة (2-3):

فيما يأتي بعض الأمثلة الجبرية الأساسية للمقاسات التصلابية ونجدها في المصادر [2][3][4].

1- لتكن الزمرة الابدالية M هي زمرة P - وليكن $M = 0(M \rightarrow P)$ حيث 0 هو التشاكل الصفري المعروف بالقاعدة: $0(m) = e$ لكل $m \in M$ فإن M مقاس تصالبي يدعى بالمقاس التصالبي الصفري.

2- لتكن M زمرة جزئية سوية في P ولتكن M زمرة P - بالفعل الاقتراني :-

$$p \in P, m \in M \quad \text{لكل} \quad m^p = p^{-1}mp$$

فإن التطبيق الاحتوائي $M = (i: M \rightarrow P)$ هو مقاس تصالبي يدعى بالمقاس التصالبي الاقتراني.

3- لتكن M زمرة و $r_m: M \rightarrow M$ تشاكلا تقابليا ذاتيا داخليا حيث

$$r_m(t) = mtm^{-1} \quad \text{لكل} \quad m, t \in M$$

وليكن التشاكل $m: M \rightarrow \text{Aut}(M)$ معرفا بالقاعدة $m(m) = r_m$ لكل $m \in M$.

وليكن فعل الزمرة $\text{Aut}(M)$ على الزمرة M معرفا بالقاعدة:

$$m^r t = r_{t(m)} = t^{-1}mt \quad \text{لكل} \quad m, t \in M$$

$$M = (m: M \rightarrow \text{Aut}(M))$$

هو مقاس تصالبي يدعى بالمقاس التصالبي الداخلي.

قضية 3-3 :

لتكن $M = (\mu: M \rightarrow P)$ مقاسا تصالبيا وان μ تشاكل تقالبي فإن $M^{-1} = (m^{-1}: P \rightarrow M)$ هو مقاس تصالبي بالفعل المعروف بالقاعدة: $p^m = m(m^{-1})pm(m)$ لكل $m \in M, p \in P$.

البرهان:

بما ان m تشاكل تقالبي فإن m^{-1} هو أيضا تشاكل تقالبي. P هي زمرة M - بالفعل المعروف أعلاه لأنه:

$$(i) \quad p^e = m(e^{-1})p \quad m(e) = m(e)pm(e) = epe = p$$

$$(ii) \quad (p^{m_1})^{m_2} = (m(m_1^{-1})p \quad m(m_1))^{m_2} \\ = m(m_2^{-1})m(m_1^{-1})pm(m_1)m(m_2) \\ = m(m_2^{-1}m_1^{-1})Pm(m_1m_2) = m((m_1m_2)^{-1})pm(m_1m_2) = p^{(m_1m_2)}$$

$$(iii) \quad (p_1p_2)^m = m(m^{-1})p_1p_2m(m) \\ = (m(m^{-1})p_1m(m))(m(m^{-1})p_2m(m)) = p_1^m p_2^m$$

كذلك شرطا المقاس التصالبي

$$(CM1): m^{-1}((m(n))^m) = m^{-1}[m(m^{-1})m(n)m(m)] = m^{-1}[m(m^{-1}nm)] \\ = m^{-1}nm = m^{-1}m^{-1}(m(n))m$$

$$(CM2): p^{m^{-1}(p_1)} = m((m^{-1}(p_1))^{-1}) = pm(m^{-1}(p_1)) \\ = m(m^{-1}(p_1^{-1}))p \quad m(m^{-1}(p_1)) = p_1^{-1}pp_1$$

لكل $m \in M, p, p_1 \in P$

عندما يكون لدينا m تشاكل شامل من الزمرة M على الزمرة P بحيث ان نواة m محتواة في مركز M فأن بالإمكان جعل m مقاسا تصالبيا عند استخدام m لتعريف فعل للزمرة P على الزمرة M كما في القضية الآتية:-

قضية 3-4:-

ليكن $m: M \rightarrow P$ تشاكلا شاملا بحيث ان $\ker \mu \subseteq \text{cent } M$ فإن $\mu (= m: M \rightarrow P)$ هو تشاكل تصالبي.

البرهان:-

بما ان μ شامل فانه لكل $p \in P$ يوجد $m_p \in M$ بحيث $p = m(m_p)$.
يمكن ان نبرهن على ان m هي زمرة P -بالفعل المعرف بالقاعدة.

$$m^p = m^{m(m_p)} = (m^{-1}p)(m)(m_p) \quad \forall m \in M, p \in P$$

وذلك كما يأتي: من الضروري إثبات ان الفعل معرف تعريفا حسنا.

ليكن $r = m(m_1) = m(m_2)$ فإن

$$m(m_1) = m(m_2) \Rightarrow m(m_2)(m(m_1)^{-1}) = e \Rightarrow m(m_2)m(m_1^{-1}) = e \\ \Rightarrow m(m_2m_1^{-1}) = e \Rightarrow m_2m_1^{-1} \in \ker m$$

كذلك

$$(i) \quad m^r = m_1^{-1}mm_1 = m_2^{-1}mm_2$$

$$m = (m_2m_1^{-1})m(m_2m_1^{-1}) = m(m_2m_1^{-1})^{-1}(m_2m_1^{-1})m$$

لأن $m_2m_1^{-1} \in \ker m \subseteq \text{cent } (M)$

$$(ii) \quad m^e = m^{\mu(m_e)} = m_e^{-1}mm_e = m_e^{-1}m_em = m$$

$$\forall m \in M \quad m_e \in \ker m \subseteq \text{cent } (M)$$

لكل $m(m_1), m(m_2) \in P, m \in M$

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad (m^{\mu(m_1)})^{\mu(m_2)} &= (m_1^{-1} m m_1)^{\mu(m_2)} \\ &= m_2^{-1} (m_1^{-1} m m_1) m_2 = (m_2 m_1)^{-1} m (m_1 m_2) \\ &= m^{m(m_1 m_2)} = m^{m(m_1) m(m_2)} \end{aligned}$$

لكل $\mu(n) \in P, m_1, m_2 \in M$

$$\begin{aligned} \text{(iv)} \quad (m_1 m_2)^{m(m)} &= m^{-1} (m_1 m_2) = (m^{-1} m_1 m) (m^{-1} m_2 m) \\ &= m_1^{m(m)} m_2^{m(m)} \end{aligned}$$

لذا فإن M هي زمرة P .

لإثبات ان $M = (m : M \rightarrow P)$ موديول تصالبي

$$\begin{aligned} \text{(CM1):} \quad m(m^p) &= m(m_p^m) = m(m_p^{-1} m m_p) \\ &= (m(m_p))^{-1} m(m) M(m_p) \\ &= p^{-1} m(m) p \end{aligned}$$

$$\text{(CM2):} \quad m^{\mu(n)} = n^{-1} m n$$

لكل $p \in P, m, n \in M$

Crossed Homomorphisms

4- التشاكلات التصالبية

في هذا البند ربطنا بين أفعال الزمر على الزمر والمقاسات التصالبية مع مفهوم آخر وهو التشاكلات التصالبية.

تعريف 4-1: [5]

لتكن K زمرة H - فن التطبيق $f : H \rightarrow K$ يسمى تشاكلا تصالبيا إذا كان

$$f(x)^x (f(y)) = f(xy) \quad \text{لكل } x, y \in H$$

قضية 4-2:

لتكن K زمرة H - وان $f : H \rightarrow K$ تشاكل فإن:

(i) f تشاكل تصالبي إذا كان فعل الزمرة H على الزمرة K هو الفعل التافه.

(ii) إذا كان f تشاكلا تصالبيا شاملا فإن فعل الزمرة H على الزمرة K هو الفعل التافه.

البرهان:

(i) ليكن فعل الزمرة H على الزمرة K هو الفعل التافه، فانه

$$f(xy) = f(x) f(y) = f(x)^x (f(y)) \quad \text{لذا فان } f \text{ تشاكل تصالبي.}$$

(ii) ليكن f تشاكلا تصالبيا شاملا، فانه لكل عنصر $k \in K$ يوجد عنصر مثل $y \in H$

بحيث ان $f(y) = k$. لكون f تشاكلا فان $f(xy) = f(x) f(y)$ ولكون f تشاكلا تصالبيا

$$f(xy) = f(x)^x (f(y)) \quad \text{لذا فان } f(xy) = f(x)^x (f(y))$$

ومنها $f(y) = f^x(y)$ ، وهذا يؤدي إلى أنه $k = k^x$.
أي أن فعل H على K و الفعل التافه.

قضية 3-4 :-

ليكن $f: H \rightarrow K$ تشاكلا تصالبيا وليكن التطبيق $f_0: H \rightarrow K \times H$ معرفا بالقاعدة:
 $f_0(x) = (f(x), x)$ لكل $x \in H$. فان f_0 تشاكل متباين.

البرهان:

$$\begin{aligned} f_0(xy) &= (f(xy), xy) = (f(x) \cdot f(y), xy) \\ &= (f(x), x)(f(y), y) = f_0(x)f_0(y) \end{aligned} \quad (i)$$

لكل $x, y \in H$

لذا فان f_0 تشاكل.

(ii) ليكن $x, y \in H$ بحيث ان $f_0(x) = f_0(y)$ فإن $(f(x), x) = (f(y), y)$
لذا فإن $x = y$ ومنها f_0 متباين.

قضية 4-4 :-

إذا كان $f: H \rightarrow K$ تشاكلا فإنه شامل إذا كان f_0 شاملا.

البرهان:- بما ان f_0 شامل فانه لكل عنصر (k, h) من $K \times H$ يوجد على الأقل عنصر مثل
 $x \in H$ بحيث ان $f_0(x) = (k, h)$ ، ولكن $f_0(x) = (f(x), x)$ لذا فإن $f(x) = k$.
أي انه f شامل.

تعريف 4-5 :-

لنكن K زمرة H - تعرف التطبيق $\mu: K \times H \rightarrow H$ بالقاعدة $\mu(k, h) = h$
لكل $h \in H, k \in K$.

قضية 4-6 :-

(i) التطبيق m هو تشاكل شامل

(ii) m متباين إذا وفقط إذا $K = \{e_K\}$.

البرهان:-

$$\begin{aligned} (i) \quad \mu((k_1, h_1)(k_2, h_2)) &= \mu(k_1^{h_1} k_2, h_1 h_2) = h_1 h_2 \\ &= \mu(k_1, h_1) \mu(k_2, h_2) \end{aligned}$$

لكل $(k_1, h_1), (k_2, h_2) \in K \times H$

لذا فإن μ تشاكل.

ليكن $h \in H$ فإن $\mu(e, h) = h$ لذا فإن μ شامل

(ii) ليكن μ متبايناً. نفرض ان $k \in K$ فإن $\mu(k, e_H) = \mu(e_K, e_H)$

لذا فإن $(k, e_H) = (e_K, e_H)$. لأن μ متباين ومنها $k = e_K$ وهذا معناه $K = \{e_K\}$.

وبالعكس ليكن $K = \{e_K\}$. نفرض ان $\mu(e_K, h_1) = \mu(e_K, h_2)$ فإن $h_1 = h_2$.

لذا فإن $(e_K, h_1) = (e_K, h_2)$ ، فإن μ متباين.

مبرهنة 4-7 :

لتكن $f: H \rightarrow K$ تشاكلاً تصاليياً $\mu \circ f_0 = i_H$ حيث $i_H(h) = h$ لكل $h \in H$

البرهان:

لكل $h \in H$

$$(\mu \circ f_0)(h) = \mu(f_0(h)) = \mu(f(h), h) = h = i_H(h)$$

لذا فإن $\mu \circ f_0 = i_H$.

مبرهنة 4-8 :

لتكن A مجموعة التشاكلات المتصالية $f: H \rightarrow K$ و B مجموعة التشاكلات $\alpha: H \rightarrow K \times H$

بحيث ان $(\mu \circ \alpha)(h) = h$ لكل $h \in H$ فإن $|A| = |B|$.

البرهان:

نعرف التطبيق $F: A \rightarrow B$ بالقاعدة $F(f) = f_0$ لكل $f \in A$

(i) ليكن $F(f) = F(f')$ حيث ان f, f' فان

$$F(f) = F(f') \Rightarrow f_0 = f'_0 \Rightarrow f_0(h) = f'_0(h) = \forall h \in H$$

$$\Rightarrow (f(h), h) = (f'(h), h) \Rightarrow f(h) = f'(h) = f = f'$$

لذا فإن f متباين.

(ii) ليكن $\alpha \in B$ وليكن $\alpha(h) = (k_1, h_1)$ فإن $\mu(k_1, h_1) = h_1$ و $(\mu \circ \alpha)(h) = h$ ولكن

$(\mu \circ \alpha)(h) = h$ لذا فإن $h_1 = h$. أي انه $\alpha(h) = (k_1, h)$ لكل $h \in H$.

ليكن $f: H \rightarrow K$ تطبيقاً يحقق الشروط () $\alpha(h) = (f(h), h)$ لكل $h \in H$

فان $f \in A$ (أي ان f تشاكل تصالي)

$$\alpha(x, y) = (f(xy), xy) \in K \times H \quad (\text{تعريف } f)$$

(α تشاكل)

$$\alpha(x, y) = \alpha(x)\alpha(y)$$

$$= (f(x), x)(f(y), y) \in K \times H = (f(x))^x (f(y)), xy$$

لذا فان $(f(xy), xy) = (f(x))^x (f(y), xy)$ ومنها $f(xy) = (f(x))^x (f(y))$ لكل $x, y \in H$ كذلك
 $f_0(h) = (f(h), h) = \alpha(h) \quad \forall h \in H$ فان $\alpha = f_0$ ومنها $F(f) = f_0 = \alpha$ لذا فان F شامل. وهكذا
 فان F تقابل. أي انه $|A| = |B|$.
 مما سبق نلاحظ ان علاقة التقابل بين المجموعتين A, B حصلنا عليها في مقابلة كل تشاكل
 تصالبي. $f : H \rightarrow K$ مع تشاكل $f_0 : H \rightarrow K \times H$.

المصادر

- [1] Boorman, E.H.,(1975), "S-operations in Representation Theory", Trans. Amer. Math. Soc. 205, 127-149.
- [2] Brown, R. & Wensley C.D., (1995), "On Finite Induced Crossed Modules, and the Homotopy 2-Type of Mapping Cones". Theory and Application of Categories, Vol.1,No.3,54-71.
- [3] Brown, R.& Wensley C.D., "Computing Crossed Modules Induced by an Inclusion of a Normal Subgroup, with Applications to Homotopy 2-Types", Theory and Applications of Categories, vol.2,No.1,pp,3-16.
- [4] Ellis, G.J.,(1984) , "Crossed modules & their higher Dimensional Analogues", Ph.D. Thesis, University of Walse (Bangor) , U. K.
- [5] Hochschild, G.,(1977), "Basic Constructions in Group extension Theory". University by of California, Berkeley,In, Contributions to Algebra. H. Bass,ed.
- [6] Korkes, F.J. & Mahdi R.S., (1995), "The Universal Property to Continuous Morphisms of Pro-C Crossed Modules", Basrah J. Science, Vol.13, No.1, 71-82.
- [7] Mohammad, A.J. & Mohammad S.A., (1994), "On Finite Group-Sets of Finite Groups", J.Educ. & Sci., Vol-22,78-84.
- [8] Neumann, P.M., Stoy G.A.& Thompson E. C., April (1980), "Group and Geometry", Vol. I, The Mathematical Institute, Oxford, Re- issued (1982).
- [9] Norrie, K. J., (1990), "Action and Automorphisms of Crossed Modules", Bull. Soc. Math. France, 118,126-146.
- [10] Rose, J.S., (1978), "A Course on Group Theory", Cambridge University Press, Cambridge.