حول حل تقريبي لحدس رودريكث

عامر عبد الإله محمد رقية نافع بلو

كلية التربية

جامعة الموصل

تاريخ استلام البحث: ٢٠٠٥/٤/١٢ تاريخ قبول البحث: ٢٠٠٥/٥/٣٠

ABSTRACT

Rickart Theorem ensures the automatic continuity of a dense range homomorphism from a Banach algebra into a strongly Semisimple Banach algebra. Rodriguez conjecture is an extension of Rickart theorem in order to include the nonassociative algebras as follows:

Rodriguez conjecture: Every densely valued homomorphism from a complete normed nonassociative algebra into another one with zero strong radical is continuous.

There is an affirmative answer of Rodriguez conjecture in particular case of power-associative algebra's. In this work, we give an approximate solution of Rodriguez conjecture:

If A and B are complete normed nonassociative algebras and if ϕ is a dense range homomorphism from A into B such that M(A) (the multiplication algebra of A) is full and B is strongly Semisimple, then ϕ is continuous.

Finally, we give a Gelfand theorem on automatic continuity as a corollary and as an applied example of our approximate solution of Rodriguez conjecture.

الملخص

تؤكد مبرهنة ريكارت على الاستمرارية التلقائية لتشاكل ذي مستقر كثيف من جبر باناخ إلى جبر باناخ قوي شبه بسيط . وكان حدس رودريكث هو توسيع لمبرهنة ريكارت والذي ينص على:

إن كل تشاكل ذي مستقر كثيف من جبر سوي كامل ليس تجميعياً إلى آخر قوي شـــبه بسيط هو مستمر.

هناك حل إيجابي لحدس رودريكث لنوع خاص من الجبريات غير التجميعية التي تسمى بالجبريات ذات القوى التجميعية.وفي عملنا هذا قمنا بإعطاء حل تقريبي لحدس رودريكث كالآتي :

إذا كانت A و B جبريات سوية كاملة ليست تجميعية وإذا كان ϕ تشاكلاً ذا مستقر كثيف من A إلى B بحيث أن B قوية شبه بسيطة وان جبر المضروبات لـ A ((M(A)) هو مملوء. عندئذٍ ϕ مستمرة.

وفي النهاية، قدّمنا مبرهنة كيلفاند في الاستمرارية التلقائية تطبيقاً لحلنا التقريبي لحدس رودريكث.

1- مقدمة و تمهيد

في الخمسينات من القرن الماضي جاءت مبرهنة ريكارت [9 ، مبرهنة 6.18] التي تنص على أن التشاكل بين جبريات باناخ يكون مستمراً بشرط أن يكون المستقر للتشاكل كثيفاً وله الخاصية بأن يكون تقاطع المثاليات العظمى الموديولية للمستقر صفراً ، أي أن المستقر يكون قوياً شبه بسيط (Strong Semisimple) وأيضا يمكن أن نقول إن الأساس القوي (Strong Radical) للمستقر صفراً.

في كثير من البحوث حاول الباحثون تضعيف الشرط كون المستقر قوياً شبه بسيط إلى كونه شبه بسيط (Semisimple)، أي أن تقاطع المثاليات العظمى للمستقر يكون صفراً وأيضا يمكن أن نقول أن الأساس (Radical) للمستقر صفراً، وتحولّت فكرة تضعيف الشرط إلى مسألة مفتوحة وعلى ما يبدو إلى حد الآن لم يجدوا لها حلاً راجع [5] ، [10] والمسألة هي :

إذا كان كل من A و B جبر باناخ وان $\phi:A\to B$ هو تشاكل ذو مستقر كثيف بحيث ان B شبه بسيطة. عندئذ ϕ مستمرة.

استطاع جونسون في عام 1967 في بحثه [4] أن يعطي حلاً جزئياً للمسألة أعلاه وكالآتي :

إذا كان كل من A و B جبر باناخ وان $\phi: A\to B$ هو تشاكل شامل بحيث أن B شبه بسيطة . عندئذٍ ϕ مستمرة .

ومنذ ذلك التاريخ فان أكثر بحوث الاستمرارية التلقائية كانت تستنبط أفكارها وحلولها من مبرهنتي ريكارت وجونسون راجع [5]، [9]، الاتجاهات البحثية أعلاه كلها لجبريات سوية كاملة تجميعية وكما هو معروف لدى الباحثين فان هناك حقلاً كبيراً وغنياً جداً وهو الجبريات

السوية الكاملة غير التجميعية وهنا يتبلور السؤال وهو هل للاستمرارية التلقائية للتطبيقات الخطية حلول أو تطبيقات في جبريات ليست بالضرورة تجميعية ؟ والجواب نعم ونذكر للقارئ أهم تلك البحوث التي أحدثت قفــزة نوعية في هذا الاتجاه وهما [1] ، [6]. الطريقة في الحصول علـــى الاستمرارية التلقائية لتطبيقات خطية معينة [مثل تشاكل أو اشتقاق] في جبريات سوية كاملة ليست بالضرورة تجميعية تختلف عن ما هو مألوف في الطرق التجميعية.

قدم رودريكث في عام 1991 من خـــلال بحثه [7 ، حدس 7.1] حدسه حول مبرهنة ريكارت ومحوره هو هل تصح مبرهنة ريكارت في حالة كون الجبريـــات ليـــست بالـــضرورة تجميعية ؟ أي أن التشاكل بين جبريات سوية كاملة (ليست بالضرورة تجميعية) يكون مـــستمراً بشرط أن يكون المستقر للتشاكل كثيفاً وله الخاصية بان يكون تقاطع المثاليات العظمى الموديولية للمستقر صفراً (أي أن المستقر يكون قوياً شبه بسيط) والذي لم يحل إلى حد الآن ، ولكن يوجد حل لحدس رودريكث لنوع خاص من الجبريات غير التجميعية التي تدعى بجبريات ذات قـــوى تجميعية انظر المصدر [7 ، مبرهنة 7.3]. ونحن في هذا البحث، قدمنا حـــلاً تقريبيـــاً لحـــدس رودريكث كالأتي :

التشاكل بين جبريات سوية كاملة (ليست بالضرورة تجميعية) يكون مستمراً بشرط أن يكون المستقر للتشاكل كثيفاً وله الخاصية بأن يكون تقاطع المثاليات العظمى الموديولية للمستقر صفراً وان جبر المضروبات للمنطلق هو مملوء بمعنى أن جبر المضروبات يحتوي على عناصر شبه معكوسة لعناصره التي هي عناصر شبه معكوسة في جبر باناخ لجميع المؤثرات الخطيـــة المستمرة على المنطلق .

نذكر القارئ بالمصطلحات والتعاريف والمبرهنات الضرورية لإثبات مبرهنتا الأساسية (الحل التقريبي لحدس رودريكث). ويمكن الرجوع إلى المصادر [3] ، [5]، [6]، [8]، [9] لمزيد من التفاصيل.

إذا كان $\|.\|$ معياراً على الجبر A. واذا كان

$$\|ab\| \le \|a\| \, \|b\|$$

لكل $a , b \in A$. فان $(A , \|.\|)$ يسمى بالجبر المعياري وان المعيار $\|.\|$ يسمى بالمعيـــار الجبري، يقال بان $(A , \|.\|)$ جبر باناخ إذا كان جبراً سوياً كاملاً.

1-1 مبرهنة البيان المغلق

لتكن X و Y فضاءات باناخ وليكن T: X→ Y تطبيقاً خطياً ، فان G(T) مغلــق إذا وفقط إذا كان التطبيق T مستمراً .

2-1 قضــية [5]

لتكن A و B جبريات سوية (كاملة). إذا كان $\phi : A \to B$ تشاكلاً ذا مــستقر كثيــف، عندئذٍ $S(\phi)$ تكون مثالية مغلقة لــ B .

البرهان :

حسب القضية (لتكن X و Y فضاءات سوية . إذا كان T:X→Y تطبيقاً خطياً، عندئذٍ فضاء الانفصال لــT يكون فضاءً جزئياً مغلقاً لــ Y) ، $S(\phi)$ هو فضاء جزئي مغلق لــ B. لذا فإننا سنثبت أولاً بأنه إذا كانت $a \in A$ و $b \in S(\phi)$ فان $b\phi(a) \in S(\phi)$ و $\phi(a)b$.

بما أن $b \in S(\phi)$ ، فيوجد لدينا $\{a_n\} \subseteq A$ بحيث أن $a_n \to 0\}$ و $\{\phi(a_n) \to b\}$. فان

$$\{aa_n\} \to 0 \text{ and } \{\phi(aa_n)\} = \phi(a)\{\phi(a_n)\} \to \phi(a)b \Rightarrow \phi(a)b \in S(\phi).$$

ϕ تشاكل

$$\{a_n a\} \to 0 \text{ and } \{\phi(a_n a)\} = \{\phi(a_n)\}\phi(a\ ) \to b\phi(a) \Rightarrow b\phi(a) \in S(\phi).$$

والآن ، نثبت بأنه إذا كانت $b \in S(\phi)$ و $c \in B$ فان $bc, cb \in S(\phi)$

وحسب الفرضــية لدينا $\overline{\phi(A)} = B$ عندئذٍ يوجد $\{a_n\} \subseteq A$ بحيث ان $\{\phi(a_n) \to c\}$.

من خلال الجزء الأول من البرهان لدينا لكل $n \in IN$ فان $b\phi(a_n) \in S(\phi)$ و $\phi(a_n)b$

لكن

$$cb = \lim_{n\to\infty} \phi(a_n)b \text{ and } bc = \lim_{n\to\infty} b\phi(a_n)$$

تنتمي إلى $\overline{S(\phi)}$

بما أن $\overline{S(\phi)} = S(\phi)$ من القضية (لتكن X و Y فضاءات سوية . إذا كان T:X→Y تطبيقاً خطياً، يكون عندئذٍ فضاء الانفصال لــT فضاءً جزئياً مغلقاً لــ Y)

فان $bc, cb \in S(\phi)$. **n**

3-1 مبرهنة ريكارت

ليكن كل من A و B جبريات باناخ وان $\phi: A \to B$ تشاكل ذا مستقر كثيف بحيث أن B قوية شبه بسيطة. عندئذٍ ϕ مستمرة .

البرهان : راجع [9 ، مبرهنة 6.18]

4-1 قضية

إذا كانت A و B جبريات سوية كاملة و ϕ تشاكل ذا مستقر كثيف بحيث أن B قوية شبه بسيطة. عندئذ تكونB بسيطة تحتوي على العنصر المحايد.

البرهان : راجع [9]

أيضا لعرض المبرهنة القادمة نحتاج إلى توضيح بعض المصطلحات وهو إذا كان A جبراً نرمز لـ L(A) بالجبر التجميعي لجميع المؤثرات الخطية من A إلى A . نعرّف جبر المضروبات لـ A ونرمز له بالرمز M(A) على انه الجبر الجزئي من L(A) مولّد بالمؤثرات الخطية الآتية:

$$L_a, R_a, Id_A$$

حيث

$$L_a : A \to A$$
$$x \ \mathbf{a} \ L_a(x) = ax$$
$$R_a : A \to A$$
$$x \ \mathbf{a} \ R_a(x) = xa$$
$$Id_A : A \to A$$
$$x \ \mathbf{a} \ Id_A(x) = x$$

5-1 قضية

ليكن A و B جبريات سوية ، وليكن $f : A \to B$ تشاكلاً ذا مستقر كثيف. عندئذٍ

$$\hat{f} : M(A) \to M(B)$$

تشاكل ذو مستقر كثيف على وفق العلاقة

$$f \ \mathbf{o} F = \hat{f}(F) \mathbf{o} f \qquad \forall F \in M(A) \qquad \ldots\ldots(1)$$

البرهان : انظر [7]

و نذكر القارئ بأنه إذا كان A جبراً ، المثالية المعدومة لـــ A ويرمز لها بـــالرمز Ann(A) تعرف كالأتي :

$Ann(A) = \{a \in A : L_a = R_a = 0\}$

وإذا كان A جبرا و X فضاءً خطيا. يقال بان X هو A- مود يل يساري غير قابل للاختزال إذا تحققت الشروط الآتية :

1- $AX \neq 0$

2- أي A- موديل جزئي يساري لـــ X هو اما $\{0\}$ او X

6-1 قضية [3]

إذا كان A جبراً غير تجميعي، عندئذٍ A بسيطة إذا وفقط إذا كان M(A) جبراً جزئيـــاً غير قابل للاختزال من L(A) .

<u>البرهان</u> :

نفرض أن A بسيطة وسوف نثبت أن M(A) هو جبر جزئي غيـــر قابـــل للاختـــزال من L(A). اي ان نثبت

1- $M(A)(A) \neq 0$

2- M(A)- موديل جزئي يساري لـــ A هو إما $\{0$ أو A .

بما أن $A^2 \neq 0$ يوجد $x \in A\backslash\{0\}$ بحيث $L_x \neq 0$ وهذا يؤدي إلى $M(A) \neq 0$ وأيضا كنتيجة $M(A)(A) \neq 0$.

أيضاً الفضاءات الجزئية من A التي هي M(A)-موديل يساري لـــ A هي بالضـــبط المـــثاليات لـــ A ولمـــعرفـــة ذلك، لكل $x \in M(A)(A)$ و $a \in A$ نحصل على :

$$xa = R_a(x) = R_a(F(z))$$

(حيث إن $x = F(z)$ لبعض $z \in A$ و $F \in M(A)$)

$= (R_a \circ F)(z) \in M(A)(A)$ (لأن $(R_a \circ F)$ تنتمي إلى $M(A)$)

وبنفس الطريقة نثبت أن $ax \in M(A)(A)$ وبما أن $M(A)(A)$ هو فضاء جزئي من A مـــن التعريف فهذا يثبت أن $M(A)(A)$ هي مثالية لـــ A ولكن A بسيطة وهذا يؤدي إلى:

$$M(A)(A) = A \text{ or } \{0\}$$

وهذا يعني أن M(A) هو جبر جزئي غير قابل للاختزال من L(A) .

وبالعكس ، نفرض أن M(A) هو جبر جزئي غير قابل للاختزال من L(A) وســـوف نبرهن أن A بسيطة وهذا واضح من التعريف .

7-1 قضية

إذا كان f تشـــاكلاً ذا مستقر كثيف من جبر سوي A إلى جبر سوي بسيط B ، عندئذٍ

$$S(\hat{f}) = \{0\} \text{ or } M(B)$$

البرهان :

حسب القضية (1-2) نحصل على $S(\phi)$ هي مثالية لـــ B . وبما أن B بسيطة فان

$$S(\hat{f}) = \{0\} \text{ or } B$$

إذا كان $S(\phi) = \{0\}$ حسب القضية (*إذا كان f تشاكل ذا مستقر كثيف بين جبريـــات غير تجميعية سوية A و B) وان $Ann(B) = \{0\}$ ، فان*

$$S(f) = \{0\} \Leftrightarrow S(\hat{f}) = \{0\})$$

فان $S(\hat{\phi}) = \{0\}$.

الآن ، نفرض أن $S(\phi)=B$ و $S(\hat{\phi}) \neq \{0\}$. عندئذٍ $S(\hat{\phi})$ هي مثالية غير صفرية من جبر جزئي غير قابل للاختزال $M(B)$ (قضية (٦-١)) .

عليه فإن $S(\hat{\phi})$ أيضاً يكون جبراً جزئياً غير قابل للاختزال من $M(B)$ (السبب لأنها أصغر من $M(B)$) وعليه نستنتج

$$S(\hat{\phi})(B) = \{0\} \text{ or } B$$

(من تعريف الجبر غير القابل للاختزال)

إذا كان $S(\hat{\phi})(B) = 0$

فان $S(\hat{\phi}) = \{0\}$

وهذا تناقض ، إذاً يجب أن يكون $S(\hat{\phi})(B) = B = S(\phi)$

وهذا يؤدي إلى

$$L_x, R_x \in S(\hat{\phi}) \quad (x \in B)$$

لذا فان

$$S(\hat{\phi}) = M(B) .$$

2- النتائج الأساسية Fundamental Results

سوف نقدم هذه الفقرة حلاً تقريبياً لمبرهنة ريكارت في صيغتها غير التجميعية (حدس رودريكث). بعد أن استعرضنا جميع النتائج الضرورية لهدفنا الذي هو تقديم حل كلي أو جزئي لحدس رودريكث نستطيع الآن أن نعطي حلّنا لهذه المسألة ونحتاج لذلك إلى التعريف الآتي:

ليكن A جبراً ، نرمز إلى BL(A) على انه جبر باناخ لجميع المؤثرات الخطية المستمرة من A إلى A . يقال بأن جبر المضروبات لـ A (M(A)) بأنه مملوء (full) من BL(A) إذا وفقط إذا كان M(A) يحتوي على العناصر شبه المعكوسة لعناصره والتي هي عناصر شبه انعكاسية في BL(A).

1-2 الحل التقريبي لحدس رودريكث

لتكن A و B جبريات سوية كاملة وليكن $\phi:A\to B$ تشاكلاً ذا مستقر كثيف بحيث أن B قوية شبه بسيطة وان جبر المضروبات لـ A (M(A)) هو مملوء. عندئذٍ ϕ مستمرة.

البرهان :

إذا كان A و B جبريات تجميعية سوية كاملة فان ϕ مستمرة (راجع مبرهنة ريكارت في (1-3)).

الآن نفرض ان A و B جبريات غير تجميعية سوية كاملة، حسب (القضية (1-4)) إذا كانت B قوية شبه بسيطة فإنها تؤول إلى بسيطة ذات عنصر محايد حيث أن البرهان لا يحتاج إلى كون A و B تجميعية. تأمل

$$\hat{f}: M(A) \to M(B)$$

التشاكل ذو المستقر الكثيف الحاصل من العلاقة الآتية :

$$\phi \mathbf{o} F = \hat{\phi}(F) \mathbf{o}\, \phi \qquad \forall F \in M(A)$$ (حسب القضية (1-5))

الان، لكل $F \in M(A)$ وباتباع الطريقة الكلاسيكية في برهان مبرهنة ريكارت باعتبار أن $\hat{\phi}(F)$ و $(Id_B - \hat{\phi}(F))$ عناصر تبديلية، نحصل على :

$$\begin{aligned} I = r(Id_B) &= r(Id_B - \hat{\phi}(F) + \hat{\phi}(F)) \\ &\le r(Id_B - \hat{\phi}(F)) + r(\hat{\phi}(F)) \\ &\le \|Id_B - \hat{\phi}(F)\| + r(\hat{\phi}(F)) \qquad .....(2) \end{aligned}$$

لاحظ أن

$$r(\hat{\phi}(F)) \le \rho_{M(B)}(\hat{\phi}(F)) \le \rho_{M(A)}(F) \qquad .....(3)$$

والآن فرضية كون M(A) جبراً جزئياً مملوءاً من BL(A) لعناصر M(A) والتي هي عناصر شبه انعكاسية في BL(A) تؤدي دوراً وتسمح لنا هذه الفرضية بكتابة الآتي:

$$\rho_{M(A)}(F) = \rho_{BL(A)}(F)$$

ولكن BL(A) كاملة مما يدعنا إلى إضافة

$$\rho_{BL(A)}(F) = r(F) \le \|F\| \qquad ....(4)$$

حيث أن $\rho_{BL(A)}(F) = r(F)$

وان $r(F) \le \|F\|$

أضف معلومات المعادلة (2) مع المعادلة (3) والمعادلة (4) نحصل على

$$1 \le \|Id_B - \hat{\phi}(F)\| + \|F\| \quad \forall F \in M(A) \qquad ...(5)$$

إذا كان $S(\phi)=B$ فانه حسب برهان قضية (1-7) نحصل على $S(\hat{\phi}) = M(B)$ وهذا يعني أن $Id_B \in S(\hat{\phi})$ وهذا يؤدي إلى وجود متتابعة $\{F_n\} \subseteq M(A)$ بحيث أن $F_n\} \to 0\}$ و $\hat{\phi}(\{F_n\}) \to Id_B$ وبوضع المتتابعة $\{F_n\}$ في العلاقة (5) وأخذ الغاية نحصل على تناقض، ومبرهنة لذلك يجب أن يكون $S(\phi) = \{0\}$ وحسب مبرهنة البيان المغلق نحصل على أن تكون ϕ مستمرة . وبهذا ينتهي البرهان .

2-2 تطبيق للحل التقريبي لحدس رودريكث

بعد أن حصلنا على الحل التقريبي لحدس رودريكث في الفقرة السابقة فإننا مازلنا بحاجة إلى مثال تطبيقي يدعم المبرهنة التي توصلنا إليها . الحقيقة شرطنا الإضافي لحدس رودريكث باعتبار جبر المضروبات مملوء هو مألوف ومتداول في كثير من المبرهنات والقضايا راجع [6] . ومثالنا هو مبرهنة كيلفاند في الاستمرارية التلقائية (Gelfand Theorem on Automatic Continuity) راجع [3] .

مبرهنة كيلفاند في الاستمرارية التلقائية

ليكن كل من A و B جبر باناخ تبديلي وليكن ϕ تشاكل من A الى B بحيث ان B شبه بسيطة . عندئذٍ ϕ مستمرة .

البرهان :

لا يوجد فقدان في العمومية إذا فرضنا أن ϕ لها مستقر كثيف والسبب في ذلك لأنه إذا أبدلنا B بالجبر الجزئي المغلق $\overline{\phi(A)}$ من B فان $\overline{\phi(A)}$ تبقى جبر باناخ تبديلي لأن التشاكل ينقل الصفات من المنطلق إلى المستقر أي إذا كانت A تجميعية فان $\overline{\phi(A)}$ أيضاً تكون تجميعية وإذا كانت A تبديلية فان $\overline{\phi(A)}$ أيضاً تكون تبديلية . فضلاً عن ذلك فإن $\overline{\phi(A)}$ تكون أيضاً شبه بسيطة لأنه في جبر باناخ التبديلي $\overline{\phi(A)}$ يكون الأساس (Rad ($\overline{\phi(A)}$)) عبارة عن العناصر التي يكون لها نصف القطر الطيفي صفراً راجع [3] . مما سبق نستطيع أن نفرض أن كل من A و B تكون جبر باناخ تبديلي وأن ϕ تشاكل من A إلى B ذا مستقر كثيف . الآن كي تكون هذه المبرهنة حالة خاصة من المبرهنة التي حصلنا عليها مبرهنة(1) علينا إثبات:

i) $\mathrm{Rad}(B) = S - \mathrm{Rad}(B)$.

ii) M(A) هو جبر المضروبات مملوء من BL(A) .

الحقيقة الفرع (i) واضح جداً لأن B جبر باناخ تبديلي وعليه يبقى برهان الفرع (ii) . نفرض أن $a \in A$ وان L_a هو شبه انعكاسي في $M(A) \subseteq BL(A)$ وله شبه النظير $T \in BL(A)$. عندئذٍ نحصل على ان a هو شبه معكوس في A وله شبه النظير

$b = T(a)-a$

ومنها نستنتج أن $T = L_b$ لأن T هو شبه النظير وحيد لـ L_a ولأن التطبيق

$$\psi : A \to BL(A)$$

$$x \ \mathbf{a} \ y \ (x) = L_x = R_x$$

هو تشاكل من A إلى BL(A) . الآن من الواضح جداً أن $FM(A)=\{L_a : a \in A\}$ ، أي أن M(A) تحوي شبه المعكوسات لعناصرها التي تنتمي إلى BL(A) وبذلك تكون مملوءة . وبهذا ينتهي البرهان .

المصادر

[1] Aupetit, B. "The Uniqueness of the complete norm topology in Banach algebras and and Banach Jordan algebras" J. Funct. Anal. 47(1982), 1-6.

[2] Berberian, S. K. "Lectures in functional analysis and operator theory" Springer-Verlay, New York (1974).

[3] Bonsall, F. F., Duncan, J. "Complete normed algebras" Spriger-Verlage, Berlin Heidelbreg New York (1973).

[4] Johnson, B. E. "The uniqueness of the (complete) norm topology" Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 537-539.

[5] Palmer, T. W. "Banach algebras and the general theory of algebras" Cambridge University Press (1994).

[6] Rodriguez, A. "The uniqueness of the complete norm topology in complete normed nonassociative algebras" J. Funct. Anal. 60(1985), 1-15.

[7] Rodriguez, A. "An approach to Jordan-Banach algebras from the theory of nonassociative complete normed algebras" Ann. Sci. Univ. Clermont Ferrand II, Math., 27(1991), 1-57 .

[8] Rodriguez, A. "Continuity of densely valued homomorphism into H^*-algebras" Quart. J. Math. Oxford (2), 46 (1995), 107-118.

[9] Sinclair, A. M. "Automatic continuity of linear operators" London Math. Soc. Letc. Notes series 21, Cambridge University Press (1976).

[10] Villena, A. R. "Automatic continuity in associative and nonassociative context" Irish Math. Soc.Bulletm, 46(2001), 43-76.