

تحليل استقرارية الجريان لنموذج معادلات المياه الضحلة

أشرف سمعان عبودي

كلية علوم الحاسبات والرياضيات

جامعة الموصل

تاريخ استلام البحث: ٢٠٠٨/١١/٣٠

تاريخ قبول البحث: ٢٠٠٩/٣/١٧

ABSTRACT

This paper is devoted to analyze the stability of shallow water of a system of equations that was exposed to disturbing. This analysis is done by finding the eigenvalues of the system which enables us to investigate the grow of disturbance after setting shallow water equations in linearization form. It is obtain from the results analysis that the equations are stable when the real part of wave velocity is negative ,and unstable when it is positive .

الملخص

هذا البحث مكرس لتحليل الاستقرارية لمنظومة من معادلات المياه الضحلة التي تعرضت لاضطراب، وهذا التحليل تم عن طريق إيجاد القيم الذاتية (Eigenvalues) للمنظومة التي تمكننا من إيجاد نمو الاضطراب من عدمه وذلك بعد جعل معادلات المياه الضحلة خطية (Linearization). وتبين من نتائج التحليل ان هذه المعادلات تكون في حالة استقرار عندما يكون الجزء الحقيقي لسرعة الموجة كمية سالبة ،ويكون في حالة عدم استقرار عندما تكون هذه الكمية موجبة.

1- المقدمة:

معادلات المياه الضحلة (Shallow water equations) إحدى أنظمة المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية، وهي أسهل أشكال معادلات الحركة للمائع (Motion equations)، مشتقة من قانون حفظ الكتلة وقانون حفظ الزخم (Navier – Stokes equations) تستخدم معادلات المياه الضحلة وبشكل واسع في العديد من مجالات العلوم منها: علم حركة الموائع (Hydrodynamics) ضمن علم السوائل المتحركة الهيدروليكية (Hydraulics)، وفي علم المياه (Hydrology)، وفي علم المحيطات (Oceanography)

وظواهرها، وفي الأرصاد الجوية (Meteorology)، وفي مجال الهندسة والعديد من مسائل العلوم التطبيقية الأخرى [6].

إن أي نظام، ومنه نظام معادلات المياه الضحلة (Shallow water equations) مهما كانت طبيعته إذا وجد في حالة ما S فيقال أن الحالة S مستقرة (stable) إذا كانت الإزعاجات أو التأثيرات الخارجية التي يتعرض لها النظام لا تؤثر في الحالة S . وكذلك النظام الشمسي على سبيل المثال موجود حالياً في حالة معتمدة على الزمن ذلك أن الكواكب تدور حول الشمس بصورة منتظمة وفي حالة دخول جسم سماوي إضافي صغير إلى النظام الشمسي فإن هذا النظام لا يتأثر بصورة مهمة إذ لا تتأثر الحالة الأصلية لهذا النظام بالإزعاجات الصغيرة، أي أن النظام الشمسي مستقر فيما له علاقة بهذه الإزعاجات. [2,7]

ومن الأمثلة المهمة الأخرى على مفهوم الاستقرار (Stability) حركة الأميبا تحت تأثير الانتشار Diffusion والانجذاب الكيميائي إذ أن هذا الأخير هو عبارة عن الحركة الناتجة عن التغيرات في تركيز المواد الكيميائية التي تفرزها الأميبا نفسها، أن هذا النموذج يكون غير مستقر إذ كانت قابلية الحركة (Motility) أو معدل التحلل (Decay Rate) للمادة الجاذبة صغيرين أو إذا كان معدل الإفراز (Secretion Rate) أو قوة الانجذاب الكيميائي كبيرين. ولهذه الظاهرة أهمية كبيرة في علم الأحياء التطويري، والمفهوم نفسه ينطبق على جميع الظواهر الطبيعية الأخرى. [8,9]

لقد كان أول من درس فكرة الاستقرار هو العالم الفرنسي الكبير بوانكاريه (poincare) (1854-1912) والذي يُعد من كبار العلماء في العالم. ويقترن موضوع الاستقرار كذلك بأسم العالم الروسي ليونوف (A.M. Laypunov) (1857-1918) إذ يُعد اسمه مرادفاً لنظرية الاستقرار في العالم الغربي منذ عام 1960 وإن أفكاره وجدت طريقها في الحقول المليئة بالأفكار الخصبة والمنثمة من التطبيقات في النظم الديناميكية غير الخطية خصوصاً بعد نشره واحداً من أكثر البحوث المهمة في عام 1892 وهذه هي المسألة العامة لاستقرارية الحركة (On the General Problem of the stability of Motion) [10].

2- نبذة تاريخية:

درس كل من العالمين William F. Spatz و Mark A. Taylor عام 1999 طرائق سريعة لحساب المشتقات الخاصة للدوال الكروية الشكل وذلك لاستخدامها في تقريبات Explicit time – stepping Approximation لمعادلات المياه الضحلة الكروية الشكل. لقد استخدم الترشيح (Filtering) لتحليل الاستقرار لهذه الطريقة والاهتمام قد انصب على

استخدام طرائق الفورير والترشيح التوافقي الكروي ، وتبين أن نتيجة الطيف تتحقق تقريبا في ثلث الزمن لطريقة التحويل الطيفي (Spectral transform) [12].
كذلك برهن العالم (Yong Zhou) عام 2000 ان سرعة انتشار معادلات المياه الضحلة هي سرعة غير محددة (infinite) وكذلك تم بيان ان الحل نفسه او المشتقة الاولى او حتى كليهما لا يمكن ان يتضاعل اسرع من $e^{-|x|}$ عند اللانهاية المنتظمة في أية فترة زمنية صغيرة $[0, \epsilon]$. [16]

كذلك ناقش كل من العالمين Antonio Dominguez و Tomas Chacon عام 2004 نوعاً من الاشكال العددية المتوازنة من الرتبة الثانية لحل انظمة القطع الزائدة غير المتجانسة لقوانين حفظ الكتلة، ولقد تم اعطاء تقنية عامة لبناء مثل هذه الاشكال العددية وقد تم تطبيق هذه الاشكال على معادلات المياه الضحلة واعطت نتائج جيدة. [3]

لقد وجد العالمان Fernandez – Feria و Bohorquez عام 2006 الفروقات النوعية بالنسبة الى الاستقرارية المتوازنة الخاصة لجريان المياه الضحلة عبر مستوي مائل بميل اختياري، نتائج هذه الاستقرارية تم استخدامها لمناقشة الحل العددي لمسألة معادلات المياه الضحلة غير الخطية عبر سطوح مائلة بميل اختياري. وقد توصل الى ان هنالك مطابقة بين نتائج الموجات الناتجة من المحاكاة العددية وبين التنبؤات لتحليل الاستقرارية للطريقة. [4].

كذلك درس كل من العالمين Carlos C.Pena و Luis P.Thomas عام 2006 الحلول البسيطة (smoth) لمعادلات المياه الضحلة، فقد وجد ان المجموعة الكاملة للحلول نستطيع تصنيفها بانها واقعة باربع مجاميع متناظرة تبين هذه المجاميع الخصائص الفيزيائية. [5]

3- النموذج:

ليكن لدينا مقطع للمياه الضحلة ببعدين ،نرمز لمركبة السرعة للمحورين السيني والصادي بالرمزين u و v على الترتيب كما نرمز لمعدل ارتفاع السطح الافقي له بالرمز H ، اذا كانت η تمثل انحراف السطح الافقي المنضغط عن معدله، واذا كانت $f = 2\Omega \sin(\varphi)$ ، حيث Ω ان تمثل الدوران الزاوي للارض، وان φ تمثل خط العرض، واذا رمزنا للزوج بالرمز b ، وان f معامل القوة، عندئذ يمكن تمثيل معادلات المياه الضحلة بالشكل التالي [15]:

$$\begin{aligned} \frac{Du}{\partial t} - fv &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - bu \\ \frac{Dv}{\partial t} + fu &= -g \frac{\partial \eta}{\partial y} - bv \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= \frac{\partial (u (H + \eta))}{\partial x} + \frac{\partial (v (H + \eta))}{\partial y} \end{aligned} \quad \dots(1)$$

وبفرض ان :

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$$

فان المعادلة (1) تصبح بالشكل :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - bu \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu &= -g \frac{\partial \eta}{\partial y} - bv \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \quad \dots(2)$$

حيث ان $u = u(H + \eta)$, $v = v(H + \eta)$

4- المعاملات والمعادلات اللابعدية: (Non Dimensional form)

لغرض ايجاد المعادلات اللابعدية، سوف نعرف بعض القيم اللابعدية وعلى افتراض ان

u_0 هي مصدر السرعة وكالاتي [16]:

$$x = Lx^* \quad y = Ly^* \quad t = \frac{L}{u_0} t^* \quad v = u_0 v^* \quad u = u_0 u^* \quad \eta = \eta_0 \eta^*$$

وبتعويض الكميات والقيم اللابعدية في (2) نحصل على المعادلات اللابعدية لمعادلات المياه الضحلة وكالاتي :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} - \frac{L}{u_0} fv^* &= -\frac{g\eta_0}{u_0^2} \frac{\partial \eta^*}{\partial x^*} - \frac{L}{u_0} bu^* \\ \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{L}{u_0} fu^* &= -\frac{g\eta_0}{u_0^2} \frac{\partial \eta^*}{\partial y^*} - \frac{L}{u_0} bv^* \\ \frac{\partial \eta^*}{\partial t^*} &= \frac{1}{\eta_0} \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) \end{aligned} \quad \dots(3)$$

5- تحليل الاستقرار: (Stability Analysis)

لغرض تحليل الاستقرار لنموذج معادلات المياه الضحلة المعرفة بـ (3) نجزأ كلا

من U^*, V^* باستخدام المعادلتين التاليتين

$$\begin{aligned} u^*(x, y, t) &= u_1^*(x, y) + u_2^*(x, y, t) \\ v^*(x, y, t) &= v_1^*(x, y) + v_2^*(x, y, t) \end{aligned} \quad \dots(4)$$

حيث ان $u_1^*(x,y), v_1^*(x,y)$ هما الجزآن المستقران و يكونان صغيرين جدا مقارنة بالجزء الآخر، وهو الجزء المهم في حساب الاستقرارية لـ $u_2^*(x,y,t), v_2^*(x,y,t)$ [1].
الآن وبتعويض المعادلة (3) في المعادلة (2) نحصل على :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(u_1^*+u_2^*)}{\partial t^*} + (u_1^*+u_2^*) \frac{\partial(u_1^*+u_2^*)}{\partial x^*} + (v_1^*+v_2^*) \frac{\partial(u_1^*+u_2^*)}{\partial y^*} - \frac{L}{u_0} f(v_1^*+v_2^*) \\ & = -(g_1+g_2) \frac{n_0}{u_0^2} \frac{\partial(\eta_1^*+\eta_2^*)}{\partial x^*} - b \frac{L}{u_0} (u_1^*+u_2^*) \end{aligned} \quad \dots(4)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(v_1^*+v_2^*)}{\partial t^*} + (u_1^*+u_2^*) \frac{\partial(v_1^*+v_2^*)}{\partial x^*} + (v_1^*+v_2^*) \frac{\partial(v_1^*+v_2^*)}{\partial y^*} - \frac{L}{u_0} f(u_1^*+u_2^*) \\ & = -(g_1+g_2) \frac{\partial(\eta_1^*+\eta_2^*)}{\partial y^*} - b((v_1^*+v_2^*)) \end{aligned} \quad \dots(5)$$

$$\frac{\partial(\eta_1^*+\eta_2^*)}{\partial t^*} = \frac{1}{\eta_0} \left(\frac{\partial(u_1^*+u_2^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial(v_1^*+v_2^*)}{\partial y^*} \right) \quad \dots(6)$$

وبتبسيط المعادلات (4)،(5)،(6) نحصل على :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_1^*}{\partial t^*} + \frac{\partial u_2^*}{\partial t^*} + u_1^* \frac{\partial u_1^*}{\partial x^*} + u_2^* \frac{\partial u_2^*}{\partial x^*} + v_1^* \frac{\partial u_1^*}{\partial y^*} + v_2^* \frac{\partial u_2^*}{\partial y^*} - f v_1^* - f v_2^* \\ & = -g_1 \frac{\partial \eta_1^*}{\partial x^*} - g_2 \frac{\partial \eta_2^*}{\partial x^*} - b u_1^* - b u_2^* \end{aligned} \quad \dots(7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_1^*}{\partial t^*} + \frac{\partial v_2^*}{\partial t^*} + u_1^* \frac{\partial v_1^*}{\partial x^*} + u_2^* \frac{\partial v_2^*}{\partial x^*} + v_1^* \frac{\partial v_1^*}{\partial y^*} + v_2^* \frac{\partial v_2^*}{\partial y^*} + f u_1^* + f u_2^* \\ & = -g_1 \frac{\partial \eta_1^*}{\partial y^*} - g_2 \frac{\partial \eta_2^*}{\partial y^*} - b v_1^* - b v_2^* \end{aligned} \quad \dots(8)$$

$$\frac{\partial \eta_1^*}{\partial t^*} + \frac{\partial \eta_2^*}{\partial t^*} = \frac{\partial u_1^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u_2^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v_1^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v_2^*}{\partial y^*} \quad \dots(9)$$

وبتجزئة المعادلات (7) ، (8) ، (9) الى حالتها المستقرة والاضطراب نحصل على :

$$\frac{\partial u_1^*}{\partial t^*} + u_1^* \frac{\partial u_1^*}{\partial x^*} + v_1^* \frac{\partial u_1^*}{\partial y^*} - f v_1^* = -g_1 \frac{\partial \eta_1^*}{\partial x^*} - b u_1^* \quad \dots(10)$$

$$\frac{\partial u_2^*}{\partial t^*} + u_2^* \frac{\partial u_2^*}{\partial x^*} + v_2^* \frac{\partial u_2^*}{\partial y^*} - f v_2^* = -g_2 \frac{\partial \eta_2^*}{\partial x^*} - b u_2^* \quad \dots(11)$$

$$\frac{\partial v_1^*}{\partial t^*} + u_1^* \frac{\partial v_1^*}{\partial x^*} + v_1^* \frac{\partial v_1^*}{\partial y^*} + f u_1^* = -g_1 \frac{\partial \eta_1^*}{\partial y^*} - b v_1^* \quad \dots(13)$$

$$\frac{\partial v_2^*}{\partial t^*} + u_2^* \frac{\partial v_2^*}{\partial x^*} + v_2^* \frac{\partial v_2^*}{\partial y^*} + f u_2^* = -g_2 \frac{\partial \eta_2^*}{\partial y^*} - b v_2^*$$

$$\frac{\partial \eta_1^*}{\partial t^*} = \frac{\partial u_1^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v_1^*}{\partial y^*} \quad \dots(14)$$

$$\frac{\partial \eta_2^*}{\partial t^*} = \frac{\partial u_2^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v_2^*}{\partial y^*} \quad \dots(15)$$

ويمكن فرز المعادلات (11),(13),(15) التي تمثل الحالة غير الثابتة (Unsteady

state) بكتابتها بالشكل:

$$\frac{\partial u_2^*}{\partial t^*} + u_2^* \frac{\partial u_2^*}{\partial x^*} + v_2^* \frac{\partial u_2^*}{\partial y^*} - f v_2^* = -g_2 \frac{\partial \eta_2^*}{\partial x^*} - b u_2^*$$

$$\frac{\partial v_2^*}{\partial t^*} + u_2^* \frac{\partial v_2^*}{\partial x^*} + v_2^* \frac{\partial v_2^*}{\partial y^*} - f u_2^* = -g_2 \frac{\partial \eta_2^*}{\partial y^*} - b v_2^*$$

$$\frac{\partial \eta_2^*}{\partial t^*} = \frac{\partial u_2^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v_2^*}{\partial y^*} \quad \dots(16)$$

6- الاضطراب الحادث بالاتجاهين X, Y :

لإيجاد الحل لهذه المنظومة من المعادلات ،نتصور ان الاضطراب حاصل باتجاهين Y, X وان السعة ثابتة ،يمكن كتابة المعادلات بالصورة الاتية [11]

$$\begin{aligned} u_2^* &= A_1 e^{\alpha t + i(k_1 x + k_2 y)} \\ v_2^* &= A_2 e^{\alpha t + i(k_1 x + k_2 y)} \\ \eta_2^* &= A_3 e^{\alpha t + i(k_1 x + k_2 y)} \end{aligned} \quad \dots(17)$$

حيث أن K_1, K_2 قيم حقيقية لابعدية لطول الموجة بالاتجاه X, Y على التوالي ، a هي سرعة الموجة ، وهي قيمة معقدة (Complex) ($\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$) وان القيمة الموجبة او السالبة لـ a_1 بهذه الحالة هي التي تؤدي الى نمو الاضطراب او تلاشيهِ على التوالي ، فعندما تكون $\alpha_1 > 0$ فالمنظومة تكون غير مستقرة (Unstable) وعندما تكون $a < 0$ فمنظومة المياه الضحلة (Shallow water equations) تكون مستقرة (stable) [1]، كما أن A_1, A_2, A_3 ، ثوابت وتمثل سعة الموجة (Amplitude).

بعد إهمال الحدود الصغيرة وغير الخطية بالنسبة الى الاضطراب، يمكن كتابة منظومة المعادلات (1) بالشكل الآتي

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2^*}{\partial t^*} - \frac{L}{u_0} f v_2^* &= -\frac{g_2 \eta_0}{u_0^2} \frac{\partial \eta_2^*}{\partial x^*} - \frac{L}{u_0} b u_2^* \\ \frac{\partial v_2^*}{\partial t^*} - \frac{L}{u_0} f u_2^* &= -\frac{g_2 \eta_0}{u_0^2} \frac{\partial \eta_2^*}{\partial y^*} - \frac{L}{u_0} b v_2^* \\ \frac{\partial \eta_2^*}{\partial t^*} &= \frac{1}{\eta_0} \left(\frac{\partial u_2^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v_2^*}{\partial y^*} \right) \end{aligned} \quad \dots(18)$$

وبتعويض (17) في (18) نحصل على ما يأتي :

$$\frac{\partial u_2^*}{\partial t} - \frac{L}{u_0} f v_2^* = -\frac{\eta_0}{u_0^2} g_2 \frac{\partial \eta_2^*}{\partial x} - \frac{L}{u_0} b u_2^*$$

$$\frac{\partial (A_1 e^{\alpha t + i(k_1 x + k_2 y)})}{\partial t} - \frac{L}{u_0} f (A_2 e^{\alpha t + i(k_1 x + k_2 y)}) = -g_2 \frac{\eta_0}{u_0^2} \frac{\partial (A_3 e^{\alpha t + i(k_1 x + k_2 y)})}{\partial x} - \frac{L}{u_0} b (A_1 e^{\alpha t + i(k_1 x + k_2 y)})$$

$$\alpha A_1 e^{\alpha t + i(k_1 x + k_2 y)} - \frac{A_2 L}{u_0} f e^{\alpha t + i(k_1 x + k_2 y)} = -\frac{g_2 A_3 \eta_0}{u_0^2} K_1 i e^{\alpha t + i(k_1 x + k_2 y)} - \frac{A_1 L}{u_0^2} b e^{\alpha t + i(k_1 x + k_2 y)}$$

$$(\alpha A_1 - \frac{A_2 L}{u_0} f + \frac{g_2 A_3 \eta_0}{u_0^2} K_1 i + \frac{A_1 L}{u_0^2} b) e^{\alpha t + i(k_1 x + k_2 y)} = 0$$

وبما أن:

$$e^{\alpha t + i(k_1 x + k_2 y)} \neq 0$$

فان:

$$(\alpha A_1 - \frac{A_2 L}{u_0} f + \frac{g_2 A_3 \eta_0}{u_0^2} K_1 i + \frac{A_1 L}{u_0^2} b) = 0 \quad \dots(19)$$

كذلك فان

$$\frac{\partial v_2^*}{\partial t} - \frac{L}{u_0} f u_2^* = -\frac{\eta_0 g_2}{u_0^2} \frac{\partial \eta_2^*}{\partial y} - \frac{L}{u_0} b v_2^*$$

فان :

$$(\alpha A_2 - \frac{A_1 L}{u_0} f + \frac{g_2 i k_2 A_3 \eta_0}{u_0^2} + \frac{A_2 L}{u_0} b) = 0 \quad \dots(20)$$

وكذلك

$$-\frac{A_1 K_1 i}{\eta_0} - \frac{A_2 K_2 i}{\eta_0} + \alpha A_3 = 0 \quad \dots(21)$$

وبجمع الحدود المتشابهة وترتيب المعادلات (19), (20), (21) نحصل على ما يأتي :

$$\begin{aligned}
 (\alpha u_0^2 + Lb)A_1 - Lu_0 f A_2 + g_2 \eta_0 i k_1 A_3 &= 0 \\
 -Lu_0 f A_1 + (\alpha u_0^2 + Lu_0 b)A_2 + g_2 k_2 \eta_0 i A_3 &= 0 \\
 -i k_1 A_1 - i k_2 A_2 + \alpha \eta_0 A_3 &= 0
 \end{aligned} \quad \dots(22)$$

ومن خلال هذه المعادلة نقوم بإيجاد القيم الذاتية (EigenValues) وذلك بكتابة نظام المعادلات (22) بالشكل الآتي [14]:

$$\begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ s_4 & s_5 & s_6 \\ s_7 & s_8 & s_9 \end{bmatrix} = 0$$

حيث أن:

$$\begin{aligned}
 s_1 &= \alpha u_0^2 + Lbu_2 & s_2 &= -Lu_0 fv_2 & s_3 &= g_2 \eta_0 i k_1 & s_4 &= Lu_0 fu_2 \\
 s_5 &= \alpha u_0^2 + Lu_0 bv_2 & s_6 &= g_2 \eta_0 i k_2 & s_7 &= -i k_1 & s_8 &= -i k_2 & s_9 &= \alpha \eta_0
 \end{aligned}$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} S_1 & S_2 & S_3 \\ S_4 & S_5 & S_6 \\ S_7 & S_8 & S_9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\begin{vmatrix} (\alpha u_0 + Lbu_2) - \lambda & -Lu_0 fv_2 & g_2 \eta_0 i k_1 \\ Lu_0 fu_2 & (\alpha u_0^2 + Lu_0 bv_2) - \lambda & g_2 \eta_0 i k_2 \\ -i k_1 & -i k_2 & \alpha \eta_0 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

و بإيجاد قيمة المحدد :

$$\begin{aligned}
 [(\alpha u_0 + Lbu_2) - \lambda] * \begin{vmatrix} (\alpha u_0^2 + Lu_0 bv_2) - \lambda & g_2 \eta_0 i k_2 \\ -i k_2 & \alpha \eta_0 - \lambda \end{vmatrix} + Lu_0 fv_2 * \begin{vmatrix} Lu_0 fu_2 & g_2 \eta_0 i k_2 \\ -i k_1 & \alpha \eta_0 - \lambda \end{vmatrix} \\
 + g_2 \eta_0 i k_1 * \begin{vmatrix} Lu_0 fu_2 & (\alpha u_0^2 + Lu_0 bv_2) - \lambda \\ -i k_1 & -i k_2 \end{vmatrix} &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [(\alpha u_0^2 + Lbu_2) - \lambda] * [(\alpha u_0^2 + Lu_0 bv_2) - \lambda](\alpha \eta_0 - \lambda) + (g_2 \eta_0 i * i k_2^2) + Lu_0 fv_2 \\
 * \{(\alpha \eta_0 - \lambda) * Lu_0 fu_2 + i^2 k_1 * g_2 \eta_0 k_2\} + g_2 \eta_0 i k_1 * \{Lu_0 fu_2 * (-i k_2) + i k_1 * (\alpha u_0^2 + Lu_0 bv_2) - \lambda\} &= 0
 \end{aligned}$$

وبالتبسيط :-

$$\begin{aligned} & [(\alpha u_0^2 + Lbu_2) - \lambda] * [\alpha^2 u_0^2 \eta_0 + \alpha \eta_0 L U_0 b v_2 - \alpha \eta_0 \lambda - \alpha \lambda u_0^2 - \lambda L u_0 b v_2 + \lambda^2 - g_2 \eta_0 k_2^2] + L u_0 f v_2 \\ & * [L u_0 f u_2 (\alpha \eta_0 - \lambda) + i^2 g_2 k_1 k_2 \eta_0] + g_2 \eta_0 i k_1 * [-i k_2 L u_0 f u_2 + i k_1 ((\alpha u_0^2 + L u_0 b v_2) - \lambda)] = 0 \\ & [(\alpha u_0^2 + Lbu_2) - \lambda] * [\alpha^2 u_0^2 \eta_0 + \alpha \eta_0 L u_0 b v_2 - \alpha \eta_0 \lambda - \alpha \lambda u_0^2 - \lambda L u_0 b v_2 + \lambda^2] + L u_0 f v_2 [L u_0 f u_2 \alpha \eta_0 \\ & - L u_0 f u_2 \lambda + i^2 k_1 k_2 g_2 \eta_0] + g_2 \eta_0 i k_1 [-L u_0 f u_2 i k_2 + \alpha u_0^2 i k_1 + L u_0 b v_2 i k_1 - i k_1 \lambda] = 0 \end{aligned}$$

وبفتح الأقواس وإعادة ترتيب الحدود نجد أن :

$$\begin{aligned} & \alpha^3 u_0^4 \eta_0 + Lbu_2 \alpha^2 u_0^2 \eta_0 - \alpha^2 u_0^2 \eta_0 \lambda + \alpha^2 u_0^3 \eta_0 Lbv_2 + L^2 bu_2 b v_2 \alpha \eta_0 u_0 - \lambda \alpha \eta_0 L u_0 b v_2 \\ & - \alpha^2 u_0^2 \eta_0 \lambda - Lbu_2 \alpha \eta_0 \lambda + \alpha \eta_0 \lambda^2 - \alpha^2 u_0^4 \lambda - Lbu_2 \alpha \lambda u_0^2 + \lambda^2 \alpha u_0^2 - \alpha u_0^3 Lbv_2 \lambda - L^2 bu_2 u_0 b v_2 \lambda \\ & + \lambda^2 L u_0 b v_2 + \alpha u_0^2 \lambda^2 + Lbu_2 \lambda^2 - \lambda^3 + L^2 u_0^2 f v_2 f u_2 \alpha \eta_0 - L^2 u_0^2 f v_2 f u_2 \lambda + L u_0 f v_2 i^2 k_1 k_2 g_2 \eta_0 \\ & - g_2 \eta_0 i^2 k_1 L u_0 f u_2 k_2 + \alpha u_0^2 i^2 k_1^2 g_2 \eta_0 + g_2 \eta_0 i^2 k_1^2 L U_0 b v_2 - i^2 k_1 \lambda g_2 \eta_0 k_1 = 0 \end{aligned}$$

وبتجميع الحدود المتشابهة والضرب $\times (1-)$ نحصل على ما يأتي :

$$\begin{aligned} & -\lambda^3 + (\alpha \eta_0 + \alpha u_0^2 + L u_0 b v_2 + \alpha u_0^2 + Lbu_2) * \lambda^2 + (-\alpha^2 u_0^2 \eta_0 - \alpha \eta_0 L u_0 b v_2 - \alpha^2 u_0^2 \eta_0 \\ & - Lbu_2 \alpha \eta_0 - \alpha^2 u_0^4 - Lbu_2 \alpha u_0 - \alpha u_0^3 Lbv_2 - L^2 bu_2 u_0 b v_2 - L^2 u_0^2 f v_2 f u_2 - i^2 k_1^2 g_2 \eta_0) * \lambda \\ & + (\alpha^3 u_0^4 \eta_0 + Lbu_2 \alpha^2 u_0^2 \eta_0 + \alpha^2 u_0^3 \eta_0 Lbv_2 + L^2 bu_2 b v_2 \alpha \eta_0 u_0 + L^2 u_0^2 f v_2 f u_2 \alpha \eta_0 \\ & + L u_0 f v_2 i^2 k_1 k_2 g_2 \eta_0 - g_2 \eta_0 i^2 k_1 L u_0 f u_2 k_2 + \alpha u_0^2 i^2 k_1^2 g_2 \eta_0 + g_2 \eta_0 i^2 k_1^2 L u_0 b v_2) = 0 \\ & \lambda^3 + (-\alpha \eta_0 - 2\alpha u_0^2 - L u_0 b v_2 - Lbu_2) * \lambda^2 + (\alpha^2 u_0^2 \eta_0 + \alpha \eta_0 L u_0 b v_2 + \alpha^2 u_0^2 \eta_0 + Lbu_2 \alpha \eta_0 \\ & + \alpha^2 u_0^4 + Lbu_2 \alpha u_0 + \alpha u_0^3 Lbv_2 + L^2 bu_2 u_0 b v_2 + L^2 u_0^2 f v_2 f u_2 + i^2 k_1^2 g_2 \eta_0) * \lambda \\ & - (\alpha^3 u_0^4 \eta_0 + Lbu_2 \alpha^2 u_0^2 \eta_0 + \alpha^2 u_0^3 \eta_0 Lbv_2 + L^2 bu_2 b v_2 \alpha \eta_0 u_0 + L^2 u_0^2 f v_2 f u_2 \alpha \eta_0 \\ & + L u_0 f v_2 i^2 k_1 k_2 g_2 \eta_0 - g_2 \eta_0 i^2 k_1 L u_0 f u_2 k_2 + \alpha u_0^2 i^2 k_1^2 g_2 \eta_0 + g_2 \eta_0 i^2 k_1^2 L u_0 b v_2) = 0 \end{aligned}$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$\lambda^3 + \xi_1 \lambda^2 + \xi_2 \lambda + \xi_3 = 0 \quad \dots (23)$$

حيث أن :

$$\xi_1 = -\alpha\eta_0 - 2\alpha u_0^2 - L u_0 b v_2 - L b u_2$$

$$\xi_2 = \alpha^2 u_0^2 \eta_0 + \alpha \eta_0 L u_0 b v_2 + \alpha^2 u_0^2 \eta_0 + L b u_2 \alpha \eta_0 + \alpha^2 u_0^4 + L b u_2 \alpha u_0 + \alpha u_0^3 L b v_2 \\ + L^2 b u_2 u_0 b v_2 + L^2 u_0^2 f v_2 f u_2 + i^2 k_1^2 g_2 \eta_0$$

$$\xi_3 = -(\alpha^3 u_0^4 \eta_0 + L b u_2 \alpha^2 u_0^2 \eta_0 + \alpha^2 u_0^3 \eta_0 L b v_2 + L^2 b u_2 b v_2 \alpha \eta_0 u_0 + L^2 u_0^2 f v_2 f u_2 \alpha \eta_0 \\ + L u_0 f v_2 i^2 k_1 k_2 g_2 \eta_0 - g_2 \eta_0 i^2 k_1 L u_0 f u_2 k_2 + \alpha u_0^2 i^2 k_1^2 g_2 \eta_0 + g_2 \eta_0 i^2 k_1^2 L u_0 b v_2)$$

وبعد حل متعددة الحدود (23) برمجيا باستخدام نظام (Maple 11) [13] تم ايجاد جذورا لمعادلة $P, \pm q$ كما يأتي:

$$P = \frac{1}{6} [36\xi_2\xi_1 - 108\xi_3 - 8\xi_1^3 + 12\sqrt{12\xi_2^3 - 3\xi_2^2\xi_1^2 - 54\xi_2\xi_1\xi_3 + 81\xi_3^2 + 12\xi_3\xi_1^3}]^{(1/3)} \\ - \frac{6(\frac{1}{3}\xi_2 - \frac{1}{9}\xi_1^2)}{[36\xi_2\xi_1 - 108\xi_3 - 8\xi_1^3 + 12\sqrt{12\xi_2^3 - 3\xi_2^2\xi_1^2 - 54\xi_2\xi_1\xi_3 + 81\xi_3^2 + 12\xi_3\xi_1^3}]^{(1/3)}} - \frac{1}{3}\xi_1$$

$$q_1 = -\frac{1}{12} [36\xi_2\xi_1 - 108\xi_3 - 8\xi_1^3 + 12\sqrt{12\xi_2^3 - 3\xi_2^2\xi_1^2 - 54\xi_2\xi_1\xi_3 + 81\xi_3^2 + 12\xi_3\xi_1^3}]^{(1/3)} \\ + \frac{3(\frac{1}{3}\xi_2 - \frac{1}{9}\xi_1^2)}{[36\xi_2\xi_1 - 108\xi_3 - 8\xi_1^3 + 12\sqrt{12\xi_2^3 - 3\xi_2^2\xi_1^2 - 54\xi_2\xi_1\xi_3 + 81\xi_3^2 + 12\xi_3\xi_1^3}]^{(1/3)}} - \frac{1}{3}\xi_1 \\ + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\{\frac{1}{6}[36\xi_2\xi_1 - 108\xi_3 - 8\xi_1^3 + 12\sqrt{12\xi_2^3 - 3\xi_2^2\xi_1^2 - 54\xi_2\xi_1\xi_3 + 81\xi_3^2 + 12\xi_3\xi_1^3}]^{(1/3)} \\ + \frac{6(\frac{1}{3}\xi_2 - \frac{1}{9}\xi_1^2)}{[36\xi_2\xi_1 - 108\xi_3 - 8\xi_1^3 + 12\sqrt{12\xi_2^3 - 3\xi_2^2\xi_1^2 - 54\xi_2\xi_1\xi_3 + 81\xi_3^2 + 12\xi_3\xi_1^3}]^{(1/3)}}\}$$

$$q_2 = -\frac{1}{12} [36\xi_2\xi_1 - 108\xi_3 - 8\xi_1^3 + 12\sqrt{12\xi_2^3 - 3\xi_2^2\xi_1^2 - 54\xi_2\xi_1\xi_3 + 81\xi_3^2 + 12\xi_3\xi_1^3}]^{(1/3)} \\ + \frac{3(\frac{1}{3}\xi_2 - \frac{1}{9}\xi_1^2)}{[36\xi_2\xi_1 - 108\xi_3 - 8\xi_1^3 + 12\sqrt{12\xi_2^3 - 3\xi_2^2\xi_1^2 - 54\xi_2\xi_1\xi_3 + 81\xi_3^2 + 12\xi_3\xi_1^3}]^{(1/3)}} - \frac{1}{3}\xi_1 \\ - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\{\frac{1}{6}[36\xi_2\xi_1 - 108\xi_3 - 8\xi_1^3 + 12\sqrt{12\xi_2^3 - 3\xi_2^2\xi_1^2 - 54\xi_2\xi_1\xi_3 + 81\xi_3^2 + 12\xi_3\xi_1^3}]^{(1/3)} \\ + \frac{6(\frac{1}{3}\xi_2 - \frac{1}{9}\xi_1^2)}{[36\xi_2\xi_1 - 108\xi_3 - 8\xi_1^3 + 12\sqrt{12\xi_2^3 - 3\xi_2^2\xi_1^2 - 54\xi_2\xi_1\xi_3 + 81\xi_3^2 + 12\xi_3\xi_1^3}]^{(1/3)}}\}$$

ان التوصل الى حالة الاستقرار في نظام معادلات المياه الضحلة يتأثر بدرجة كبيرة بالكميات b_u, b_v, L, a, U_0 ، وهذا متوقع لان هذه الكميات تحدد صفات نظام معادلات المياه الضحلة وهي السرعة، سعة الموجة، الطول والزوجة على التوالي، وعند القيم التالية للمعاملات [15]

$$g = 9.8 \quad bu_2 = 1 \quad bv_2 = 1 \quad \Omega = \frac{\pi}{12} \quad \psi = 0.5 \quad fu_2 = 0.131 \quad fv_2 = 0.131$$

$$fu = \Omega \sin(\Psi) = 0.131 \quad k_1 = 2 \quad k_2 = 2 \quad u_0 = 1.3 \quad L = -1 \quad \eta_0 = 0.5$$

وبتعويضها بالمعادلة (23) نحصل على :

$$\lambda^3 + (-3.88\alpha + 2.3)\lambda^2 + (4.5461\alpha^2 - 4.647\alpha - 18.27099791)\lambda + (-1.42805\alpha^3 + 1.9435\alpha^2 + 32.45949\alpha - 12.740) = 0$$

ومن النتائج العددية، تبرز الحالات الآتية التي تميز حالة (الاستقرار من عدم الاستقرار) لنظام معادلات المياه الضحلة وكالاتي :

أولاً:- الحالة الأولى: يكون نظام معادلات المياه الضحلة مستقراً في الحالات الآتية :

$$1- \text{ قيم } q \text{ إعداد مركبة} \quad -1 \quad bu_2 = bv_2 \quad \text{و} \quad bu_2 \geq 0, bv_2 \geq 0$$

$$-2 \quad a \leq -3.6 \quad \text{و} \quad 1.2 \leq a \leq 3$$

$$-3 \quad L < 0 \quad \text{و} \quad 0.1 \leq L \leq 1.9 \quad \text{و} \quad 9 \leq L \leq 10$$

$$-4 \quad 0.9 \leq u_0 \leq 1.8$$

$$2- \text{ قيم } p \text{ إعداد حقيقية سالبة} \quad -1 \quad bu_2 \neq bv_2, bu_2 > 0, bv_2 > 0$$

$$-2 \quad L = 0$$

$$-3 \quad u_0 < 0 \quad \text{و} \quad u_0 \geq 1.9$$

ثانياً :- الحالة الثانية: يكون نظام معادلات المياه الضحلة غير مستقر في الحالات الآتية :

$$1- \text{ قيم } q \text{ إعداد مركبة} \quad -1 \quad bu_2 = bv_2 \quad \text{و} \quad bu_2 \leq -2, bv_2 \leq -2$$

$$-2 \quad a \geq 3.1$$

$$-3 \quad L \geq 11$$

$$2- \text{ قيم } p \text{ أعداد حقيقية موجبة عند} \quad bu_2 \neq bv_2, bu_2 < 0, bv_2 < 0$$

الجدول (1)

قيم p, q المستقرة ($q < 0, p < 0$) بتغير بعض قيم سرعة الموجة

α	q_1, q_2	p
-3.6	$-1.669110413 \pm 380424589i$	-12.9297717
-3.7	$-1.77662643 \pm 3.382926108i$	-13.10265471
-3.8	$-1.884502042 \pm 3.383552027i$	-13.27499592
-3.9	$-1.992590380 \pm 3.382315973i$	-13.44681924
-4	$-2.100929873 \pm 3.379227782i$	-13.61814025
-4.1	$-2.209513149 \pm 3.374293605i$	-13.78897370
-4.2	$-2.318333222 \pm 3.36751595i$	-13.95933356
-4.3	$-2.427383465 \pm 3.358893739i$	-14.12923307
-4.4	$-2.536657593 \pm 3.348422248i$	-14.29868481
-4.5	$-2.646149632 \pm 3.336093115i$	-14.46770074
-4.6	$-2.755853905 \pm 3.321894245i$	-14.63629219
.	.	.
.	.	.
.	.	.
-100	$-171.2477660 \pm 14.45043007i$	-47.80446809

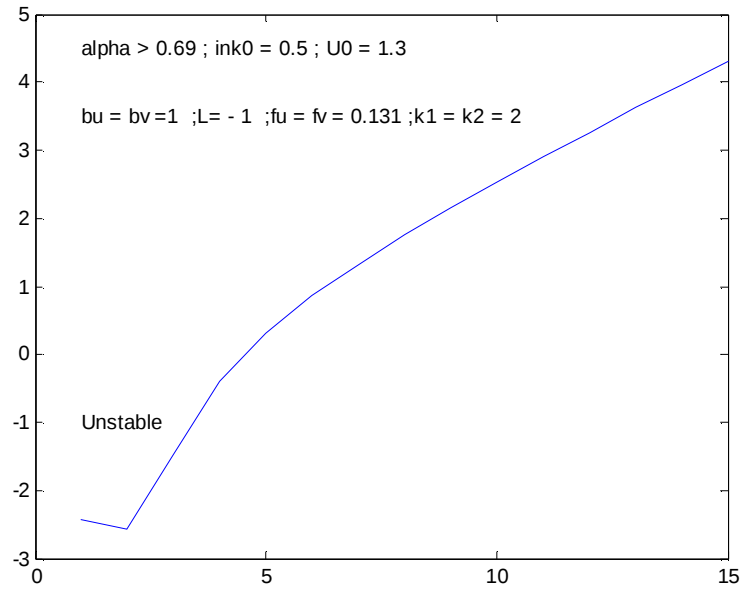
الجدول (2)

قيم p, q غير المستقرة ($q > 0, p > 0$) بتغير بعض قيم سرعة الموجة

a	q_1, q_2	p
10	$16.6087165 \pm 2.231835409i$	3.282566973
11	$18.23662331 \pm 2.371432634i$	3.906753387
12	$19.87287394 \pm 2.499991373i$	4.514252118
13	$21.51600871 \pm 2.619823613i$	5.107982590
14	$23.16486497 \pm 2.732573465i$	5.690270067
15	$24.81851161 \pm 2.839447050i$	6.262976789
16	$26.47619815 \pm 2.941352835i$	6.827603706
17	$28.13731558 \pm 3.03891033i$	7.385368840
18	$29.80136623 \pm 3.13292230i$	7.937267546
19	$31.46794055 \pm 3.223557253i$	8.484118893
20	$33.13669925 \pm 3.311284731i$	9.026601497
.	.	.
.	.	.
.	.	.
100	$168.0027048 \pm 7.447749846i$	49.69459040

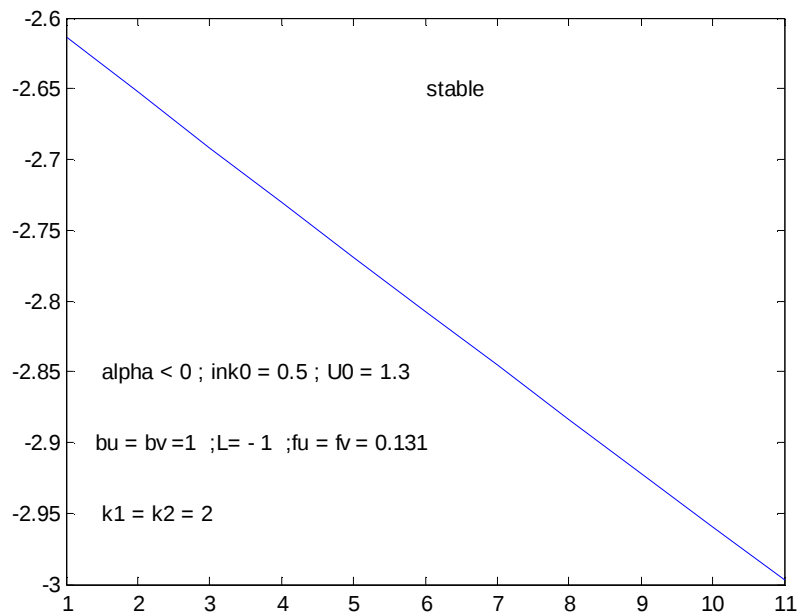
الشكل (1)

قيم p التي يكون عندها نظام معادلات المياه الضحلة غير مستقر



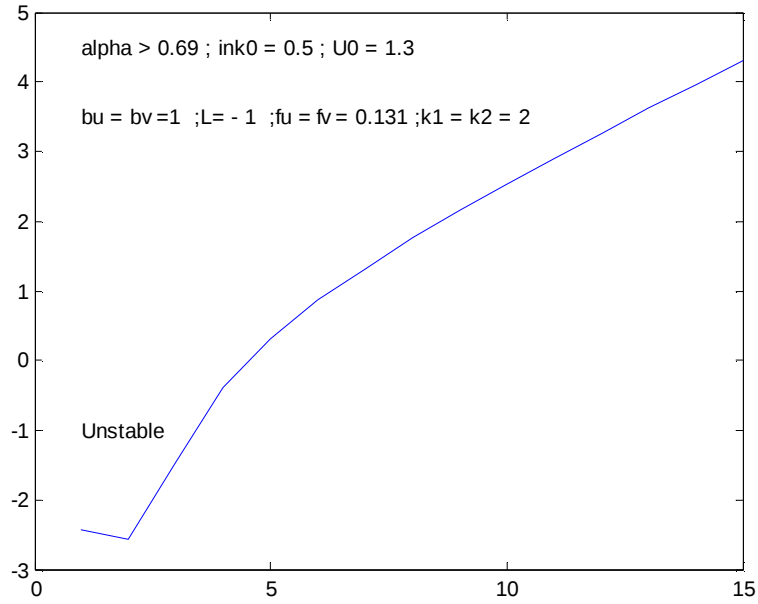
الشكل (2)

قيم p التي يكون عندها نظام معادلات المياه الضحلة مستقرًا



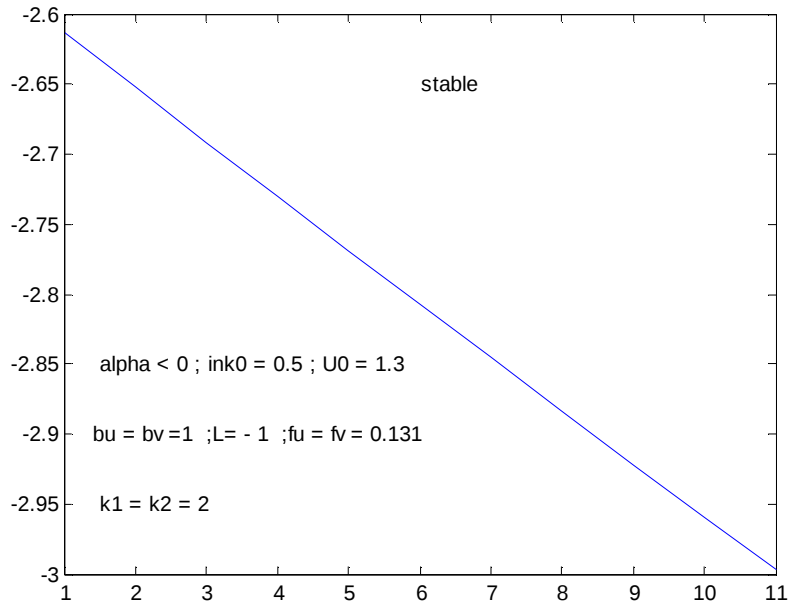
(3) الشكل

قيم q التي يكون عندها نظام معادلات المياه الضحلة غير مستقر



(4) الشكل

قيم q التي يكون عندها نظام معادلات المياه الضحلة مستقرًا



7- الاستنتاجات:

لقد قمنا بإيجاد قيم سرعة الموجة α اذ انها قيمة معقدة ($a = a_1 + a_2$) وان القيمة الموجبة او السالبة لـ a_1 تؤثر في حالة نمو الاضطراب او تلاشييه. لقد تمت تجزئة نظام المعادلات الى جزأين الجزء الأول (المستقر) يكون صغيرا جدا مقارنة بالجزء الثاني والمهم في تحليل الاستقرار، وتم إيجاد الحل، القيم الذاتية (EigenValues) والمعادلة المميزة (Characteristic polynomial) بالنسبة للجزء الثاني، ثم قمنا بحلها برمجيا باستخدام نظام (Maple 11) والحصول على قيم سرعة الموجة α ، وبإعطاء قيم المعلمات ($g, bu_2, bv, \Omega, \psi, fu_2, fv_2, k1, k2, u_0, L, \eta_0$) تبين ان هذه المنظومة تكون في حالة استقرار عند :

1 - قيم q إعداد مركبة

$$b_{u_2} = b_{v_2} \quad \text{و} \quad b_{u_2} \geq 0, b_{v_2} \geq 0 \quad -1$$

$$a \leq -3.6 \quad \text{و} \quad 1.2 \leq a \leq 3 \quad -2$$

$$L < 0 \quad \text{و} \quad 0.1 \leq L \leq 1.9 \quad \text{و} \quad 9 \leq L \leq 10 \quad -3$$

$$0.9 \leq u_0 \leq 1.8 \quad -4$$

$$b_{u_2} \neq b_{v_2}, b_{u_2} > 0, b_{v_2} > 0 \quad -1 \quad \text{2 - قيم } p \text{ إعداد حقيقية سالبة}$$

$$L = 0 \quad -2$$

$$u_0 < 0 \quad \text{و} \quad u_0 \geq 1.9 \quad -3$$

وبعكسه فان المنظومة تكون في حالة عدم استقرار.

المصادر

- [1] Ahmad, R. A. , 2003, “ A Mathematical Model for the Effect of Electrical Conductivities of the Wall on the stability of fluid flow and Transition to chaos”chapter(4), pp35-43.
- [2] AL-Obaidi, M.F. and Abraham , B.M., 2001“Stability Analysis and Chaos in a Bend Duct”, Raf. J. Sci., Vol. 12, No. 1, pp. 91-99.
- [3] Antonio, D.Delgado and Tomas C.Rebollo, 2004 “Asymptotically balanced schemes for non-homogeneous hyperbolic systems – application to the Shallow Water equations”journal of Comptes Rendus math., ISSN 1631- 073x, pp85-90 .
- [4] Bohorquez and Fernandez-Feria,2006 “ Non parallel spatial stability of shallow water flow down an inclined plane of arbitrary slop”.
- [5] Carlos, C.Pena and Luis P.Thomas,2006, “Solutions of shallow water equations In Non-rectangular Cross- Section channels”.
- [6] David, A.Randall, 2006 ,“The Shallow Water Equations”,pp1-3.
- [7] David, L. George , 2004 “ Numerical Approximation of the Nonlinear Shallow Water Equations with Topography and Dry Beds”,pp5-8.
- [8] Fortunato, M., Kurizki, G. and Schleich W.P., 1998 “ Stabilization of Deterministically Chaotic Systems by Interference and Quantum Measurements The Ikeda Map Case Physical Review Letters” , Vol. 80, No.26,PP 5730-5733.
- [9] Gilbert, S. , 1980, “ Linear Algebra and it's Applications”,second Edition , Academic Press, New York .
- [10] Henry, M. P. and Robert J.S., 1978 “Introduction to Dynamics and control” ,McGraw-Hill,London .
- [11] Logan, J. D., 1987 “ Applied Mathematics Wiley and Sony”.
- [12] Mark, A.Taylor and William F.Spotz,1999, “Fast and Hight – order solution to the Sperial shallow watr equation”
- [13] Monagan, M.B., 2003, “ Maple 11 Advanced Programming Guid ”.
- [14] Thomas, L.Harman, 2000,“Advanced Engineering Mathematics with Matlab”,second edition.

- [15] Shallow Water equations -Wikipedia,2007,
[http://en.wikipedia.org/wiki/Shallow water equations](http://en.wikipedia.org/wiki/Shallow_water_equations).
- [16] Yong, Zhou,2000, "Infinite propagation speed for a shallow water equation".
- [17] Zhaug, D. S ., Wei G. W. , Kouri D. J. & Hoffman Q.K., 1997, "Burger's Equation with High Reynolds Number", J. Phys. Fluid 9(6), pp. 1853 -1855.