

**" Runge - Kutta " استخدام طريقة رونج – كوتا
في ايجاد الحل العددي لمنظومة الانتظار (C2 / C1 /2/3)**

م.د. داود سلمان رحيم
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المستخلص

يمكن التوصل الى حالة الاستقرار (Steady state) بسهولة عن طريق الحلول التحليلية لانظمة الانتظار (M/M/m/N, M/M/m/1) وذلك عندما يكون التوزيع الاحتمالي لافترات الوصول البيني بين زبون واخر وافترات الخدمة لهذه الانظمة هو التوزيع الاسي (Exponential Distribution)، وان هذه الانظمة هي الشائعة في اغلب كتب صفوف الانتظار، ولكن عندما يكون التوزيع الاحتمالي لافترات الوصول البيني وافترات الخدمة غير اسي (Non-Exponentially) فان الوصول الى حالة الاستقرار عن طريق الحلول التحليلية يكون امراً معقداً مثال ذلك الانظمة (M/CL/m/n, Ck/CL/1/N, Ck/CL/m/n) وغيرها من الانظمة، وذلك بسبب كثرة الاطوار التي يمر بها الزبون في كل محطة سواء كانت في مرحلة الوصول او الخدمة.

لذلك في هذا البحث تم استخدام طريقة رياضية (رونج – كوتا ذات المرتبة الرابعة) في ايجاد الحل العددي لنموذج الانتظار (C2/C1 /2/3) وذلك من خلال ايجاد مصفوفة معدل الانتقال ثم كتابة المعادلات التفاضلية وبالتالي تم اعداد برنامج حاسوبي لحل هذه المعادلات.

نبذة تاريخية.

• تعود البحوث الاولى في مجال صفوف الانتظار الى الباحث الدنماركي ايرلانك (Erlang) عام ١٩٠٩ اذ وضع نمودجا اوفق لتحقيق الاستفادة من خطوط الهاتف، وبعده قام باحثون اخرون بتطوير النظرية فقاموا بوضع معادلات رياضية معينة لحساب طول صف الانتظار وقاموا ايضا بتوضيح اشكال صف الانتظار، وطريقة تقديم الخدمة في القناة الخدمية، وقد طبقت النظرية في مجالات عديدة منها صيانة المكنائن، وانتظار المسافرين او انتظار المرضى في المستشفيات.

• في عام ١٩٥٥ قام كوكس (Cox) بدراسة توزيع احتمالي وقد استنتج بان اي دالة توزيعية تمتلك تحويل لابلاس من الممكن تمثيلها عن طريق سلسلة من الاطوار وان كل طور من هذه الاطوار يتوزع توزيعاً اسياً.

- في عام (١٩٧٤) نشر هاريس (Harris) كتاب سماه (Fundamentals of theory queueing) بين فيه السلوك الانتقالي للأنظمة $(M/EL/1)$ ، $(E_k/M/1)$ عن طريق المعادلات الخاصة.
- في عام (١٩٧٧) تم استخدام الطرق العددية في ايجاد الحل الانتقالي للنظام $(M/EL/m)$ من قبل (Martias)
- في عام (١٩٨٨) تم استخدام طريقة رونج – كوتا في ايجاد الحل العددي للنظام $(M/M/m/N)$ من قبل (Sharma).
- في عام (١٩٩٦) قام الباحث فرحان اسماعيل باستخدام طريقة (رونج – كوتا) في ايجاد الحل العددي للنظام $(E_k/EL/m/N)$.
- في عام (٢٠٠١) قامت الباحثة (ايمان محمود) بتطوير انموذج رياضي لحل منظومة صف الانتظار متعددة المراحل وذلك من خلال بناء نموذج محاكاة.
- في عام (٢٠٠٥) قام الباحث (داود سلمان) بايجاد الحل التحليلي لنموذج الانتظار (∞) $(C_2/C_2/2/2/)$ ومقارنة ذلك مع الحل العددي باستخدام طريقة (رونج – كوتا) واسلوب (Eigen value).

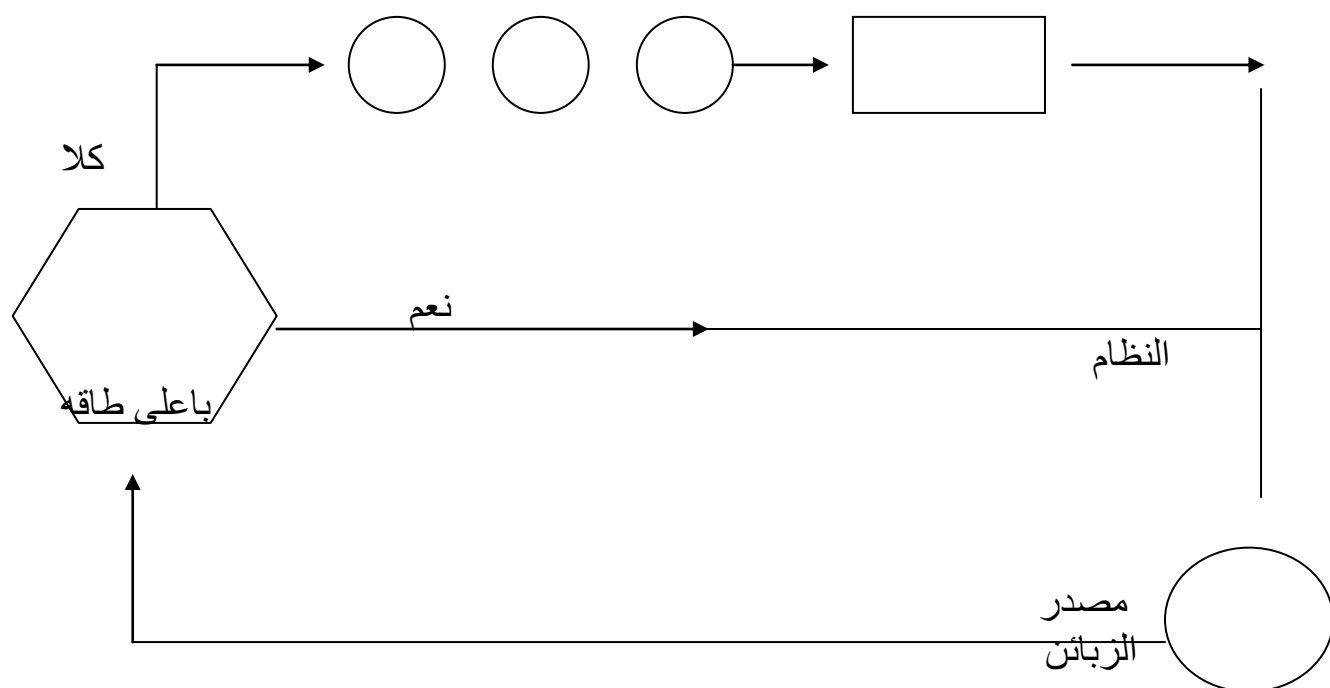
هدف البحث

ايجاد الحل العددي لنموذج الانتظار $(C_2/C_1/2/3)$ باستخدام طريقة (رونج – كوتا).

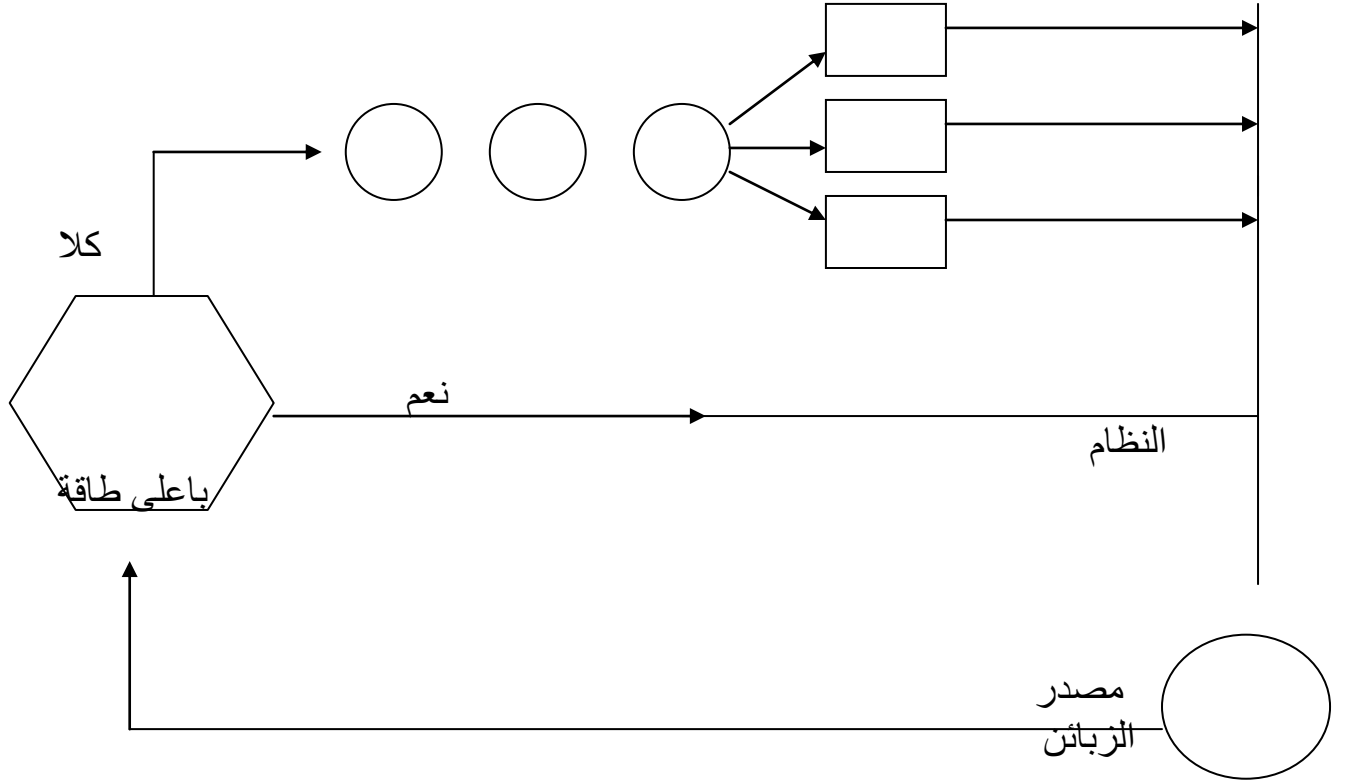
منظومات صفوف الانتظار (١)

- منظومة صفوف الانتظار احادية المرحلة. Single- Stage Queueing System.

ان نظام الانتظار احادي المرحلة ينشأ عندما تكون محطة الخدمة ذات مرحلة واحدة اي ان الزبون عندما يدخل الى محطة الخدمة فانه سوف يمر بمرحلة واحدة فقط لخدمة (Stage-Single) (المخطط ١). ومن الممكن ان يكون لنظام الانتظار محطات خدمة متعددة ولكن ذات مرحلة واحدة اي ان الزبون سيمر بمحطة خدمة واحدة في اثناء خدمته (المخطط ٢).



مخطط (١) منظومة انتظار بمحطة خدمة واحدة ومرحلة واحدة



المخطط (٢) منظومة انتظار متعددة قنوات الخدمة وبمرحلة واحدة

- منظومة صفوف الانتظار متعددة المراحل (Multi – Stage)
ان محطة الخدمة قد تكون متعددة القنوات ومتعددة المراحل بحيث ان الزبون لا يستطيع دخول قناة خدمة لاحقة او مرحلة لاحقة مالم يكمل قناة خدمة او مرحلة سابقة ، وهذا يمكن ايضاحه من خلال المخطط (٣).

- هناك اختلاف رئيسي ما بين نظام الانتظار احادي المرحلة (Single-Stage) ونظام الانتظار متعدد المراحل (Multi-Stage) ، ففي النظام الاول هناك مصدر واحد فقط للمدخلات (Input) وكذلك مصدر واحد للمخرجات (Output) ومن الممكن ان يكون التوزيع الاحتمالي لافترات الوصول البيني ما بين الزبائن يتبع التوزيع الاسي Exponential Distribution او اي توزيع احتمالي اخر ، وليس من الصعوبة معالجة مشاكل صفوف الانتظار تحت نفس هذه الافتراضات.

اما في حالة نظام الانتظار متعدد المراحل فان هناك العديد من المخرجات (Output) ولكل قناة خدمة وبما ان المدخلات لمرحلة لاحقة هي نفسها المخرجات لمرحلة سابقة ، لهذا فان هناك اعتمادية ما بين المخرجات لكل مرحلة ، ولنفس هذه الحالة فان توزيع اوقات الوصول البيني ما بين الزبائن لكل قناة خدمة لا يمكن عده التوزيع الاسي وان توزيع اوقات الخدمة يختلف من محطة الى اخرى لذلك فان مثل هذه الانظمة تكون اكثر تعقيداً.

• رموز منظومات صفوف الانتظار (٢).

ان الوصف العام للنموذج الرياضي لصفوف الانتظار يبين من خلال الجدول التالي:

الرمز	التفسير
$A(t)$	التوزيع الاحتمالي لافقات الوصول البيني مابين الزبائن
$B(t)$	التوزيع الاحتمالي لافقات الخدمة
m	عدد قنوات الخدمة لنظام الانتظار
N	طاقة النظام
p	حجم المجتمع
QD	نوع نظام الخدمة الذي يستخدمه نظام الانتظار

ولتوضيح هذا الشكل بشكل اكثر دقة نأخذ انموذج منظومة الانتظار $(A(t)/B(t)/m/N/p/QD)$ والموصوف بواسطة ستة رموز.

فعندما يكون التوزيع الاحتمالي لمعدل وصول الزبائن يتبع توزيع بواسون (Poisson Distribution) فانه يتم استخدام الرمز (M) بدلا من $A(t)$ في الترميز اعلاه، اما اذا كانت اوقات الوصول البيني مابين الزبائن ثابتة فان التوزيع يكون قطعياً (Deterministic Distribution) ويرمز له بالرمز D ، وكذلك يتم استخدام بدلا من $A(t)$ في الترميز اعلاه، والجدول التالي بين اهم الرموز الاساسية المستخدمة بكثرة في انظمة صفوف الانتظار.

الوصف	الرمز	الصفة المميزة
Exponential Or Poisson	M	Interarrival- Time, Service Time Distribution $A(t), B(t)$
Deterministic	D	Interarrival- Time, Service Time Distribution $A(t), B(t)$
Erlang E_K, E_L	E_K, E_L	Interarrival- Time, Service Time Distribution $A(t), B(t)$
Coxian C_K, C_L	C_K, C_L	Interarrival- Time, Service Time Distribution $A(t), B(t)$
General	G	Interarrival- Time, Service Time Distribution $A(t), B(t)$
First Come – First Service	FCFS	
Last Come – First Service	LCFS	
Service In Random Order	SIRO	
Priority	PRI	

ولزيادة التوضيح نورد الامثلة الاتية (٣):

• **الانتظار (M / M / 1/ N/∞ / LCFS)**

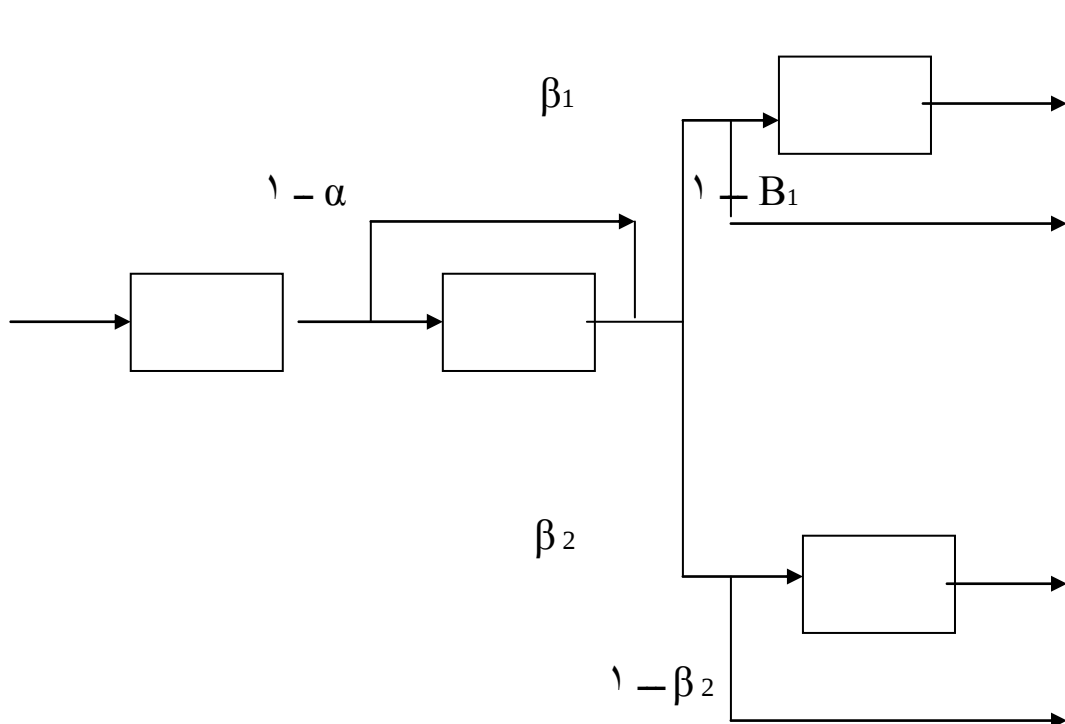
ان نظام الانتظار هذا يبين ان التوزيع الاحتمالي لافقات الوصول البيني مابين الزبائن والتوزيع الاحتمالي لافقات الخدمة يتبعان التوزيع الاسي (Exponential Distribution) ، قناة خدمة واحدة ، طاقة النظام محددة (N) ، طاقة المصدر نهائية ونظام الخدمة من نوع " من ياتي آخره يخدم اولاً " (LCFS).

• **نظام الانتظار (C_K/ C_L / m / N/ ∞ /QD)**

يتبع التوزيع الاحتمالي لافقات الوصول البيني مابين الزبائن يتبع توزيع كوكسيان (Coxian Distribution) بـ (K) من الاطوار التي يمر بها الزبون في محطة الوصول ، اما توزيع اوقات الخدمة هو كذلك يتبع توزيع كوكسيان ذا (L) من الاطوار التي يمر بها الزبون في محطة الخدمة ، يحتوي النظام على (m) من محطات الخدمة ، طاقة النظام محددة (N) ، طاقة المصدر لانهاية ، واي نوع من انواع نظام الخدمة.

• **نظام الانتظار المستخدم في البحث (C₂ / C₁ /2 /3/ ∞)**

التوزيع الاحتمالي لافقات الوصول البيني مابين الزبائن يتبع توزيع كوكسيان بـ (٢) من الاطوار التي يمر بها الزبون في محطة الوصول ، اما توزيع اوقات الخدمة هو كذلك توزيع كوكسيان بطور واحد يمر به الزبون في محطة الخدمة ، يحتوي النظام على (٢) من محطات الخدمة ، طاقة النظام (٣) ، طاقة المصدر لانهاية . (المخطط ٤).



المخطط (٤) منظومة انتظار النظام (C₂ /C₁ /2/3)

التطبيق

١. لغرض ايجاد الحل العددي لنظام الانتظار (C1 /C2 /2/3/ α) علينا ان نجد عدد حالات الانتقال التي يمكن ان ينتقلها النظام (٤) :

حيث:

$$K=2, L=1, m=2, N=3$$

$$nstate = k \left[\sum_{n=0}^m C_n^{n+L-1} + (N-m)C_m^{m+L-1} \right]$$

$$nstate=8$$

Si	n	C	K
١	٠	٠	١
٢	٠	٠	٢
٣	١	١	١
٤	١	١	٢
٥	٢	٢	١
٦	٢	٢	٢
٧	٣	٢	١
٨	٣	٢	٢

٢. ايجاد مصفوفة معدل الانتقال (٥)

		١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
		٠:٠:١	٠:٠:٢	١:١:١	١:١:٢	٢:٢:١	٢:٢:٢	٣:٢:١	٣:٢:٢
١	٠:٠:١	$-\lambda$	—	μ	—	—	—	—	—
2	0:0:2	λ	$-\lambda$	—	μ	—	—	—	—
3	1:1:1	—	λ	$-\lambda - \mu$	—	2μ	—	—	—
٤	١:١:٢	—	—	λ	$-\lambda - \mu$	—	2μ	—	—
٥	٢:٢:١	—	—	—	λ	$-\lambda - 2\mu$	—	2μ	—
٦	٢:٢:٢	—	—	—	—	λ	$-\lambda - 2\mu$	—	2μ
٧	٣:٢:١	—	—	—	—	—	λ	$-\lambda - 2\mu$	—
٨	٣:٢:٢	—	—	—	—	—	—	λ	-2μ
	Σ	٠	٠	٠	٠	٠	٠		٠

٣. من المصفوفة نكتب المعادلات التفاضلية (٧)

$$\begin{aligned} p_1'(t) &= -\lambda p_1(t) + \mu p_3(t) \\ p_2'(t) &= \lambda p_1(t) - \lambda p_2(t) + \mu p_4(t) \\ p_3'(t) &= \lambda p_2(t) - (\lambda + \mu) p_3(t) + 2\mu p_5(t) \\ p_4'(t) &= \lambda p_3(t) - (\lambda + \mu) p_4(t) + 2\mu p_6(t) \\ p_5'(t) &= \lambda p_4(t) - (\lambda + 2\mu) p_5(t) + 2\mu p_7(t) \\ p_6'(t) &= \lambda p_5(t) - (\lambda + 2\mu) p_6(t) + 2\mu p_8(t) \\ p_7'(t) &= \lambda p_6(t) - (\lambda + 2\mu) p_7(t) \\ p_8'(t) &= \lambda p_7(t) - 2\mu p_8(t) \end{aligned}$$

٤. وبالاكتفاء على طريقة Runge – Kutta (ذات المرتبة الرابعة) ومن خلال صيغتها الرياضية التالية (٧):

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1) \\ k_3 &= hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2) \\ k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3) \end{aligned}$$

٥. تم اعداد برنامج حاسوبي من قبل الباحث وهذا البرنامج يصلح لحل كافة المعادلات التفاضلية الناتجة عن حالات الانتقال التي يسلكها اي نظام من انظمة صفوف الانتظار.

الاستنتاجات

١. يمكن الوصول الى حالة الاستقرار (steady state) بسهولة عن طريق الحلول التحليلية لبعض انظمة الانتظار سيما تلك التي يكون فيها توزيع وقت الوصول او وقت الخدمة (التوزيع الاسي) .

Exponential Distribution

ولكن عندما يكون التوزيع الاحتمالي غير اسبي فان الوصول الى حالة الاستقرار عن طريق الحلول التحليلية يكون امرا معقداً.

٢. يمكن استخدام (طريقة رونج – كوتا) في حل انظمة الانتظار التي تتوزع توزيعاً اخرأ (غير اسياً).

٣. ان استخدام طريقة (رونج – كوتا) يتطلب ايجاد عدد حالات الانتقال للنظام وايجاد مصفوفة معدل الانتقال وبالتالي المعادلات التفاضلية .

٤. البرنامج المعد من قبل الباحث يمكن استخدامه في ايجاد الحل العددي للانظمة المعقدة في صفوف الانتظار.

التوصيات

١. يمكن استخدام هذا الاسلوب في ايجاد الحل العددي لكافة انظمة الانتظار.
٢. في البحوث القادمة يمكن اجراء مقارنة ما بين الحل العددي باستخدام رونج – كوتا مع الحل التحليلي باستخدام اساليب الرياضيات الاخرى. سيما تلك البحوث الذي تتطلب دقة عالية في النتائج كالبحوث الطبية والذرية وغيرها.

" البرنامج "

```
Const lamda = : const mu =  
Dim K1 As Double , K2 As Double , K3 As Double ,K4 As  
Double  
Private Sub Command1_ Click ( )  
h =0: dh=0.00001  
Dim p(9,100) As Double  
Dim x As string  
P(1,0)=1  
For i=2 to 9:p(i ,0)=0: Next i  
For j=1 to 100  
H=hdh  
CIS  
Sum=0  
For i=1 to 9  
Select case i  
Case 1  
P(i,j) = - lamda * p(1,j-1)+mu *p(3,j-1)  
Case 2  
P(i ,j)=lamda *p(1,j-1) – lamda *p(2,j – 1)+mu * p(4,j- 1)  
Case 3  
P(i ,j)=lamda *p (2,j -1) – (lamda + mu) *p (3,j -1) +2 *mu*p  
(5,j -1)  
Case 4
```

$P(i, j) = \lambda * p(3, j - 1) - (\lambda + \mu) * p(4, j - 1) + 2 * \mu * p(6, j - 1)$

Case 5

$P(i, j) = \lambda * p(4, j - 1) - (\lambda + 2 * \mu) * p(5, j - 1) + 2 * \mu * p(7, j - 1)$

Case 6

$P(i, j) = \lambda * p(5, j - 1) - (\lambda + 2 * \mu) * p(6, j - 1) + 2 * \mu * p(8, j - 1)$

Case 7

$P(i, j) = \lambda * p(6, j - 1) - (\lambda + 2 * \mu) * p(7, j - 1)$

Case 8

$P(i, j) = \lambda * p(7, j - 1) - 2 * \mu * p(8, j - 1)$

End select

$K1 = h * p(i, j)$

$K2 = h * (p(i, j) + (K1/2))$

$K3 = h * (p(i, j) + (K2/2))$

$K4 = h * (p(i, j) + K3)$

$P(i, j) = p(i, j - 1) + (1/6) * (K1 + 2 * (K2 + K3) + K4)$

Next i

For i=1 to 9

Sum=sum +p(i, j)

Next i

Next j

Text2.Text= str (sum)

J=100

Dim pp=(100) As double, pp1 As string

For j=99 to 100

pp(0)=p(i, j)

pp1="p(0) +" str (pp(0))+chr (13)+chr (10)

1=0

For i=1 to 21

X=x+"p("+str (i)+"," +str(j)+")="+str (p(i,j))

X=x+chr(13)+chr(10)

Text1.Text=x

If i=1 then go to 50

K=K+1

Sum1=sum1+p(i, j)

If k=3 Then

i=i+1

pp(1)=sum1

```
pp1=pp1+"p("+str(1)+")="+str(pp(1))
pp1=pp1+chr(13)+chr(10)
k=0 : sum1=0
End if
50
Next i
Next j
Text3.text=pp1
End sub
```

Foreign References

1. Kleinrock, Leonard (1976) "Queueing Systems" , Vol.1 John Wiley&Sons,Inc.
2. Taha ,Hamdy A.(1997) 'Operations Research An Intoduction " , (16th edition) , Prentice – Hall . Inc .Simon &Schuster Ariacom Compony.
3. Gross ,D.& Harris, (1974) , "Fundomentials Of Queueing ,New York. Theory "
4. Dakheel ,F.I (1990) "Adecision Sujport System For Single Markovian Queueing System ',ph.D. Thesis Stage ,University Of BRAD FORD.
5. Dakheel , F ,I (1996) , " An Approach For Determing The Analytical Solution The machine Interance model ($E_K/E_L/m/n$)" College Of Education , Al – Mustansiriayah University.
6. Naseer .R-Al- Heety , Mutaz .E, (1997) "Generating The Transition Rate Matrix For Coxian Queueing Model University Rafidain College , Department Of Operations Research.
7. Curtis F.Gerald (2004) , "Applied Numerical Analysis " , (7TH edition) , prentice – Hall . Inc . Simon & Schuster Aviacom Comjany.