متعددات حدود وينر لتعميم المسافة لبعض البيانات المركبة من بيانات خاصة

علي عزيز علي **احمد محمد علي**

كلية علوم الحاسبات والرياضيات

جامعة الموصل

تاريخ استلام البحث:٢٠٠٦/١١/١٢ **تاريخ قبول البحث:٢٠٠٦/١٢/٢٤**

ABSTRACT

It is not easy to find the Wiener polynomials for generalized distance of compound graphs constructed in the form $G_1 \bullet G_2$ and $G_1 : G_2$ for any two disjoint connected graphs G_1 and G_2. Therefore, in this paper, we obtain Wiener polynomials for generalized distance of $G_1 \bullet G_2$ and $G_1 : G_2$ when G_1 and G_2 are special graphs such as complete graphs, and stars. The Wiener index of each such graph with respect to the generalized distance is also obtained in this paper.

The Wiener polynomial for the generalized distance of the join of any two disjoint connected graphs is also obtained in this paper.

الملخص

إن إيجاد صيغة بسيطة لمتعددة حدود وينر لتعميم المسافة لبيان مركب من بيانين متصلين G_1 و G_2 ومنفصلين عن بعضهما بالنسبة الى الرؤوس بالشكل $G_1 \bullet G_2$ و $G_1 : G_2$ صعب. ولأجل الحصول على متعددة حدود وينر لتعميم المسافة لكثير من البيانات المركبة، فقد عالجنا هذه المشكلة عندما يكون البيانين G_1 و G_2 خاصين، مثل البيانات التامة ، وبيانات النجمة. ولقد أوجدنا دليل وينر بالنسبة الى تعميم المسافة هذه لكل من البيانات المذكورة.

ولقد ذكرنا في الفقرة الثانية من هذا البحث صيغة لإيجاد متعددة حدود وينر لتعميم المسافة لبيان مركب من اتصال بيانين منفصلين.

1. المقدمة:

قام العديد من الباحثين بتعميم المسافة بين مجموعتين من الرؤوس [2]،[3] ، والتي سيعتمد بحثنا عليها اعتمادا مباشرا في إيجاد صيغ عامة لمتعددة حدود وينر-n لبعض البيانات المركبة من البيانات الخاصة والناتجة من العمليات المعرفة لـــ Gutman [4].

فإذا كانت A وB مجموعتين غير خاليتين من الرؤوس في بيان متصل منتهى $G=(V,E)$، إذ أنه ليس من الضروري أن تكون المجموعتان A وB مختلفتين، فقد عرف بعض الباحثين المسافة الصغرى (the minimum distance) بين المجموعتين A وB، في البيانG. بأنها:

$$d_{min}(A,B)=\min\{d(a,b): a\in A, b\in B\}$$

تعريف (1.1): ليكن G بيانا متصلا برتبة p، ولتكن S مجموعة-(n-1) من رؤوس G ، إذ أن $3\le n\le p$، وليكن v أي رأس في G، فأن المسافة الصغرى بين الرأس v والمجموعة S تعرف كالأتي:

$$d_n(v,S)=\min\{d(v,u):\ u\in S\})$$

واضح أن

$$d_n(v,S)=0\ ;\ \text{when}\ \ v\in S$$

$$d_n(v,S)\ge 1\ ;\ \text{when}\ \ v\notin S$$

تعريف(1.2): ليكن $C_n(G,k)$ عدد الأزواج (v,S) والتي لكل منها المسافة الصغرى بين الرأس v والمجموعة S، $(|S|=n-1)$ هـــي k ، أي أن $d_n(v,S)=k$. نعـــرف متعـــددة حـــدود وينـــر-n للبيان Gبأنها متعددة الحدود والتي يرمز لها $W_n(G;x)$ بأنها متعددة الحدود

$$W_n(G;x)=\sum_{k=0}^{\delta_n} C_n(G,k)\,x^k$$

إذ أن δ_n هو قطر لهذا النوع من المسافة للبيان G، أي أن

$$\delta_n=\max\{d(v,S): v\in V, S\subseteq V, |S|=n-1\}$$

نلاحظ أن $d_n(v,S)\le \operatorname{diam} G$ لكل n,v و S .

ويعرف دليل وينر-n للبيان G، والذي يرمز له بـــ $W_n(G)$ بأنه مجموع المسافات الصغرى لكل الأزواج (v,S) في البيان G، أي أن

$$W_n(G)=\sum_{\substack{(v,S)\\ v\in V, S\subseteq V}} d_n(v,S)$$

إذ أن $|S|=n-1$.

وكذلك يمكن التعبير عن دليل وينر-n بأنه مشتقة متعددة حدود وينر-n بالنسبة الى x عندما x=1، أي أن

$$W_n(G)=W_n'(G;x)\,|_{x=1}=\sum_{k=1}^{\delta_n} k\,C_n(G,k)$$

تعريف(1.3):[4] ليكن G_1 و G_2 بيانين متصلين ومنفصلين عن بعضهما البعض بالنسبة الى الرؤوس، وليكن $u\in V(G_1)$ و $v\in V(G_2)$، فأن البيان المركب $G_1\bullet G_2$ هو البيان الناتج من تطابق الرأسين u وv، والبيان المركب $G_1:G_2$ هو البيان الناتج من إضافة حافة جديدة تصل الرأسين u و v

وأخيرا سوف نذكر بعض خواص معاملات متعددات حدود وينر-n للبيان المتصل G.

لنفرض أن $S\subseteq V(G)$، وأن $|S|=n-1$، $2\le n\le p$. فأن

(1) عدد الأزواج (v,S) التي نستطيع أن نكونها هو $p\binom{p}{n-1}$، وأن مجموع المعاملات هو

$$\sum_{i=1}^{\delta_n} C_n(G,i)=(p-n+1)\binom{p}{n-1}=p\binom{p-1}{n-1}$$

(2) واضح أن

$$C_n(G,0)=p\binom{p-1}{n-2}$$

(3) المأخوذة الآتية تعين لنا قيمة المعامل $C_n(G,1)$ لكل بيان متصل.

مأخوذة (1.4):[1] لكل بيان متصل G برتبة p ولكل $2\le n\le p$، يكون

$$C_n(G,1)=p\binom{p-1}{n-1}-\sum_{\forall v\in V}\binom{p-1-\deg_G v}{n-1}. \quad \#$$

2. متعددة حدود وينر - n لاتصال بيانين:

ليكن G_1 و G_2 بيانين متصلين ومنفصلين عن بعضهما وبرتبة p_1 و p_2 على التـــوالي، وليكن G هو اتصال $G_1 + G_2$. واضح أن رتبة G هي $p = p_1 + p_2$، لكل $3 \le n \le p$ يكون قطـــر n- للبيان G لا يزيد على 2.

مبرهنة (2.1): متعددة حدود وينر–n للبيان $G = G_1 + G_2$، لكل $3 \le n \le p$ هي:

$$W_n(G;x) = \sum_{k=0}^{2} C_n(G,k)x^k$$

إذ أن:

$$C_n(G,0) = p\binom{p-1}{n-2}$$

$$C_n(G,1) = p\binom{p-1}{n-1} - \sum_{v\in V(G_1)}\binom{p_1-1-\deg_{G_1} v}{n-1} - \sum_{v\in V(G_2)}\binom{p_2-1-\deg_{G_2} v}{n-1}$$

$$C_n(G,2) = \sum_{v\in V(G_1)}\binom{p_1-1-\deg_{G_1} v}{n-1} + \sum_{v\in V(G_2)}\binom{p_2-1-\deg_{G_2} v}{n-1}$$

البرهان:

من العلاقة (1.1) نحصل على ما يأتي

$$C_n(G,0) = p\binom{p-1}{n-2}$$

ومن المأخوذة (1.4) ، فأن

$$C_n(G,1) = p\binom{p-1}{n-1} - \sum_{v\in V(G)}\binom{p-1-\deg_G v}{n-1}$$

ولما كان $p = p_1 + p_2$، وأن

$$\deg_G v = \begin{cases} p_2 + \deg_{G_1} v; & \text{if } v\in V(G_1) \\ p_1 + \deg_{G_2} v; & \text{if } v\in V(G_2) \end{cases}$$

ولذلك فأن $C_n(G,1)$ تكون كما هي مذكورة في نص العبارة

ولما كان قطر n- للبيان G لا يزيد على 2 ، فأن

$$C_n(G,1) + C_n(G,2) = p\binom{p-1}{n-1}$$

وبذلك تكون $C_n(G,2)$ كما هي مذكورة في نص المبرهنة. #

نتيجة (2.2): دليل وينر -n لاتصال بيانين منفصلين G_1 و G_2 هو

$$W_n(G_1+G_2)=p\binom{p-1}{n-1}+\sum_{v\in V(G_1)}\binom{p_1-1-\deg_{G_1}v}{n-1}+\sum_{v\in V(G_2)}\binom{p_2-1-\deg_{G_2}v}{n-1}$$

البرهان:

مباشرة من المبرهنة. #

3. متعددة حدود وينر - n لبيان مركب من بيانين تامين:

ليكن K_r و K_t بيانين تامين برتبة r و t على التوالي، وليكن v هو رأس في K_r و u هو رأس في K_t.

مبرهنة (3.1): ليكن G البيان الناتج من K_r و K_t بتطابق الرأسين v و u (أي أن $G=K_r\bullet K_t$). وأن $p=r+t-1$ هي رتبة البيان G وأن القطر -n لا يزيد على 2.فأن لكل عدد صحيح n، $3\le n\le p$ يكون:

$$W_n(G;x)=\sum_{k=0}^{2}C_n(G,k)x^k$$

إذ أن:

$$C_n(G,0)=p\binom{p-1}{n-2}$$

$$C_n(G,1)=p\binom{p-1}{n-1}-(r-1)\binom{t-1}{n-1}-(t-1)\binom{r-1}{n-1}$$

$$C_n(G,2)=(r-1)\binom{t-1}{n-1}+(t-1)\binom{r-1}{n-1}$$

البرهان:

ليكن w هو الرأس الناتج من تطابق الرأسين v و u في G.

فأنه من العلاقة (1.1)، يكون

$$C_n(G,0)=p\binom{p-1}{n-2}$$

ومن المأخوذة (1.4)، فأن

$$C_n(G,1)=p\binom{p-1}{n-1}-\sum_{y\in V(G)}\binom{p-1-\deg_G y}{n-1}$$

$$=p\binom{p-1}{n-1}-(r-1)\binom{t-1}{n-1}-(t-1)\binom{r-1}{n-1}$$

وذلـــك لأن

$$\deg_G y = \begin{cases} r-1; & \text{when } y \in V(K_r)-\{w\} \\ t-1; & \text{when } y \in V(K_t)-\{w\} \\ r+t-2; & \text{when } y = w \end{cases}$$

وبما أن قطر -n للبيان G هو 2 فأن

$$C_n(G,2) = \sum_{y \in V(G)} \binom{p-1-\deg_G y}{n-1}$$
$$= (r-1)\binom{t-1}{n-1} + (t-1)\binom{r-1}{n-1} \qquad \#$$

نتيجة (3.2) :

$$W_n(K_r \bullet K_r; x) = (2r-1)\binom{2r-2}{n-2} + \left[(2r-1)\binom{2r-2}{n-1} - 2(r-1)\binom{r-1}{n-1}\right]x$$
$$+ 2(r-1)\binom{r-1}{n-1}x^2; \qquad 3 \le n \le 2r-1$$

البرهان: ينتج البرهان مباشرة من المبرهنة (3.1) بوضع $t = r$. #

نتيجة (3.3): دليل وينر -n للبيان $K_r \bullet K_t$ هو

$$W_n(K_r \bullet K_t) = p\binom{p-1}{n-1} + (r-1)\binom{t-1}{n-1} + (t-1)\binom{r-1}{n-1}.$$

إذ أن $p = r+t-1$

البرهان: مباشرة من المبرهنة (3.1). #

مبرهنة (3.4): ليكن G' البيان الناتج من K_r و K_t بإضافة حافة تصل بين الرأس v من K_r والرأس u من K_t .(أي أن $G' = K_r : K_t$)، فأن لكل عدد صحيح n ، $3 \le n \le p$، إذ أن $p = r+t$. يكون

$$W_n(G'; x) = \sum_{k=0}^{3} C_n(G', k)\, x^k$$

إذ أن

$$C_n(G', 0) = p\binom{p-1}{n-2}$$
$$C_n(G', 1) = p\binom{p-1}{n-1} - (rt-n+1)\left\{\frac{1}{t}\binom{t}{n-1} + \frac{1}{r}\binom{r}{n-1}\right\}$$

$$C_n(G',2)=(r-2+\frac{t}{n-1})\binom{t-1}{n-2}+(t-2+\frac{r}{n-1})\binom{r-1}{n-2}$$

$$C_n(G',3)=(r-1)\binom{t-1}{n-1}+(t-1)\binom{r-1}{n-1}$$

البرهان:

واضح أن

$$C_n(G',0)=p\binom{p-1}{n-2}$$

ومن المأخوذة (1.4)، فأن

$$\begin{aligned}C_n(G',1)&=p\binom{p-1}{n-1}-\sum_{y\in V(G')}\binom{p-1-\deg_{G'}y}{n-1}\\&=p\binom{p-1}{n-1}-\left\{(r-1)\binom{t}{n-1}+\binom{t-1}{n-1}+\binom{r-1}{n-1}+(t-1)\binom{r}{n-1}\right\}\\&=p\binom{p-1}{n-1}-(rt-n+1)\left\{\frac{1}{t}\binom{t}{n-1}+\frac{1}{r}\binom{r}{n-1}\right\}\end{aligned}$$

ولأجل أن نجد $C_n(G',2)$، نلاحظ أنه إذا كان

$$d_n(y,S)=2\ ,\ y\in V(G')\ ,\ S\subseteq V(G')\ ,\ |S|=n-1$$

فيجب أن يكون لدينا الحالات الآتية:

1) $y=u$; $S\subseteq V(K_r)-\{v\}$
2) $y=v$; $S\subseteq V(K_t)-\{u\}$
3) $y\in V(K_t)-\{u\}$; $S=\{v\}\cup T$; $\phi\neq T\subseteq V(K_r)-\{v\}$
4) $y\in V(K_r)-\{v\}$; $S=\{u\}\cup T$; $\phi\neq T\subseteq V(K_t)-\{u\}$

وعليه فأن عدد هكذا أزواج (y, S) يكون

$$C_n(G',2)=\binom{r-1}{n-1}+\binom{t-1}{n-1}+(t-1)\binom{r-1}{n-2}+(r-1)\binom{t-1}{n-2}$$

والذي يؤدي بالتبسيط إلى الصيغة المعطاة في نص المبرهنة .

أما لإيجاد $C_n(G,3)$ فنلاحظ أنه إذا كان

$$d_n(y,S)=3\ ,\ y\in V(G')\ ,\ S\subseteq V(G')\ ,\ |S|=n-1$$

فيجب أن تكون لدينا الحالتان:

1) $y\in V(K_r)-\{v\}$; $S\subseteq V(K_t)-\{u\}$
2 $y\in V(K_t)-\{u\}$; $S\subseteq V(K_r)-\{v\}$

وعليه فأن عدد هكذا أزواج (y, S) يكون

$$C_n(G',3) = (r-1)\binom{t-1}{n-1} + (t-1)\binom{r-1}{n-1}$$ #

يمكن ملاحظة أن القطر - n للبيان $G' = K_r : K_t$ يكون

$n-1 < \max\{r, t\}$; when $\delta_n = 3$

$n-1 \geq \max\{r, t\}$; when $\delta_n = 2,1$

نتيجة (3.5): إن دليل وينر - n للبيان $G' = K_r : K_t$ هو

$$W_n(G') = p\binom{p-1}{n-1} + (2r-1-\frac{r(n-1)}{t})\binom{t}{n-1} + (2t-1-\frac{t(n-1)}{r})\binom{r}{n-1}$$

البرهان:

عند اشتقاق متعددة حدود وينر–n للبيان $G' = K_r : K_t$ بالنسبة الى x والتعويض عن x =1 وبعد تبسيطها نحصل على الصيغة في نص النتيجة. #

4. متعددة حدود وينر - n لبيان مركب من نجمتين:

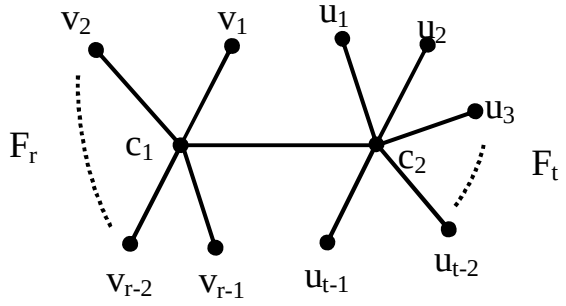
لتكن F_r بيان نجمة من الرتبة r $(r \geq 4)$ و F_t بيان نجمة أخرى من الرتبة t $(t \geq 4)$ ، إذ أن

$V(F_r) = \{c_1, v_1, v_2, ..., v_{r-1}\}$

$V(F_t) = \{c_2, u_1, u_2, ..., u_{t-1}\}$

وأن c_1 هو مركز F_r و c_2 هو مركز F_t .

ليكن $F_{r,t}$ البيان الناتج من النجمتين F_r و F_t بتطابق الرأسين v_1 و c_2 ،كما مبين في الشكل (4.1).



الشكل (4.1) البيان $F_{r,t}$

مبرهنة (4.1): متعددة حدود وينر -n للبيان $F_{r,t}$ هي

$$W_n(F_{r,t};x)=\sum_{k=0}^{3}C_n(F_{r,t},k)x^k$$

إذ أن

$$C_n(F_{r,t},0)=p\binom{p-1}{n-2}$$

$$C_n(F_{r,t},1)=p\binom{p-1}{n-1}-\left\{(p-2)\binom{p-2}{n-1}+\binom{t-1}{n-1}+\binom{r-2}{n-1}\right\}$$

$$C_n(F_{r,t},2)=(p-2)\binom{p-2}{n-1}-(r-3)\binom{t-1}{n-1}-(t-2)\binom{r-2}{n-1}$$

$$C_n(F_{r,t},3)=(r-2)\binom{t-1}{n-1}+(t-1)\binom{r-2}{n-1}$$

البرهان:

من الواضح أن رتبة $F_{r,t}$ هي $p = r + t - 1$ ، وأن

$n<\max\{r,t+1\}$; when $\delta_n=3$

$n\geq\max\{r,t+1\}$; when $\delta_n=2,1$

من العلاقة (1.1) نحصل على ما يأتي

$$C_n(F_{r,t},0)=p\binom{p-1}{n-2}$$

ومن المأخوذة (1.2) فأن

$$C_n(F_{r,t},1) = p\binom{p-1}{n-1} - \sum_{y\in V(F_{r,t})}\binom{p-1-\deg_{F_{r,t}} y}{n-1}$$
$$= p\binom{p-1}{n-1} - \left\{(p-2)\binom{p-2}{n-1} + \binom{t-1}{n-1} + \binom{r-2}{n-1}\right\}$$

لكي نجد $C_n(F_{r,t},2)$ نجد أولا $C_n(F_{r,t},3)$

إذا كان

$$d_n(y,S) = 3,\ y \in V(F_{r,t}),\ S \subseteq V(F_{r,t}),\ |S| = n-1$$

فأنه توجد لدينا حالتان فقط وهما

1) $y \in V(F_r) - \{c_1, v_1\}$; $S \subseteq V(F_t) - \{c_2\}$

2) $y \in V(F_t) - \{c_2\}$; $S \subseteq V(F_r) - \{c_1, v_1\}$

ومنهما نحصل على ما يأتي

$$C_n(F_{r,t},3) = (r-2)\binom{t-1}{n-1} + (t-1)\binom{r-2}{n-1}$$

أما $C_n(F_{r,t},2)$ فنجده مباشرة من العلاقة أدناه

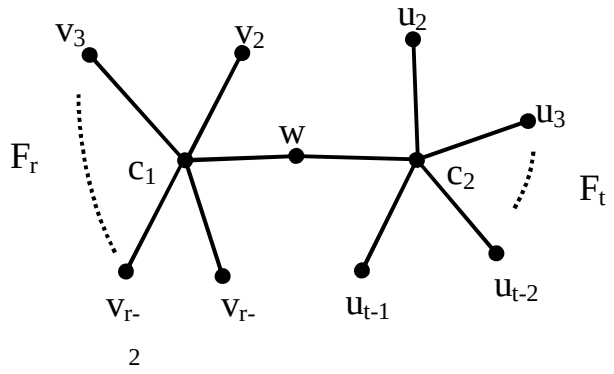
$$C_n(F_{r,t},2) + C_n(F_{r,t},3) = \sum_{y\in V(F_{r,t})}\binom{p-1-\deg_{F_{r,t}} y}{n-1}$$

نتيجة (4.2): دليل وينر -n للبيان المركب $F_{r,t}$ هو

$$W_n(F_{r,t}) = p\binom{p-1}{n-1} + (p-2)\binom{p-2}{n-1} + t\binom{r-2}{n-1} + (r-1)\binom{t-1}{n-1}.$$

#

ألان نفرض أن $F'_{r,t}$ هو البيان الناتج من النجمتين F_r و F_t بتطابق الرأس v_1 من F_r مع الرأس u_1 من F_t ، عندئذ نجد أن رتبة هذا البيان $F'_{r,t}$ هي $p = r + t - 1$ لاحظ الشكل(2-4).



الشكل (4.2) البيان $F'_{r,t}$

المبرهنة (4.3): متعددة حدود وينر -n للبيان $F'_{r,t}$ هي

$$W_n(F'_{r,t};x)=\sum_{k=0}^{4} C_n(F'_{r,t},k)x^k$$

إذ أن

$$C_n(F'_{r,t},0)=p\binom{p-1}{n-2}$$

$$C_n(F'_{r,t},1)=p\binom{p-1}{n-1}-\left\{(p-2-\frac{n-1}{p-2})\binom{p-2}{n-1}+\binom{t-1}{n-1}+\binom{r-1}{n-1}\right\}$$

$$C_n(F'_{r,t},2)=(p-2-\frac{n-1}{p-2})\binom{p-2}{n-1}-(t-2-\frac{n-1}{r-1})\binom{r-1}{n-1}-(r-2-\frac{n-1}{t-1})\binom{t-1}{n-1}$$

$$C_n(F'_{r,t},3)=(r-3+\frac{t-1}{n-1})\binom{t-2}{n-2}+(t-3+\frac{r-1}{n-1})\binom{r-2}{n-2}$$

$$C_n(F'_{r,t},4)=(r-2)\binom{t-2}{n-1}+(t-2)\binom{r-2}{n-1}$$

البرهان:

واضح أن قطر -n للبيان $F'_{r,t}$ هو δ_n، إذ أن :

$$n<\max\{r,t\};\quad \text{when } \delta_n=4$$

$$n\geq\max\{r,t\};\quad \text{when } \delta_n=3,2,1$$

من الواضح أيضا أن

$$C_n(F'_{r,t},0)=p\binom{p-1}{n-2}$$

ومن المأخوذة (1.4)، فأن

$$C_n(F'_{r,t},1) = p\binom{p-1}{n-1} - \sum_{y\in V(F'_{r,t})}\binom{p-1-\deg_{F'_{r,t}} y}{n-1}$$

$$= p\binom{p-1}{n-1} - \left\{(p-3)\binom{p-2}{n-1} + \binom{p-3}{n-1} + \binom{t-1}{n-1} + \binom{r-1}{n-1}\right\}$$

ويمكن تبسيط المقدار في الطرف الأيمن للحصول على المقدار المعطى في نص المبرهنة .

وقبل أن نجد $C_n(F'_{r,t},2)$ سنجد $C_n(F'_{r,t},3)$ و $C_n(F'_{r,t},4)$

نرمز للرأس الناتج من تطابق الرأس v_1 من F_r مع الرأس u_1 من F_t بالحرف w .

فإذا كان

$$d_n(y,S) = 3 \ , y \in V(F'_{r,t}) \ , S \subseteq V(F'_{r,t}) \ , |S| = n-1$$

فتكون لدينا أربع حالات وهي:

1) $y = c_1$; $\quad S \subseteq V(F_t) - \{w, c_2\}$

2) $y = c_2$; $\quad S \subseteq V(F_r) - \{w, c_1\}$

3) $y \in V(F_r) - \{w, c_1\}$; $\quad S = \{c_2\} \cup T$; $\phi \neq T \subseteq V(F_t) - \{w, c_2\}$

4) $y \in V(F_t) - \{w, c_2\}$; $\quad S = \{c_1\} \cup T$; $\phi \neq T \subseteq V(F_r) - \{w, c_1\}$

ومنها نحصل على

$$C_n(F'_{r,t},3) = \binom{t-2}{n-1} + \binom{r-2}{n-1} + (r-2)\binom{t-2}{n-2} + (t-2)\binom{r-2}{n-2}$$

وبعد التبسيط نحصل على الصيغة المذكورة في المبرهنة.

وإذا كان

$$d_n(y,S) = 4 \ , y \in V(F'_{r,t}) \ , S \subseteq V(F'_{r,t}) \ , |S| = n-1$$

فيكون لدينا حالتان فقط وهما:

1) $y \in V(F_r) - \{w, c_1\}$; $\quad S \subseteq V(F_t) - \{w, c_2\}$

2) $y \in V(F_t) - \{w, c_2\}$, $\quad S \subseteq V(F_r) - \{w, c_1\}$

ومن الحالتين المذكورتين نحصل على ما يأتي:

$$C_n(F'_{r,t},4)=(r-2)\binom{t-2}{n-1}+(t-2)\binom{r-2}{n-1}$$

ولما كان

$$C_n(F'_{r,t},2)+C_n(F'_{r,t},3)+C_n(F'_{r,t},4)=\sum_{y\in V(F'_{r,t})}\binom{p-1-\deg_{F'_{r,t}} y}{n-1}$$

فأن

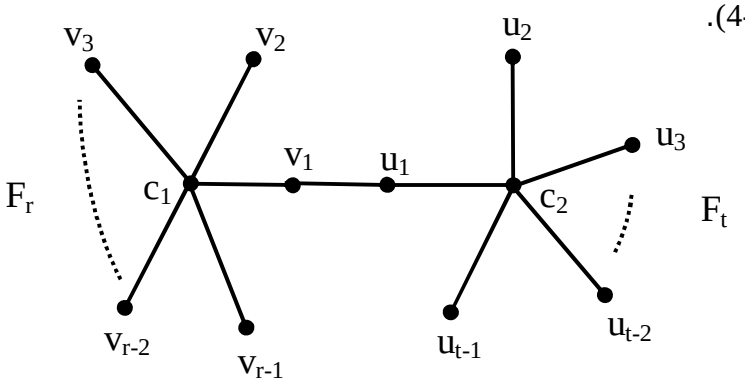
$$C_n(F'_{r,t},2)=(p-2-\frac{n-1}{p-2})\binom{p-2}{n-1}+\binom{t-2}{n-2}+\binom{r-2}{n-2}-(r-2)\binom{t-1}{n-1}-(t-2)\binom{r-1}{n-1}$$
$$-(r-2-\frac{n-1}{t-1})\binom{t-1}{n-1}=(p-2-\frac{n-1}{p-2})\binom{p-2}{n-1}-(t-2-\frac{n-1}{r-1})\binom{r-1}{n-1}$$

#

نتيجة (4.4): دليل وينر n- للبيان المركب $F'_{r,t}$ هو

$$W_n(F'_{r,t})=p\binom{p-1}{n-1}+(p-2-\frac{n-1}{p-2})\binom{p-2}{n-1}+(r-1)(2-\frac{n-1}{t-1})\binom{t-1}{n-1}$$
$$+(t-1)(2-\frac{n-1}{r-1})\binom{r-1}{n-1}$$ #

ليكن $\bar{F}_{r,t}$ البيان الناتج من النجمتين F_r و F_t بإضافة حافة تصل الرأس v_1 من F_r مع الرأس u_1 من F_t عندئذ نجد أن رتبة هذا البيان $\bar{F}_{r,t}$ هي $p = r + t$ ،كما هو مبين في الشكل (3-4).



الشكل (4.3) البيان $\bar{F}_{r,t}$

مبرهنة (4.5): متعددة حدود وينر -n للبيان $\bar{F}_{r,t}$ هي

$$W_n(\bar{F}_{r,t};x)=\sum_{k=0}^{5} C_n(\bar{F}_{r,t},k)x^k$$

إذ أن

$$C_n(\bar{F}_{r,t},0)=p\binom{p-1}{n-2}$$

$$C_n(\bar{F}_{r,t},1)=p\binom{p-1}{n-1}-\left\{(p-2-\frac{2n-2}{p-2})\binom{p-2}{n-1}+\binom{t}{n-1}+\binom{r}{n-1}\right\}$$

$$C_n(\bar{F}_{r,t},2)=(p-2-\frac{2n-2}{p-2})\binom{p-2}{n-1}-(r-3)\binom{t}{n-1}-(t-3)\binom{r}{n-1}$$
$$-(2-\frac{n-1}{r-1})\binom{r-1}{n-1}-(2-\frac{n-1}{t-1})\binom{t-1}{n-1}$$

$$C_n(\bar{F}_{r,t},3)=(r-3+\frac{t}{n-1})\binom{t-1}{n-2}+(t-3+\frac{r}{n-1})\binom{r-1}{n-2}$$

$$C_n(\bar{F}_{r,t},4)=(r-3+\frac{t-1}{n-1})\binom{t-2}{n-2}+(t-3+\frac{r-1}{n-1})\binom{r-2}{n-2}$$

$$C_n(\bar{F}_{r,t},5)=(r-2)\binom{t-2}{n-1}+(t-2)\binom{r-2}{n-1}$$

البرهان:

إن القطر -n للبيان $\bar{F}_{r,t}$ هو δ_n إذ أن:

$$n<\max\{r,t\};\ \text{when}\ \delta_n=5$$

$$n\geq\max\{r,t\}\ ;\ \text{when}\ 1\leq\delta_n\leq 4$$

من الواضح أن

$$C_n(\bar{F}_{r,t},0)=p\binom{p-1}{n-2}$$

وأن

$$C_n(\bar{F}_{r,t},1)=p\binom{p-1}{n-1}-\sum_{y\in V(\bar{F}_{r,t})}\binom{p-1-\deg_{\bar{F}_{r,t}}y}{n-1}$$
$$=p\binom{p-1}{n-1}-\left\{(p-4)\binom{p-2}{n-1}+2\binom{p-3}{n-1}+\binom{r}{n-1}+\binom{t}{n-1}\right\}$$

$$= p\binom{p-1}{n-1} - \left\{(p-2-\frac{2n-2}{p-2})\binom{p-2}{n-1} + \binom{t}{n-1} + \binom{r}{n-1}\right\}$$

الآن سوف نجد كلا من $C_n(\bar{F}_{r,t},3)$ ، $C_n(\bar{F}_{r,t},4)$ و $C_n(\bar{F}_{r,t},5)$

إذا كان

$$d_n(y,S) = 3 \ , y \in V(\bar{F}_{r,t}), S \subseteq V(\bar{F}_{r,t}) \ , |S| = n-1$$

فأنه لدينا ست حالات وهي

1) $y \in V(F_r) - \{c_1, v_1\}$; $\quad S = \{u_1\} \cup T \ ; \ \phi \neq T \subseteq V(F_t) - \{u_1\}$

2) $y \in V(F_t) - \{c_2, u_1\}$; $\quad S = \{v_1\} \cup T \ ; \ \phi \neq T \subseteq V(F_r) - \{v_1\}$

3) $y = c_1$; $\quad S = \{c_2\} \cup T \ ; \ \phi \neq T \subseteq V(F_t) - \{c_2, u_1\}$

4) $y = c_2$; $\quad S = \{c_1\} \cup T \ ; \ \phi \neq T \subseteq V(F_r) - \{c_1, v_1\}$

5) $y = v_1$; $\quad S \subseteq V(F_t) - \{c_2, u_1\}$

6) $y = u_1$; $\quad S \subseteq V(F_r) - \{c_1, v_1\}$

إذا عدد الأزواج (y,S) بحيث $d_n(y,S) = 3$ لجميع الحالات أعلاه هو

$$C_n(\bar{F}_{r,t},3) = (r-2)\binom{t-1}{n-2} + (t-2)\binom{r-1}{n-2} + \binom{t-2}{n-2} + \binom{r-2}{n-2} + \binom{t-2}{n-1} + \binom{r-2}{n-1}$$

بعد التبسيط نحصل على $C_n(\bar{F}_{r,t},3)$ بالصيغة المذكورة في نص المبرهنة .

وإذا كان

$$d_n(y,S) = 4 \ , y \in V(\bar{F}_{r,t}) \ , S \subseteq V(\bar{F}_{r,t}) \ , |S| = n-1$$

فأن لدينا أربع حالات وهي

1) $y \in V(F_r) - \{c_1, v_1\}$; $\quad S = \{c_2\} \cup T \ ; \ \phi \neq T \subseteq V(F_t) - \{c_2, u_1\}$

2) $y \in V(F_t) - \{c_2, u_1\}$; $\quad S = \{c_1\} \cup T \ ; \ \phi \neq T \subseteq V(F_r) - \{c_1, v_1\}$

3) $y = c_1$; $\quad S \subseteq V(F_t) - \{c_2, u_1\}$

4) $y = c_2$; $\quad S \subseteq V(F_r) - \{c_1, v_1\}$

إذا

$$C_n(\bar{F}_{r,t},4) = (r-2)\binom{t-2}{n-2} + (t-2)\binom{r-2}{n-2} + \binom{t-2}{n-1} + \binom{r-2}{n-1}$$

وأيضا بعد التبسيط نحصل على $C_n(\bar{F}_{r,t},4)$ بالصيغة المذكورة في نص المبرهنة.

وإذا كان

$$d_n(y,S) = 5 \ , \ y \in V(\bar{F}_{r,t}) \ , \ S \subseteq V(\bar{F}_{r,t}) \ , \ |S| = n-1$$

فأنه توجد لدينا حالتان هما :

1) $y \in V(F_r) - \{c_1, v_1\}$; $\quad S \subseteq V(F_t) - \{c_2, u_1\}$

2) $y \in V(F_t) - \{c_2, u_1\}$; $\quad S \subseteq V(F_r) - \{c_1, v_1\}$

وبهاتين الحالتين نحصل على $C_n(\bar{F}_{r,t},5)$ كما هي مذكورة في نص المبرهنة.

وأخيرا نحصل على $C_n(\bar{F}_{r,t},2)$ من العلاقة أدناه

$$C_n(\bar{F}_{r,t},2) + \sum_{k=3}^{5} C_n(\bar{F}_{r,t},k) = \sum_{y \in V(\bar{F}_{r,t})} \binom{p-1-\deg_{\bar{F}_{r,t}} y}{n-1}$$

#

نتيجة (4.6): دليل وينر n- للبيان المركب $\bar{F}_{r,t}$ هو

$$W_n(\bar{F}_{r,t}) = p\binom{p-1}{n-1} + (p-2-\frac{2n-2}{p-2})\binom{p-2}{n-1} + (r-1)\binom{t}{n-1} + (t-1)\binom{r}{n-1}$$
$$+ (2t-1-\frac{t(n-1)}{r-1})\binom{r-1}{n-1} + (2r-1-\frac{r(n-1)}{t-1})\binom{t-1}{n-1}$$

البرهان:

بعد اشتقاق متعددة حدود وينر n- للبيان $\bar{F}_{r,t}$ بالنسبة الى x والتعويض عن $x = 1$ ثم بعد ذلك نقوم بإجراء بعض الاختصارات فنحصل على الصيغة المعطاة في النتيجة. #

المصادر

[1] Ali A.M. ; (2005), Wiener Polynomials of Generalized Distance in Graphs , M.SC. Thesis , Mosul University , Mosul.

[2] Buckley F. and Harary F. ; (1990). Distance in Graphs. Addison - -Wesley , New York.

[3] Dankelmann P. , Goddard W. , Henning M.A. and Swart H.C. ; (1999).Generalized eccentricity , radius and diameter in graphs. Foundation for Research Development . c 1999 John Wiely & Sons , Inc. Networks 34: 312-319.

[4] Gutman I. ; (1993). Some properties of the Wiener polynomial ; Graph Theory Notes of New York; XXV .The New York Academy of Sciences 13-17 .