دراسة استقرارية بعض نماذج السلاسل الزمنية غير الخطية مع تطبيق

عبد الغفور جاسم سالم
كلية علوم الحاسبات والرياضيات
جامعة الموصل

نهاد شريف خلف
كلية التربية للبنات
جامعة تكريت

تاريخ استلام البحث: ٢٠٠٨/١/٢ **تاريخ قبول البحث: ٢٠٠٨/٣/٤**

ABSTRACT

In this paper we study the stability of time series models in general, and for some non-linear time series models as a special case. Lagrange method to find the stability of non-linear models has been given.

The Leishmaniasis time series was studied and modeled by different non-linear models such as, seasonal ARIMA model by using the logarithmic transformation, exponential model of order two and the polynomial model. The stability of all such models by the above method has been obtained. From the comparison we find that the SARIMA is the best among all such models which we used for forecasting one year ago.

الملخص

تمت في هذا البحث دراسة الاستقرارية بشكل عام لنماذج السلاسل الزمنية واستقرارية بعض نماذج السلاسل الزمنية غير الخطية بشكل خاص، إذ تم عرض طريقة لاكرانج لإيجاد الاستقرارية للنماذج غير الخطية. وتمت دراسة السلسلة الزمنية لمرض حبة بغداد اللشمانيا (Leishmaniasis) وبنيت لهذه السلسلة عدة نماذج رياضية غير خطية منها النموذج الموسمي باستخدام التحويل (اللوغارتم الطبيعي) ونموذج أسي من الرتبة الثانية وكذلك نموذج متعدد الحدود وتم إيجاد الاستقرارية لجميع النماذج أعلاه باستخدام الطريقة المذكورة أنفا ومن خلال مقارنة النماذج أعلاه تبين أن النموذج الموسمي المندمج يكون أفضل النماذج المقترحة لتمثيل السلسلة وتم التنبؤ بالقيم المستقبلية للمرض ولفترة سنة واحدة باستخدام النموذج الموسمي.

1- المقدمة : Introduction

تبنى السلاسل الزمنية عادة على الافتراضات آلاتية: الاستقرارية ، الخطية ، الطبيعية علماً إن اغلب السلاسل الزمنية قد لا تتبع التوزيع الطبيعي ، وهذه الصفات الثلاثة مهمة جداً في التقدير وبناء نماذج السلاسل الزمنية، لذلك إن دراسة السلاسل الزمنية تشتمل على هذه الافتراضات ، وكيفية معالجة السلاسل الزمنية غير المستقرة والنماذج الرياضية الملائمة لتلك السلاسل هل هي خطية أم غير خطية وفيما إذا كانت تتبع التوزيع الطبيعي أم لا.

ستتركز دراستنا في هذا البحث على دراسة الاستقرارية stationarity لبعض نماذج السلاسل الزمنية غير الخطية .

تناول Priestley, M.B. في عام (1988) دراسة عدم استقرارية النماذج غير الخطية للسلاسل الزمنية [18] وفي عام (1990) قام Tong, H. بدراسة النظام الديناميكي مع الاستقرارية في السلاسل الزمنية غير الخطية [21] وفي عام (1992) تناول Bongeral, and Picard, N. دراسة استقرارية النموذج GARCH وبعض السلاسل الزمنية غير السالبة [7] . وفي العام نفسه بحث Brockwell, P.J. and Tweedie, R.L. وجود الاستقرارية في نماذج العتبة للنموذج ARMA[8] وفي العام نفسه قام Liu, J. and Susko E. بدراسة الاستقرارية والحولية لنماذج ARMA غير الخطية [12]وفي العام نفسه درس Manncar عدم الاستقرارية في نماذج السلاسل الزمنية [11] وفي 1993 درس Meyn, S.P. and Tweedie, R.L. سلاسل ماركوف والاستقرارية التصادفية [13] وفي عام (1996) درس Manuca, R. and Savit, R سلاسل ماركوف والاستقرارية التصادفية وفي عام (1997) قام كل من Husmeier . D and Taylor, j. بدراسة شروط الاحتمالية وعملية الاستقرارية في السلاسل الزمنية التصادفية المستقرة [10] . وفي العام نفسه قام Schreiber بتحليل عدم الاستقرارية في السلاسل الزمنية [18] وفي العام نفسه قام العالمان Pettersson, S. and Lerartgon, B. بدراسة الاستقرارية ونظام التقارب(stability and robustness of hybrid system) وكذلك قاما بدراسة تحليل واستقرارية الدالة الآسية في النماذج غير الخطية [17]. وفي عام (1998) درس Witt, A. , kurths J. and Pikosvky, A. حالات الاستقرارية في السلاسل الزمنية[23]

2- المرحلية و الاستقرارية Stationary and Stability [1]

تصادفنا في كثير من المسائل الفيزيائية والهندسية عمليات يمكن وصفها بأنها في حالة اتزان إحصائي Statistical Equilibrium ومعنى ذلك إننا لو حصلنا على مشاهدات لعملية من هذا النوع وتم تقسيمها إلى مجاميع من الفترات الزمنية فان المقاطع المختلفة لهذه المشاهدات

تبدو متشابهة . وبكلام أكثر دقة إن الصفات الإحصائية ثابتة لا تتغير مع الزمن . إن العمليات العشوائية التي تتصرف على هذا النحو تدعى عمليات مرحلية stationary [1] . وتعني عدم وجود نمو أو اضمحلال بيانات السلسلة الزمنية بمعنى أخر إن البيانات تكون منتشرة حول وسط ثابت ولها تباين ثابت .فان ذلك يعني $x_1,x_2,x_3,...,x_t$ يجب إن يكون لها دالة الكثافة الاحتمالية نفسها أي إن $f(x_1,x_2,x_3,...,x_t)=f(x_{1+k},x_{2+k},...,x_{t+k})$ حيث k عدد حقيقي . وان التوزيع الاحتمالي المشترك لا يتغير مع تغير الفترة الزمنية أو عند الإزاحة بأعداد ثابتة .

<u>نتيجة [1] :</u> إن العمليات المرحلية Stationary تنشأ عادة من خلال نظام مستقر stable يصل إلى حالة الثبات steady state بعد فترة زمنية مناسبة. وقد عرف Wei (1990) النظام المستقر (stable) بأنه ذلك النظام الذي ينتج الإدخال المحدود فيه دائما إخراجا محددا. وعليه يكون النظام مستقراً stability رياضياً إذا كانت جذور متعدد الحدود لمعادلة النظام في صيغة عامل التخلف (lag operator) تقع كلها خارج دائرة الوحدة (unit Circle) أو أن جذور المعادلة المميزة تقع كلها داخل دائرة الوحدة [1] .

2-1 استقرارية النماذج غير الخطية [6][15][21] Stationarity of non Linear Models

إن التقنيات المطورة لدراسة الاستقرارية وهي استقرارية نماذج السلاسل الزمنية الخطية، تعتمد اعتمادا كبيرا على الافتراضية الخطية ولذلك لا يمكن إن نتوسع بسهولة إلى الحالة غير الخطية ولذلك سوف ندرس حالات خاصة من النماذج غير الخطية المذكورة أنفا. هناك دراسات عديدة لإيجاد الاستقرارية للنماذج غير الخطية منها إيجاد الاستقرارية وحسب طريقة لبينوف المباشرة التي تعتمد على الاستمرارية مع الشرط الابتدائي وتعتمد على أكثر من متغير [14] واستقرارية بويسون (لاحظ المصدر نفسه). وكذلك استقرارية لاكرانج التي عادة تقتصر على السلسلة أو عدة سلاسل ، ويجب إن تكون السلسلة محددة أي $|X_i| \le M$ حيث M ثابت ، وتستخدم في إيجاد استقرارية السلاسل الزمنية مستمرة الزمن أو المتقطعة الزمن . وكذلك حسب طريقة اوزاكي . وهناك دراسات عديدة في هذا المجال (Tong 90) وسوف يتركز اهتمامنا على استقرارية لاكرانج استقرارية اوزاكي ولزيادة في التفاصيل لاحظ [2].

2-2 الاستقرارية حسب طريقة لاكرانج

هناك عدة دراسات لإيجاد استقرارية بعض النماذج غير الخطية منها النماذج الآسية (لاحظ [15]) الاستقرارية للنماذج الثنائية (Bilinear Model) (لاحظ [٢٢]) وإيجاد الاستقرارية لنماذج العتبة للانحدار الذاتي (لاحظ [21]) .

معظم هذه الدراسات تستخدم التقريب الخطي لهذه النماذج غير الخطية . أي انه يمكن تحويل النماذج غير الخطية إلى صيغة مشابهة لصيغة النماذج الخطية وبافتراضات معينة فعلى سبيل المثال نأخذ النموذج الأتي :

$$X_t = a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + p X_{t-1}^3 + Z_t \qquad \ldots(1\text{-}1)$$

هذا النموذج يمثل نموذج متعدد حدود وهو نموذج غير خطي يكتب هذا النموذج بالشكل الأتي :

$$X_t = (a_1 + p X_{t-1}^2) X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + Z_t \qquad \ldots(1\text{-}2)$$

وهو نموذج انحدار ذاتي من الرتبة الثانية وبوضع قيود معينة على معامل X_{t-1} يمكن إيجاد الاستقرارية بصورة مشابهة للنماذج الخطية .

سوف نذكر بعض التعارف والمبرهنات الأساسية التي تحتاج اليها في إيجاد الاستقرارية بطريقة لاكرانج .

مبرهنة (1-1) [21]

لتكن $\{x\}$ تمثل النظام الأتي:

$$x = \begin{cases} Ax_{t-1} & if \quad X_{t-2} > 0 \\ Bx_{t-1} & if \quad X_{t-2} \le 0 \end{cases} \qquad \ldots(1\text{-}3)$$

حيث

$$B=\begin{bmatrix} f' & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad A=\begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad x=\begin{bmatrix} X_t \\ X_{t-1} \end{bmatrix}$$

نفرض $f^2{}_1 + 4f_2 < 0$. يكون النظام مستقرا لاكرانجيا إذا تحقق احد الشروط الآتية : (لاحظ [21])

$$1- \quad f_1' < 0 \quad , f_1 \geq 0 \quad and \quad f_1'(f_1 f_1' + f_2) \leq 1$$

$$2- \quad f_1' < 0 \quad , f_1 < 0 \quad , f_1 f_1' + f_2 < 0 \quad and \quad f_1'(f_1 f_1' + f_2) \leq 1$$

$$3- \quad f_1' < 0 \quad , f_1 < 0 \quad , and \quad f_1 f_1' + f_2 = 0$$

$$4- \quad f_1' < 0 \quad , f_1 < 0 \quad f_1 f_1' + f_1 \quad , and \quad f_1 f_1' + f_2 \leq 1$$

$$5- \quad f_1' = 0$$

$$6- \quad 1 \geq f_1' > 0 \quad , f_1 \geq 0$$

$$7- \quad 1 \geq f_1' > 0 \quad , f_1 < 0 \quad , (f_1^2 + f_2) f_1' + f_1 f_2 \leq 0$$

$$8- \quad 1 \geq f_1' > 0 \quad , f_1 < 0 \quad , (f_1^2 + f_2) f_1' + f_1 f_2 > 0$$
$$and \quad (f_1^2 + f_2) f_1' + f_1 f_2 \leq 1$$

1-1 تعريف (النقطة المنفردة) (A singular point) [14][15]

لتكن

$$X_t = F(X_{t-1}, ..., X_{t-p}) \qquad ...(1\text{-}4)$$

تعرف النقطة المنفردة x للمعادلة (1-4) بأنها تلك النقطة التي يقترب منها مسار المعادلة عندما $t \to \infty$ وتسمى x نقطة انفرادية مستقرة . وإذا حصل الاقتراب من النقطة x عندما $t \to -\infty$ فان النقطة x تسمى نقطة انفرادية غير مستقرة .

1-2 تعريف (دورة النهاية) (limit cycle) [15]

لتكن

$$X_t = F(X_{t-1}, ..., X_{t-p})$$

الصيغة العامة للمعادلة الفرقية (معرفة في زمن متقطع)

تعرف دورة النهاية للمعادلة أعلاه على أنها المسار المعزول والمغلق

$$X_t, X_{t+1}, X_{t+2}, ..., X_{t+q} = X_t$$

حيث q عدد صحيح موجب يمثل الدورة .

والمسار المعزول هو المسار الذي يقترب جدا لدورة النهاية عندما $t \to \infty$ أو $t \to -\infty$ ، فعندما يكون الاقتراب لدورة النهاية عندما $t \to \infty$ تسمى دورة نهاية مستقرة (stable limit cycle) وإذا كان الاقتراب لدورة النهاية عندما $t \to -\infty$ فتسمى دورة نهاية غير مستقرة(unstable limit cycle) ، أما المسار المغلق فيعني إذا كانت القيمة الابتدائية $(X_1, .., X_p)$ تنتمي إلى دورة النهاية فان:

$$(X_{1+kq},...,X_{p+kq})=(X_1,..,X_p)$$

لكل عدد صحيح موجب k .

2-3 استقرارية دورة النهاية[15]

سوف نبدأ بتوضيح استقرارية دورة النهاية على نموذج غير خطي أسي من الرتبة الأولى ثم نعمم ألفكره .

ليكن لدينا النموذج الأتي:

$$X_t=(f_1+p_1e^{-X_{t-1}^2})X_{t-1}+e_t \qquad ...(1\text{-}5)$$

حيث $\{e_t\}$ إزعاجات بيضاء وان f_1 و p_1 ثوابت حقيقية.

تكون لها دورة نهاية معلومة y_t بالقرب من النقطة x_s الواقعة على المسار والقريبة من دورة النهاية حيث أن :

$$y_t, y_{t+1},....y_{t+q-1}, y_{t+q}=y_t$$

نعرف

$$X_s = y_s + x_s$$

حيث $|x|$ صغيرة ضمن الفترة $s=t,t-1$. والنقطتان X_{t-1}, X_t على المسار بالقرب من دورة النهاية يمكن إيجادها كما يأتي:

$$x_{t-1}=y_{t-1}+x_{t-1} \quad and \quad X_t=y_t+x_t$$

نعوض في المعادلة (1-5) وبإجراء بعض العمليات الجبرية البسيطة نحصل على ما ياتي:

$$x_t=\left\{f_1+p_1(1-2y_{t-1}^2)e^{-y_{t-1}^2}\right\}x_{t-1}+O(x_{t-1}) \qquad ...(1\text{-}6)$$

ومنها نستطيع ملاحظة انه إذا كان الحل للمعادلة الآتية:

$$x_t=\left\{f_1+p_1(1-2y_{t-1}^2)e^{-y_{t-1}^2}\right\}x_{t-1} \qquad ...(1\text{-}7)$$

يقترب من الصفر عندما $t\to\infty$ تكون دورة النهاية مستقرة.

وبما أن المعادلة (1-7) هي معادلة فرقية خطية وبمعاملات دورية يصعب حلها تحليليا لذا يمكن اختبار المعادلة (1-7) فيما إذا كانت تقترب من الصفر أم لا باستخدام العلاقة $|x_{t+q}/x_t|$ وتقترب x_t من الصفر إذا كانت هذه العلاقة اقل من الواحد.

من المعادلة (1-7) يمكن الحصول على x_{t+q} بالشكل الأتي:

$$x_{t+q}=\left\{f_1+p_1(1-2y_{t+q-1}^2)e^{-y_{t+q-1}^2}\right\}x_{t+q-1}$$

$$=\left\{f_1+p_1(1-2y_{t+q-1}^2)e^{-y_{t+q-1}^2}\right\}\left\{f_1+p_1(1-2y_{t+q-2}^2)e^{-y_{t+q-2}^2}\right\}x_{t+q-2}$$

نستمر بهذه الطريقة لنحصل على ما يأتي:

$$x_{t+q}=\prod_{i=1}^{q}\left\{f_1+p_1(1-2y_{t+i-1}^2)e^{-y_{t+i-1}^2}\right\}x_t$$

وعليه يكون $\left|x_{t+q}/x_t\right|$ معطى بالشكل الآتي:

$$\left|\frac{x_{t+q}}{x_t}\right|=\left|\prod_{i=1}^{q}\left\{f_1+p_1(1-2y_{t+i-1}^2)e^{-y_{t+i-1}^2}\right\}\right| \qquad \ldots(1\text{-}8)$$

ولاستخدام المعادلة (1-8) يمكن الاستفادة من مبرهنة الاستقرارية آلاتية.

مبرهنة (1-2) : [14] [15]

دورة النهاية بدورة q للنموذج (1-5) تكون مستقرة إذا كان:

$$\left|x_{t+q}/x_t\right|<1$$

البرهان: (لاحظ [14])

باستخدام الطريقة أعلاه والمبرهنة (1-3) الآتية يمكن أيجاد استقرارية دورة النهاية للنموذج الآسي من الرتبة p الأتي:

$$X_t=(f_1+p_1e^{-X_{t-1}^2})X_{t-1}+e_t \qquad \ldots(1\text{-}9)$$

مبرهنة (1-3) [14] [15] :

دورة النهاية بدورة q للنموذج الآسي (1-9) تكون مستقرة إذا كانت القيمة المطلقة للقيم الذاتية للمصفوفة اقل من الواحد بالقيمة المطلقة، بحيث:

$$A=A_q\cdot A_{q-1}\cdot\ldots\cdot A_1 \qquad \ldots(1\text{-}10)$$

$$A_i=\begin{bmatrix} a_{1.1}^{(i)} & a_{1.2}^{(i)} & \mathbf{L} & a_{1.p^{-1}}^{(i)} & a_{1.p}^{(i)} \\ 1 & 0 & \mathbf{L} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{L} & \mathrm{M} & \mathrm{M} \\ \mathrm{M} & \mathbf{O} & \mathbf{L} & & \\ 0 & \mathbf{L} & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{\ldots(1\text{-}11)}$$

وأن

$$a_{1.1}^{(i)} = f_1 + p_1 - 2\sum_{j=1}^{p}(p_j \bar{y}_{t+i-j})\bar{y}_{t+j-i}e^{-\bar{y}_{t+i-1}^2}$$

$$a_{i,k}^{(i)} = f_k + p_k e^{-\bar{y}_{t+i-1}^2}, \qquad k = 2,3,...p$$

ملاحظة [14] : إن استقرارية النقاط المنفردة غير الصفرية للنموذج (9-1) يمكن اختبارها بسهولة باستخدام طريقة التقريب الخطي المحلي بالقرب من النقطة الثابتة وكما يأتي:

لتكن X_t مغلقة للنقطة المنفردة غير الصفرية ξ والتي يمكن إيجادها من العلاقة

$$X_t = \xi + \xi_t$$

حيث ξ_t صغيرة جدا.

بالتعويض عن X_{t-i} بـــ $\xi_{t-i}+\xi$ في النموذج (9-1) نحصل على ما يأتي:

$$\xi_t = h_1 \xi_{t-1} + h_2 \xi_{t-2} + ... + h_p \xi_{t-p} \qquad ...(1\text{-}12)$$

حيث

$$h_1 = \frac{\Pi_1 + f_1\sum_{j=1}^{p}\Pi_j - \Pi_1\sum_{j=1}^{p}f_j}{\sum_{j=1}^{p}\Pi_j} + 2\left(1-\sum_{j=1}^{p}f_j\right)Ln\left(\frac{1-\sum_{j=1}^{p}f_j}{\sum_{j=1}^{p}\Pi_j}\right) \qquad ...(1\text{-}13)$$

$$h_i = \frac{\Pi_i + f_i\sum_{j=1}^{p}\Pi_j - \Pi_i\sum_{j=1}^{p}f_j}{\sum_{j=1}^{p}\Pi_j} \quad ; \quad i = 2,3....p \qquad ... (1\text{-}14)$$

إن الشرط الضروري والكافي لـــ ξ_t لتقترب من الصفر هو أن تكون جذور المعادلة المميزة للمعادلة (12-1) تقع داخل دائرة الوحدة.

الجانب التطبيقي PRACTICAL PART

تناولنا في هذا البحث بيانات احد الأمراض الشائعة في الشرق الأوسط عموما وفي العراق بصورة خاصة ، وان هذا المرض هو مرض حبة بغداد اللشمانيا (Leishmaniasis) الذي يكثر انتشاره في أيام الشتاء ويقل في أيام الصيف .

ولابد من الإشارة إلى إن التطور الحاصل في مجال الطب جعل بالإمكان الوقاية من الكثير من الإمراض ومكافحتها بل القضاء عليها من خلال تطبيق الوسائل العلمية الحديثة للبحوث التي تهدف إلى دراسات مفصلة لمختلف أنواع الأمراض المعدية وغير المعدية بالبحث

عن مسبباتها وطرائقها تكاثرها بين أفراد المجتمع لغرض التعرف على طرائق الوقاية منها والسيطرة عليها ومنع انتشارها [٩].

وتمت نمذجة السلسلة بنماذج خطية منها ARMA,AR,MA,SARIMA

وباستخدام البرنامج الجاهز وبالاعتماد على اقل مربع خطأ MSE حصلنا على النموذج الموسمي المندمج الأتي :

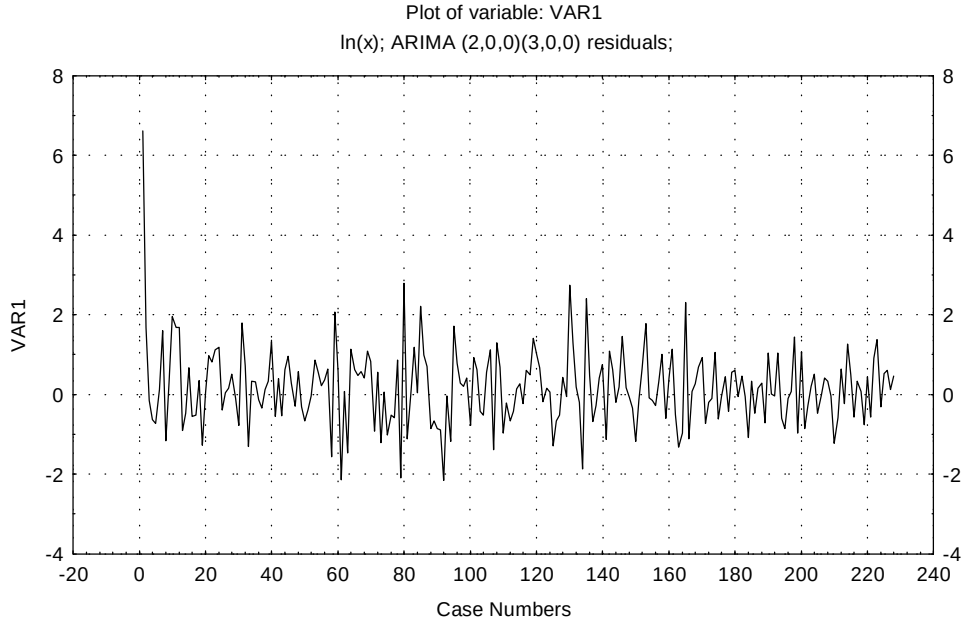
SARIMA $(2,0,0)\ (3,0,0)_{12}\ y_t$

حيث $y_t = \ln(x_t)$ وان $\{x_t\}$ هي السلسلة الأصلية وان معاملات الانحدار الذاتي للجزء غير الموسمي هي:

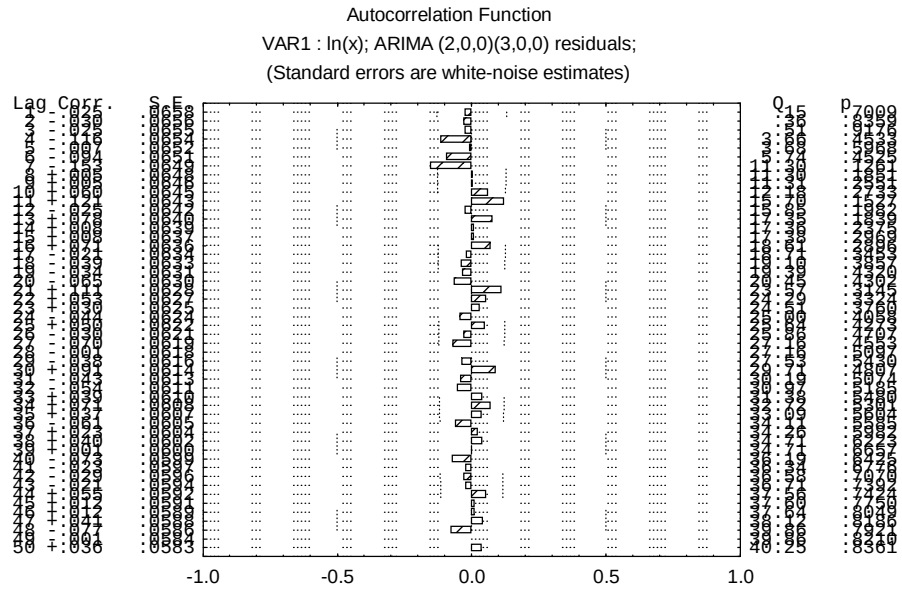
Φ_1 =0.73392	Φ_2 = 0.14482
std.Err 0.07257	0.06688

وان معاملات الانحدار الذاتي للجزء الموسمي هي:

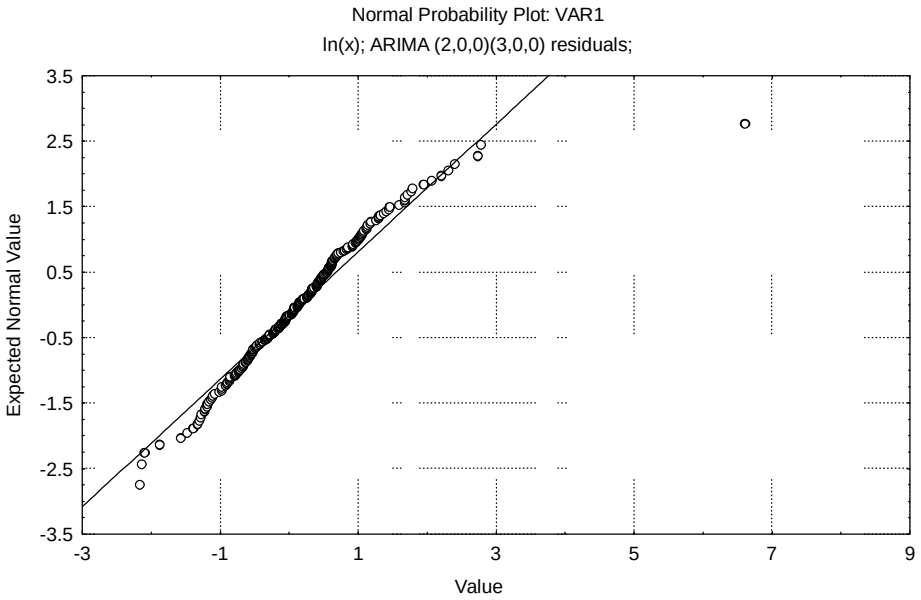
Φ_1 =0.31155	Φ_2 =0.18983	Φ_3 =0.22217
std.Err 0.7175	0.07087	0.06960



الشكل (1-1) يمثل رسم البواقي للنموذج الموسمي (3,0,0) (2,0,0) باستخدام اللوغاريتم



الشكل (2-1) يمثل رسم دالة الارتباط الذاتي للنموذج الموسمي (3,0,0) (2,0,0) باستخدام اللوغاريتم



الشكل (3-1) يمثل رسم الاحتمالية الطبيعية لنموذج الموسمي (3,0,0) (2,0,0) باستخدام اللوغاريتم

الشكل (1-1) يمثل رسم البواقي للنموذج الموسمي المضاعف باستخدام اللوغاريتم ، الشكل (1-2) يمثل رسم دالة الارتباط الذاتي لبواقي النموذج الموسمي المضاعف (3,0,0) (2,0,0) باستخدام اللوغاريتم ومن الشكل نلاحظ أن معاملات الارتباط الذاتي تقع ضمن المدى ($\hat{P}_k$ (Z)) ($\overline{+}$1.96 SE) وباحتمالية 95% وأنها غير مترابطة Uncorrelated. ومن الشكل (1-3) نلاحظ أن البواقي تتبع التوزيع الطبيعي مما يشير إلى ملائمة النموذج وهو النموذج الأفضل من بقية النماذج.

بالنظر إلى طبيعة السلسلة الزمنية غير الخطية لمعدل الإصابات الشهرية لمرض حبة بغداد .لابد من دراسة استقرارية بعض النماذج غير الخطية لهذه السلسلة وقد تم استخدام بعض النماذج منها نموذج الانحدار الذاتي الآسي ونموذج متعدد الحدود .

2-4 استقرارية نموذج الانحدار الذاتي الآسي من الرتبة الثانية[15]

والذي يعرف بالصيغة آلاتية :

$$X_t = (f_1 + p_1 e^{-gx^2_{t-1}})X_{t-1} + (f_2 + p_2 e^{-rx^2_{t-1}})X_{t-2} + Z_t$$

$$X_t = (f_1 + 0.01 e^{-10 x^2_{t-1}})X_{t-1} + (f_2 + 0.02 e^{-20 x^2_{t-1}})X_{t-2} + Z_t$$

وباستخدام البرنامج الجاهز statistica تم الحصول على قيم ϕ_1 و ϕ_2 وأصبح النموذج كالأتي:

$$X_t = (0.789 + 0.01 e^{-10 x^2_{t-1}})X_{t-1} + (0.0218 + 0.02 e^{-20 x^2_{t-1}})X_{t-2} + Z_t$$

ولدراسة استقرارية النموذج لابد من إيجاد قيم l_1 ، l_2

أولا: عندما $x^2_{t-1} \longrightarrow 1$ فأن $e^{x^2_{t-1}} \longrightarrow 0$

فتصبح المعادلة كالآتي:

$$l^2 - 0.729\, l - 0.04 = 0$$

$l_1 = -0.0513$ $\qquad$ $l_2 = 0.7803$

ثانياً:

عندما $x^2_{t-1} \longrightarrow \infty$ فأن $e^{x^2_{t-1}} \longrightarrow 0$

$$X_t = (0.789 + 0.01 e^{-10 x^2_{t-1}})X_{t-1} + (0.0218 + 0.02 e^{-20 x^2_{t-1}})X_{t-2} + Z_t$$

باستخدام المعادلة المميزة تصبح المعادلة كما يأتي:

$$l^2 - 0.789\, l - 0.0218 = 0$$

$l_1 = -0.0267$

$l_2 = 0.8157$

لتوضيح فيما إذا كانت النقطة المنفردة تحقق شرط الاستقرارية نستخدم الملاحظة المذكورة أنفا إذ يجب أن تتحقق العلاقة الآتية:

$$x_t = h_1 x_{t-1} + h_2 x_{t-2}$$

والتي معادلتها المميزة هي:

$$l^2 - h_1 l - h_2 = 0$$

لتوضيح فيما إذا كانت النقطة المنفردة تحقق شرط الاستقرارية نستخدم الملاحظة المذكورة أنفا إذ يجب أن تتحقق العلاقة الآتية:

$$\xi_t = h_1 \xi_{t-1} + h_2 \xi_{t-2}$$

والتي معادلتها المميزة هي:

$$\lambda^2 - h_1 \lambda - h_2 = 0$$

وبالتعويض عن قيم المعاملات π_i, ϕ_i وبما يساويها في المعادلات (13-1) و (14-1) نحصل على ما يأتي:

h_1=0.3611
h_2=0.019

نجد جذور المعادلة الآتية:

$$l^2 - h_1 l - h_2 = 0$$

l_1 = -0.0466

l_2 =0.4077

ومن هذا نستنتج أن الجذور اقل من واحد

أذن يكون النموذج الآسي من المرتبة الثانية مستقراً.

2-5 استقرارية النموذج متعدد الحدود:

POLYNOMIAL MODEL STATIONARTY

يعرف نموذج الانحدار الذاتي المتعدد الحدود بالصيغة آلاتية :

$$x_t = f_1 x_{t-1} + ... + f_p x_{t-p} + Q(x_{t-1},...., x_{t-p}) + z_t$$

حيث أن $Q(x_{t-1},...., x_{t-p})$ متعدد حدود

$x_{t-1}.....x_{t-p}$ تمثل المتغيرات .

باستخدام البرنامج الجاهز statistica حصلنا على النموذج الأتي:

$$X_t = 0.879 X_{t-1} - 0.000001 X_{t-1}^3 + 0.009588 X_{t-2} + Z_t$$

أو

$$X_t = (0.879 - 0.000001 X_{t-1}^2) X_{t-1} + 0.009588 X_{t-2} + Z_t$$

نفرض أن

$$(0.879-0.000001X_{t-1}^{2})=(0.879-0.000001-0.000001e^{-x_{t-1}^{2}})$$

فيصبح النموذج

$$X_t=(0.879-0.000001-0.000001e^{-x_{t-1}^{2}})X_{t-1}+0.009588X_{t-2}+Z_t$$

وهو نموذج آسي

الحالة الأولى

عندما

$$e^{-x_{t-1}^{2}}\longrightarrow 1 \qquad \text{فأن} \qquad x_{t-1}^{2}\longrightarrow 0$$

$$X_t=(0.8789)X_{t-1}+0.009588X_{t-2}+Z_t$$

$$\lambda^2-0.87899\lambda-0.09588=0$$

$$\lambda_1=-0.0981$$

$$\lambda_2=0.9771$$

الحالة الثانية

$$\text{عندما } x_{t-1}^{2}\to\infty \quad \text{فأن} \quad e^{-x_{t-1}^{2}}\to 0$$

$$X_t=(0.87899)X_{t-1}-0.000001X_{t-2}+Z_t$$

وتكون قيم l_1 ، l_2 مشابهة للحالة الأولى.

عندما $x_{t-1}^{2}\to 0$ لان قيمة $p_1=0.000001$ صغيرة جداً، وهي

$$l_1=0.878990$$

$$l_2=0.87899$$

ومن الحالة الأولى والحالة الثانية نستنتج أن قيم l_1 ، l_2 هي اقل من الواحد وبذلك يكون النموذج متعدد الحدود مستقراً.

والجدول آلاتي يمثل النماذج التي حصلنا عليها وصفاتها الإحصائية (معدل مربع الخطأ والانحراف القياسي و NBIC) لكل منها.

الجدول (1-1)

جدول مقارنة بين النماذج المقترحة

MODEL / STAT	AR(6)	MA (7)	ARMA(7,7)	SARIMA	EXP(AR(P))	POLEN-OMIAL MODEL
M.S.E	14019	14469	11732	1.0124	28261	28383
NBIC	4.9272	4.9645	4.9815	0.1400	1.3540	3.8600
S.D	116.817	118.395	104.673	0.97923	6.4000	6.7010

ومن الجدول ومن ملاحظة دالة الارتباط الذاتي ورسم الاحتمالية الطبيعية لبواقي النماذج أعلاه (ولزيادة في التفاصيل لاحظ [2]) نلاحظ تفوق النموذج الموسمي المضاعف على بقية النماذج ، وبأقل معدل مربع خطأ وبأقل NBIC لذلك يكون هو النموذج الأفضل الذي يمثل السلسلة

2-6 استقرارية النموذج المقترح :

النموذج المقترح معادلته هو:

SARIMA $(2,0,0)\ (3,0,0)_{12}\ y_t$

حيث أن:

	Φ_1	Φ_2	Φ_{s1}	Φ_{s2}	Φ_{s3}
	0.73392 +	0.14482 +	0.31155 +	0.18983 +	0.22217
StaErr	0.07257	0.06688	0.7175	0.07087	0.06960

يكون النموذج مستقرا إذا كانت جذور المعادلة المميزة للجزء غير الموسمي والجزء الموسمي تقع داخل دائرة الوحدة

المعادلة المميزة للجزء غير الموسمي هي:

$l^2 - 0.7337\ l - 0.144 = 0$

$l_1 = -0.1610$

$l_2 = 0.8947$

والمعادلة المميزة للجزء الموسمي هي

$l^3 - 0.3\ l^2 - 0.19\ l - 0.2 = 0$

$l_1 = 0.846$

$l_2 = -0.267 + i0.4399$

$l_3 = -0.267 - i0.4399$

$$q_2 = \tan^{-1}\frac{y}{x} = -58.692$$
$$r_2 = 0.513$$
$$q_3 = \tan^{-1}\frac{y}{x} = 58.692$$
$$r_3 = 0.5137$$

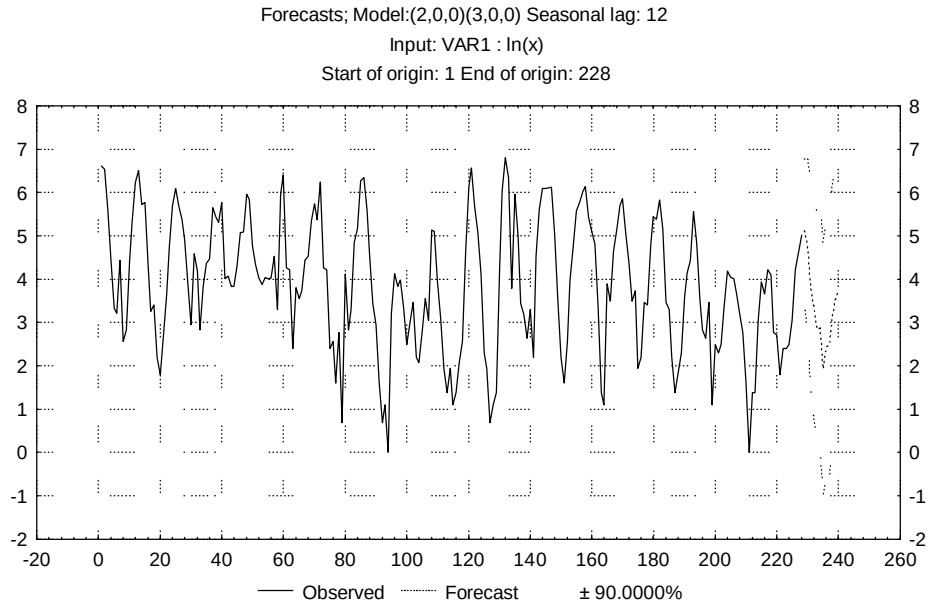
حيث نلاحظ أن $r_3 = 0.5137, r_2 = 0.513, r_1 = 0.846$ وهي جميعها اقل من الواحد بالقيمة المطلقة وكذلك الحال بالنسبة إلى جذور المعادلة المميزة للجزء غير الموسمي مما يشير إلى أن النموذج المقترح مستقر.

والجدول الأتي يمثل القيم المتنبأ بها من النماذج المذكورة آنفا:

النموذج الموسمي المضاعف	النموذج الآسي	نموذج متعدد الحدود	القيم الحقيقية
90	492	519	75
86	124	214	80
109	28	67	93
75	10	22	80
30	18	19	21
21	73	63	10
13	0	11	14
14	13	13	15
6	71	60	10
9	172	152	33
10	425	376	98
19	516	499	64

الجدول (2-1)

من الجدول أعلاه نلاحظ إن القيم المتنبأ بها لفترة 12 شهرا من النموذج الموسمي المضاعف هي الأقرب إلى القيم الحقيقية مما يشير إلى كفاءة النموذج المقترح الذي يمثل النموذج الملائم لبيانات مرض حبة بغداد والشكل (4-1) يمثل السلسلة الأصلية والقيم المتنبأ بها من النموذج المقترح (الموسمي المضاعف).



الشكل (4-1) يمثل رسم التكهن للسلسلة للنموذج (3,0,0) (2,0,0) باستخدام اللوغاريتم

الاستنتاجات

1- إن السلسلة الزمنية للإصابة بمرض حبة بغداد في العراق تبين أنها سلسلة غير مستقرة ولا يوجد اتجاه واضح للسلسلة .

2- إن النموذج الموسمي المضاعف من الرتبة (3,0,0) (2,0,0) هو النموذج الملائم للسلسلة الزمنية للإصابة بمرض حبة بغداد وقد أعطى تقديرات جيدة (للتبوء بالقيم المستقبلية) وقريبة من قيم الواقع الفعلي من خلال مقارنته من حيث قابليته على التنبؤ واختيار البواقي مع بقية النماذج المقترحة.

3- تكون النماذج الخطية مستقره إذا كان كل من l_1 ، l_2 اقل من واحد وفي حالة النماذج غير الخطية تكون الاستقرارية صعبة الحصول .

المصادر

[1] البد راني ،ظافر رمضان مطر (2002) "**دراسة في تشخيص نظم السيطرة التصادفية مع إشارة خاصة إلى أسلوب فضاء ألحاله و الاستقرارية**"،أطروحة دكتوراه غير منشورة ،كلية علوم الحاسبات والرياضيات،جامعة الموصل.

[2] الجبوري ،نهاد شريف خلف (2005)"**دراسة الاستقرارية في بعض النماذج غير الخطية مع تطبيق**" رسالة ماجستير غير منشورة ،كلية التربية،جامعة تكريت.

[3] الجواد ،لميعه باقر جواد (2003)"**الدمج بين الطرائق الاعتيادية والغلاف الطبيعي بالتحويلات الاستقرارية باعتماد القطع والنافذة المثلى**" ، اطروحه دكتواره غير منشورة،كلية الاداره والاقتصاد ، جامعة بغداد.

[4] الشر جبي ، قاسم عبده علي (2003) "المقدرات الحصينة لنماذج المختلطة(1,1) ARMA دراسة تجريبية تطبيقية "،أطروحة ، دكتوراه غير منشورة ، كلية الادارة والاقتصاد الجامعة المستنصرية .

[5] العجيلي ،سندس نوري شكر (2002) "بناء نموذج تصادفي لعدد الإصابات بمرض التدرن الرئوي في محافظة صلاح الدين للفترة (1989-2000) "،رسالة ماجستير غير منشورة ،كلية التربية بنات ،جامعة تكريت .

[6] المهداوي ،هيفاء جعفر (1991) "الانحدار الذاتي غير المستقر ذو الدرجات الدنيا " ،أطروحة دكتوراه غير منشورة ،كلية الاداره والاقتصاد ،الجامعة المستنصرية.

[7] Bongeral, P. and Picard, N. (1992) "Stationaity of GARCH processes and some non negative time series " J. Econometrics 52,115-127.

[8] Brockwell, P.J. & Stramer, O. and Tweedie, R.L. (1996) " Existences of stability of continuous time threshold ARMA processes " J. statistical since, Taipei, Vol. 6, pp. 715.

[9] Homiltion, James D.,(1994) "Time Series Analysis " , Published by princetion University Press, U.S.A.

[10] Husmeier, D. & Taylor, J. G. (1997) " predicting Conditional Probability densities of stationary stochastic time series " Neural Networks, 10(3) , pp.479-497.

[11] Liu, J. & susko, E. (1992) "On strict stationarity and ergodicity non linear ARMA Model" J.Appl. probab.29: pp.363-373.

[12] Manuca, R. & Savit, R. (1996)"Stationarity and non statioarity

[13] Meyn, S. P. & Tweedie, R.L. (1993) " Markov chains and stochastic stability " springer –varlag , London.

[14] Ozaki,T.(1982) "Non linear time series stochastic processes and Dynamical system" Handbook of statistics,Vol.5,Itd.

[15] Ozaki,T.(1985) "Non linear time series models and Dynamical system" E.J. Hannan, P.R. Krishnaiah, M,M.Rao, eds., Handbook of statistics,Vol.5,pp.25-83.

[16] Ozaki, T. and Oda, H.(1987)"Non-linear time series model identification by Akaikes information criterion ".proc. IFAC workshop on Information and systems, compiegn, France, October 1997.

[17] Pettersson, S. & Lennartson, B. (1996) " LMI approach for stability and robusness of hybrid systems" , in proc. Amer. Control conf., Albuquerque NM, pp. 1714-1718.

[18] Priestly , M.B.(1988) " Non linear and stationary time series analysis " London: ACADEMIC. Press.

[19] Schreiber. T. (1997) " Detecting and analysis non stationirty in a time series using non linear cross predictions " physical Review Letters 78.

[20] Tong . H. (1983) " Threshol Models in Non linear time series Analysis " Lecture notes in statistic No. 21, Now York.

[21] Tong, H. (1990) " Non linear Time series; A Dynamical system Approach ".Oxford University Press ,London.

[22] Tsay ,RS(1986)."Non linearity Tests for Time series "Biometrika,73,461-466.

[23] Witt, A. & Kurths, J. & Pikosvky, A. (1998), " Testing statinoarity in time series", physical Review E 58:1800-1810.