تحليل الإستقرارية للحلول اللازمنية لمعادلة Sine-Gordon

سعد عبد الله مناع **نورجان حسن جمعة**

كلية علوم الحاسبات والرياضيات

جامعة الموصل

تاريخ استلام البحث:٢٠٠٦/١/٢٦ **تاريخ قبول البحث:٢٠٠٦/٤/٢**

ABSTRACT

The stability analysis of steady state solutions of Sine–Gordon equation using Fourier mode stability analysis in two cases has been considered : Firstly when the amplitude is constant and secondly when the amplitude is variable in the two cases the results were found to be : The steady state solutions $\mathbf{u_1} = \mp p, \mp 3p, \mp 5p, \ldots$ and $\mathbf{u_1} = \mathbf{u_1}(X)\ , -1 \pounds X \pounds 1$ are unconditionally stable . In the second case the comparison between the analytical solution and the numerical solution of Galerkin technique has been done . This comparison showed that the analytical solution and the numerical solution of Galerkin technique are the same .

الملخص

لقد تمت دراسة استقرارية الحلول اللازمنية لمعادلة Sine–Gordon باستخدام طريقة تحليل الإستقرارية من النمط Fourierفي حالتين : الأولى في حالة كون السعة ثابتة،والثانية في حالة كون السعة متغيرة إذ تم استخدام طريقة Galerkin العددية مع الحل التحليلي في هذه الحالة . وقد تبين في كلتا الحالتين أن الحلين اللازمنيين $\mathbf{u_1} = \mp p, \mp 3p, \mp 5p, \ldots$ و $\mathbf{u_1} = \mathbf{u_1}(X), -1 \pounds X \pounds 1$ مستقران بصورة مشروطة كما تمت في الحالة الثانية مقارنة النتائج التحليلية لدراسة الإستقرارية بالحل العددي لطريقةGalerkin ، وقد تم الحصول على النتائج نفسها .

1. المقدمة Introduction

يعد مفهوم الإستقرارية من المفاهيم المهمة جداً في الرياضيات والعلوم التطبيقية ومن الأمثلة الشائعة على هذا المفهوم هو مسألة دراسة حركة نمو السكان(Dynamics of Population Growth) فإذا كان حجم المجتمع السكاني في زمن معين يزداد بمعدل يتناسب مع عدد الأفراد في ذلك المجتمع، إذ أن حجم السكان لا يمكن أن يزداد بصورة آسية لكل الوقت

وفي النهاية فان التنافس على الغذاء والموارد الطبيعية والمكان فضلا عن عوامل أخرى سوف يحدد النمو في حجم السكان،إن من المميزات المهمة لمفهوم الإستقرارية هو انه يمكننا من دراسة خواص الحل دون الحاجة إلى حل النظام أو معرفة الحل إذ أن الكثير من المسائل ليس لها حل مضبوط وكذلك فإن دراسة تحليل الإستقرارية يدرس السلوك طويل الأمد(Long Time Behavior) للحل في أية منظومة يمكن أن تتعرض إلى تأثيرات خارجية(إزعاجات) (Disturbances) وفي هذه الحالة من الممكن أن لا تعود المنظومة إلى حالتها الاعتيادية فيكون النظام غير مستقر،أو تعود إلى حالتها الاعتيادية فيكون النظام مستقرا [10]،وضع معادلة-Sine Gordon العالمانFrenkel and Kontorova في عام(1939) في فيزياء الحالة الصلبة،والتي تستخدم لنمذجة التشققات في البلورة.قدم Mclaughlin and Scott في عام(1978)[13] طريقة ذات مرحلتين لدراسة الازعاجات التركيبية للمعادلةSine-Gordon،إذ قاما بحساب التعديلات البطيئة في السرع والمواقع لمركبات الموجة المنفردة وحساب الإشعاع الناتج من تعجيل الموجات المنفردة من خلال دالةGreenالمشعة.استخدم Wei عام(2000)[17] خوارزمية الالتفاف المتقطع لحل معادلة Sine–Gordon إذ وجد أن القيم الابتدائية عندما تكون قريبة من قيم معينة من الممكن أن تسبب بعض المشاكل العددية مثل الفوضى الزمانية والمكانية المحتثة عدديا ً إذ توصل إلى أن هذه الخوارزمية جيدة الأداء فيما يخص الدقة والكفاية والبساطة والاستقرارية.قدم كل من Davidson and Mottram في عام(2002)[5]نموذجاً لدراسة تحول المسار في جهاز مكون من بلورات السائل النيماتيكي ثنائي الإستقرارية.اشتق كل من Mandula and Bugaychuk في عام(2003)[12]معادلةSine–Gordon لوصف الزيغ الذاتي الموجي (–Self Wave Diffraction) وتفاعلات المادة الموجية اللاخطية وانتشار الموجات المنفردة.إذ حصلا على الحل اللازمني،إذ قاما بدراسة نظرية لتوضيح إمكانية السيطرة على عرض والموقع الأقصى للموجة المنفردة في الحالة اللازمنية. أعطى كل من D’Anna , Angelis and Fiore في عام(2005)[4] البراهين على وجود حلول الموجة المنتقلة (المنفردة) لمعادلة Sine–Gordon المشوشة على خط مستقيم أو دائرة وقد قاموا كذلك بتصنيف هذه الحلول إذ بينوا التشويش(Perturbation) للمعادلة يتكون من حد قسري وحد مشتت خطياً.في هذا البحث ستتم دراسة استقرارية الحلول اللازمنية لمعادلةSine–Gordon باستخدام طريقة تحليل الإستقرارية من النمطFourier في حالتين:الأولى في حالة كون السعة ثابتة،والثانية في حالة كون السعة متغيرة مع استخدام طريقة Galerkin العددية في هذه الحالة ومن ثم مقارنتها مع الحل التحليلي للسعة.

2. النموذج الرياضي The Mathematical Model

إن من معادلات الموجة اللاخطية الأكثر شيوعاً وشهرة هي معادلة Klein – Gordon [9]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - d^2 \Delta u + f(u) = 0 \qquad (1)$$

إذ هي واحدة من أهم التوسيعات اللاخطية لمعادلة الموجة التي تصف الاهتـــزاز,اذ أن dهي سرعة الموجة وان كثافة قوة المرونة(Elastic Force Density) توصف بوساطة الدالـــة $\mathbf{f(u)}$ إذ عندما تكون $\mathbf{f(u)} = \mathbf{gu}$ فأن المعادلة (1) سوف تتحول إلى معادلة Klein–Gordon الخطية إذ هي النموذج الأكثر بساطة للمعادلات التي تصف الموجات الخطية المبـــددة طبيعيـــاً (Normally Dispersive Linear Waves) والاهتزازات لوتر يقع على قاعدة مرنـــة خطيـــة فضلا عن عمليات أخرى :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - d^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + gu = 0$$

إذا كانت $\mathbf{g = 0}$ فان معادلة Klein – Gordon سوف تتحول إلى معادلة الموجـــة التقليديـــة ، وعندما تكون $\mathbf{f(u)} = \mathbf{\sin u}$ فان المعادلة (1) سوف تتحول إلى معادلة Sine–Gordon [9] .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - d^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sin u \qquad (2)$$

أو [6] :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sin u \qquad (3)$$

مع الشروط الابتدائية والشروط الحدودية

$$u(x,0) = p + e_o \cos(mx) \ , \ u_t(x,0) = 0$$

$$m = 2p / L \ , \ L = 2\sqrt{2}p \ , \ 0 \le e_o \le 1000 \ , \ -L \le x \le L$$

$$u(-L,t) = u(L,t) = b$$

حيث أن b ثابت ،وضع المعادلة (1) العالمان Klein and Gordon في العشرينات كنمـــوذج لمعادلة الموجة التي تـــسمى Klein–Gordon اللاخطيـــة، إن أول مـــن أطلـــق اســـم Sine–Gordonعلى المعادلة (3) العالم Kruskal ،إذ أن $\mathbf{u(x,t)}$ تمثل إزاحة الذرات باتجاه المحور x وان دالة الـــ sine تمثل دورة الشبكة البلورية.ان المعادلة (3) جذبت اهتمام علماء الرياضيات والفيزياء بسبب انتشارها الواسع كنموذج للظواهر الفيزيائية اللاخطية وحركـــة محفـــزات الـــــ DNA [14].ونتجت المعادلة (3) خلال فترة الستينيات في مدى واسع من المسائل التي تتضمن

البصريات اللاخطية[15].إن من أهم تطبيقات المعادلة (3) هي دراسة تأثيرات السلسلة الوراثية في انتشار الإثارات اللاخطية في النماذج البسيطة لسلسلة الـــ DNA[3].

إن معادلة

(MKdV–Sine Gordon) Modified Korteweg de Vries-Sine Gordon Equation

تتحول إلى معادلة Sine–Gordon عندما تكون($A=0, B=-1$):

$$u_{xt} + A\left(\frac{2}{3}u_x^2 u_{xx} + u_{xxxx}\right) = B\sin u \qquad (4)$$

إذ أن $u_{xt} = u_{xx} - u_{tt}$ باستخدام طريقة تحويل المتغير المعتمد [8] التي تؤدي إلى:

$$u_{xx} - u_{tt} + A\left(\frac{2}{3}u_x^2 u_{xx} + u_{xxxx}\right) = B\sin u \qquad (5)$$

ان المعادلة(4)درسها Chen في عام(2000)[2].لتحويل المعادلة(2)إلى الحالة اللابعدية في t, x فإننا نحتاج إلى التحويلات الآتية [16]:

$$X = \frac{x}{L} \quad , \quad T = d\frac{t}{L}$$

وباستخدام هذه التحويلات نحصل على :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial T^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - N^2 \sin u \qquad (6)$$

إذ أن $N^2 = L^2 / d^2$

$$u(-1,T) = u(1,T) = b \quad , \quad -1 \le X \le 1$$

المعادلة (6) تمثل الصيغة اللابعدية لمعادلة Sine–Gordon .

3. تحليل الإستقرارية من النمط Fourier لمعادلة Sine–Gordon

3.1. تحليل الإستقرارية في حالة السعة الثابتة

إن الفكرة الأساسية لهذه الطريقة هي افتراض الحل على الشكل الآتي [10] :

$$u(X,T) = u_1(X) + u_2(X,T) \qquad (7)$$

إذ يمثل $u_1(X)$ الحل اللازمني(الحل الذي لا يعتمد على الـــزمن t)للمعادلـــة(6)،فـــي حـــين يمثل $u_2(X,T)$ الإزعاج الذي يعانيه النظام .

$$u_2(X,T) = Ae^{k(iX+cT)} \qquad (8)$$

$$A>0 \ , \ k>0 \ , \ c = c_1 + ic_2 \ , \ i = \sqrt{-1}$$

إذ أنA تمثل سعة الموجة،k تمثل العدد الموجي،cهي سرعة الموجة وهي ذات قيمة معقدة،إن القيمة الموجبة أو السالبة لـ c_1 هي التي تحدد حالة الاستقرار أو عدم الاستقرار،ففي حالة $c_1 > 0$ يزداد الإزعاج أو التشويش (Perturbation) بمرور الزمن،وان الحل غير مستقر في هذه الحالة وعندما $c_1 < 0$ فان الإزعاج يتلاشى مع مرور الزمن وان الحل مستقر في هذه الحالة.أما الحالة $c_1 = 0$ فهي تعطي منحني الإستقرارية المتعادلة(Neutral Stability Curve) وهو المنحني الذي يفصل بين المنطقة المستقرة والمنطقة غير المستقرة،وبتعويض المعادلة(7) في المعادلة(6) نحصل على:

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial T^2} = \frac{d^2 u_1}{dX^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial X^2} - N^2 \sin(u_1 + u_2) \qquad (9)$$

من المعادلة (9) نحصل على :

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial T^2} = \frac{d^2 u_1}{dX^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial X^2} - N^2(\sin u_1 \cos u_2 + \cos u_1 \sin u_2) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial T^2} = \frac{d^2 u_1}{dX^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial X^2} - N^2 \sin u_1 - N^2 u_2 \cos u_1 \qquad (10)$$

وبفصل الحالتين الزمنية واللازمنية نحصل على :

$$\frac{d^2 u_1}{dX^2} - N^2 \sin u_1 = 0 \qquad (11)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial T^2} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial X^2} - N^2 u_2 \cos u_1 \qquad (12)$$

إن الحل اللازمني للمعادلة(11) هو حل معقد،يكون على شكل عائلة من الحلول التي تكون على شكل (Jacobi Elliptic Function) وإن هذه العائلة من الحلول التي تكون بالشكل الآتي [15] :

$$\sqrt{b^2 - w^2} \int_{\tilde{u}}^{\tilde{u}} \frac{dy}{\sqrt{2(M - \cos y)}} = q \qquad , \; M > 0 \; , \; |v| < 1$$

إذ أن q هي متغير الموجة المنتقلة والذي يكون على الشكل الآتي: $q = wt - bx$, $v = w/b$ سرعة الموجة وM يمثل ثابت التكامل الأول و $\tilde{u}$ تمثل

دالة متزايدة رتيبة لـ q.إن التكامل المذكور انفا هو من النوع Elliptic Integral،وان الـ(Jacobi Elliptic Function) تمثل معكوس هذا التكامل.
ولصعوبة هذا الحل وتعقيده فإننا نلجأ إلى(Linearized Stability Analysis)[7] إذ من المعادلة(11) نحصل على المعادلة الآتية :

$$\frac{d^2u_1}{dX^2} - N^2u_1 = 0 \qquad (13)$$
$$u_1(-1) = u_1(1) = b \quad , \quad -1 \le X \le 1$$

إن المعادلة(12) تمثل الحالة الزمنية في حين تمثل المعادلة(11)الحالة اللازمنية،إن المعادلة(13)هي معادلة تفاضلية اعتيادية خطية متجانسة ،وان الحل العام لهذه المعادلة هو :

$$u_1(X) = B\cosh NX + C\sinh NX \qquad (14)$$

إذ أن C,B ثوابت اختيارية،وبتعويض الشروط الحدودية في المعادلة (14) نحصل على :

$$B\cosh N - C\sinh N = b$$
$$B\cosh N + C\sinh N = b$$

وبالتعويض عن C , B في الحل العام نحصل على :

$$u_1(X) = (b/\cosh N)\cosh NX \qquad (15)$$

إن المعادلة(15) تمثل الحل اللازمني لمعادلة Sine–Gordon،وبتعويض المعادلة (8) في المعادلة(12) نحصل على :

$$k^2c^2Ae^{k(iX+cT)} = -k^2Ae^{k(iX+cT)} - N^2\cos u_1 Ae^{k(iX+cT)} \Rightarrow$$
$$c^2 = \frac{-(k^2 + N^2\cos u_1)}{k^2} \Rightarrow$$
$$(c_1 + ic_2)^2 = \frac{-(k^2 + N^2\cos u_1)}{k^2} \Rightarrow$$
$$c_1 + ic_2 = \mp\sqrt{\frac{-(k^2 + N^2\cos u_1)}{k^2}}$$

وبمساواة الجزأين الحقيقي والخيالي نحصل على :

$$c_1 = \mp\sqrt{\frac{-(k^2 + N^2\cos u_1)}{k^2}} \qquad (16)$$
$$c_2 = 0$$

1- إذا كان :

$$c_1 = \sqrt{\frac{-\left(k^2 + N^2 \cos u_1\right)}{k^2}} \qquad (17)$$

إذا كان $N^2 \cos u_1 \le -k^2$, $\cos u_1 < 0$ نفرض أن $\cos u_1 = -f(u_1)$, $f(u_1) > 0$ فان :

$$c_1 = \sqrt{\frac{-\left(k^2 - N^2 f(u_1)\right)}{k^2}} \qquad (18)$$

إذ أن $k^2 \le N^2 f(u_1)$ وفي هذه الحالة توجد لدينا الحالتان الآتيتان :

a) إذا كان $k^2 < N^2 f(u_1)$ فان $c_1 > 0$ وان الحل غير مستقر في هذه الحالة .

b) إذا كان $k^2 = N^2 f(u_1)$ فان $c_1 = 0$ والتي تمثل منحني الإستقرارية المتعادلة .

$$k = \sqrt{N^2 f(u_1)} \qquad (19)$$

والآن سوف يتم تطبيق النتائج في أعلاه على الحالتين الآتيتين :

a) عندما $u_1 = \mp p, \mp 3p, \mp 5p, \ldots$ ، وبالتعويض عن هذه القيم في المعادلة (17) نحصل على :

$$c_1 = \sqrt{\frac{-\left(k^2 - N^2\right)}{k^2}}$$

إذ أن $k^2 \le N^2$

i) إذا كان $k^2 < N^2$ فان $c_1 > 0$ وان الحل غير مستقر في هذه الحالة .

ii) إذا كان $k^2 = N^2$ فان $c_1 = 0$ التي تعطي منحني الإستقرارية المتعادلة .

$$k = N \qquad (20)$$

b) عندما $u_1 = u_1(X)$ كما في المعادلة (15) نحصل على :

$$c_1 = \sqrt{\frac{-\left(k^2 + N^2 \cos(u_1(X))\right)}{k^2}} \qquad (21)$$

إذ أن $\cos(u_1(X)) < 0$, $N^2 \cos u_1(X) \le -k^2$

نفرض أن $\cos(u_1(X)) = -f(u_1(X))$, $f(u_1(X)) > 0$ فان :

$$c_1 = \sqrt{\frac{-\left(k^2 - N^2 f\left(u_1(X)\right)\right)}{k^2}} \qquad (22)$$

إذ أن $k^2 \le N^2 f\left(u_1(X)\right)$ وفي هذه الحالة توجد لدينا الحالتان الآتيتان :

i) إذا كان $k^2 < N^2 f\left(u_1(X)\right)$ فان $c_1 > 0$ وان الحل غير مستقر في هذه الحالة .

ii) إذا كان $k^2 = N^2 f\left(u_1(X)\right)$ فان $c_1 = 0$ التي تمثل منحني الإستقرارية المتعادلة .

$$k = \sqrt{N^2 f\left(u_1(X)\right)} \qquad (23)$$

2- إذا كان :

$$c_1 = -\sqrt{\frac{-\left(k^2 + N^2 \cos u_1\right)}{k^2}} \qquad (24)$$

إذ إن $N^2 \cos u_1 \le -k^2$, $\cos u_1 < 0$ نفرض أن $\cos u_1 = -f\left(u_1\right)$, $f\left(u_1\right) > 0$ فان :

$$c_1 = -\sqrt{\frac{-\left(k^2 - N^2 f\left(u_1\right)\right)}{k^2}} \qquad (25)$$

إذ إن $k^2 \le N^2 f\left(u_1\right)$ وفي هذه الحالة توجد لدينا الحالتان الآتيتان :

a) إذا كان $k^2 < N^2 f\left(u_1\right)$ فان $c_1 < 0$ وان الحل مستقر في هذه الحالة .

b) إذا كان $k^2 = N^2 f\left(u_1\right)$ فان $c_1 = 0$ والتي تمثل منحني الاستقرارية المتعادلة .

$$k = \sqrt{N^2 f\left(u_1\right)} \qquad (26)$$

والآن سوف يتم تطبيق النتائج في أعلاه على الحالتين الآتيتين :

a) عندما $u_1 = \mp p, \mp 3p, \mp 5p, \ldots$ ، وبالتعويض عن هذه القيم في المعادلة (24) نحصل على :

$$c_1 = -\sqrt{\frac{-\left(k^2 - N^2\right)}{k^2}}$$

إذ أن $k^2 \le N^2$

i) إذا كان $k^2 < N^2$ فان $c_1 < 0$ وان الحل مستقر في هذه الحالة .

ii) إذا كان $k^2 = N^2$ فان $c_1 = 0$ التي تعطي منحني الإستقرارية المتعادلة .

$$k = N \qquad (27)$$

b) عندما $u_1 = u_1(X)$ كما في المعادلة (15) نحصل على :

$$c_1 = -\sqrt{\frac{-\left(k^2 + N^2\cos(u_1(X))\right)}{k^2}} \qquad (28)$$

إذ أن $\cos u_1(X) < 0\ ,\ N^2\cos u_1(X) \le -k^2$ نفـــرض أن $f(u_1(X)) > 0\ ,\ \cos u_1(X) = -f(u_1(X))$ فان :

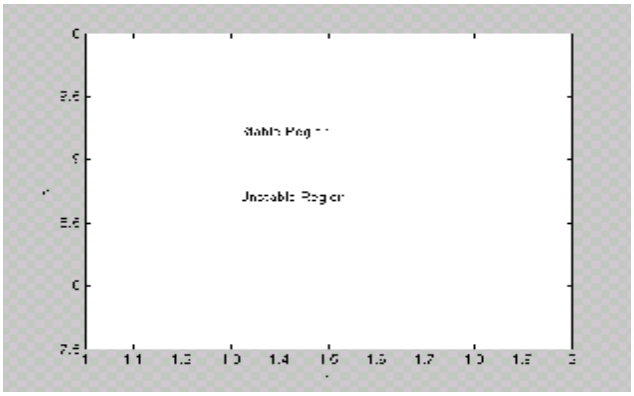
$$c_1 = -\sqrt{\frac{-\left(k^2 - N^2 f(u_1(X))\right)}{k^2}} \qquad (29)$$

إذ أن $k^2 \le N^2 f(u_1(X))$ وفي هذه الحالة توجد لدينا الحالتان الآتيتان :

i) إذا كان $k^2 < N^2 f(u_1(X))$ فان $c_1 < 0$ وان الحل مستقر في هذه الحالة .

ii) إذا كان $k^2 = N^2 f(u_1(X))$ فان $c_1 = 0$ التي تمثل منحني الإستقرارية المتعادلة والموضح في الشكل (1).

$$k = \sqrt{N^2 f(u_1(X))} \qquad (30)$$



الشكل (1)

يوضح الشكل منحني الإستقرارية المتعادلة المتمثلة بالمعادلة(32) للحل اللازمني $u_1 = u_1(X)$ المتمثل بالمعادلة (15) عندما $-1 \le X \le 1$ و $L = 2\sqrt{2}p$ ، $b=3.2416$ ، $N^2=1$

3.2 تحليل الإستقرارية في حالة السعة المتغيرة

سوف تتم في هذا الجزء دراسة الإستقرارية تحليلياً ثم باســـتخدام طريقـــة Galerkin العددية.

3.2.1 تحليل الإستقرارية باستخدام الحل التحليلي

في حالة كون السعة A متغيرة فان المعادلة (8) تتحول إلى [10] :

$$u_2(X,T) = A(X)e^{k(iX+cT)} \qquad (31)$$

وبالتعويض عن المعادلة (31) في المعادلة (12) نحصل على :

$$c^2k^2A(X)e^{k(iX+cT)} = -k^2A(X)e^{k(iX+cT)} + 2ikA'(X)e^{k(iX+cT)} + A''(X)e^{k(iX+cT)}$$
$$- N^2\cos u_1 A(X)e^{k(iX+cT)} \Rightarrow$$
$$(c_1+ic_2)^2k^2A(X) = \left(-k^2 - N^2\cos u_1\right)A(X) + 2ikA'(X) + A''(X)$$

وبإهمال الجزء الخيالي نحصل على :

$$c_1{}^2k^2A(X) = A''(X) + \left(-k^2 - N^2\cos u_1\right)A(X) \Rightarrow$$
$$A''(X) + \left(-k^2 - N^2\cos u_1 - c_1{}^2k^2\right)A(X) = 0$$

يمكن إعادة كتابة المعادلة في أعلاه على الشكل الآتي :

$$A''(X) + DA(X) = 0 \qquad (32)$$

$$A(-1) = A(1) = b, -1 \le X \le 1$$

إذ $D = -k^2 - N^2\cos u_1 - c_1{}^2k^2$ إن للمعادلة (32) الحالات الثلاث الآتية [10] :

i) إذا كان $D < 0$ فان الحل العام للمعادلة (32) هو :

$$A(X) = B\cosh\sqrt{-D}X + C\sinh\sqrt{-D}X$$

إذ أنB ، C هي ثوابت اختيارية،ولا تعني الإشارة السالبة هنا إن المقدار (-D) سالب بل هـــي للملاءمة فقط وباستخدام الشروط الحدودية نحصل على :

$$B\cosh\sqrt{-D} - C\sinh\sqrt{-D} = b$$
$$B\cosh\sqrt{-D} + C\sinh\sqrt{-D} = b$$

وبحل النظام الجبري في أعلاه نحصل على :

$$A(X) = \left(b/\cosh\sqrt{-D}\right)\cos\sqrt{-D}X$$

ii) إذا كان $D = 0$ فان الحل العام للمعادلة (32) هو :

$$A(X) = BX + C$$

وباستخدام الشروط الحدودية نحصل على :

$$C - B = b$$
$$C + B = b$$

وبحل النظام الجبري في أعلاه نحصل على :

$$A(X) = b$$

أي أن السعة A في هذه الحالة هي كمية ثابتة وقد تم التطرق إلى هذه الحالة في الفقرة (3.1) .

iii) إذا كان $D > 0$ فان الحل العام للمعادلة (32) هو :

$$A(X) = B\cos\sqrt{D}X + C\sin\sqrt{D}X$$

وباستخدام الشروط الحدودية نحصل على :

$$B\cos\sqrt{D} - C\sin\sqrt{D} = b$$

$$B\cos\sqrt{D} + C\sin\sqrt{D} = b$$

وبطرح المعادلة الأولى من المعادلة الثانية في النظام الجبري في أعلاه نحصل على :

$$C\sin\sqrt{D} = 0$$

ولتحديد قيمة D نفرض أن $C \neq 0$ في أعلاه وهذا يؤدي إلى أن :

$$\sin\sqrt{D} = 0 \Rightarrow \sqrt{D} = np \Rightarrow$$

$$D = (np)^2 \ , \ n = \mp 1, \mp 2, \mp 3, ... \qquad (33)$$

ومن الملاحظ انه عند التعويض عن $n = 0$ في المعادلة(33) نحصل على $D = 0$ التي تمثل الحالة(ii)والتي تم التطرق إليها،وبالتعويض عن D في إحدى المعادلتين في أعلاه نحصل على :

$$B = b$$

وبالتعويض عن B , D في الحل العام نحصل على :

$$A(X) = b\cos(np)X + C\sin(np)X$$

من المعادلة (33) نحصل على :

$$D = -k^2 - N^2\cos u_1 - c_1{}^2k^2 = (np)^2 \Rightarrow$$

$$c_1{}^2 = \frac{-\left(k^2 + (np)^2 + N^2\cos u_1\right)}{k^2} \Rightarrow$$

$$c_1 = \mp\sqrt{\frac{-\left(k^2 + (np)^2 + N^2\cos u_1\right)}{k^2}} \qquad (34)$$

توجد للمعادلة (34) الحالتان الآتيتان :

1) إذا كان :

$$c_1 = \sqrt{\frac{-\left(k^2 + (np)^2 + N^2\cos u_1\right)}{k^2}} \qquad (35)$$

إذ أن $\cos u_1 < 0 \ , N^2\cos u_1 \le -\left(k^2 + (np)^2\right)$ نفرض أن

$f(u_1) > 0 \ , \cos u_1 = -f(u_1)$ فان :

$$c_1 = \sqrt{\frac{-\left(k^2 + (np)^2 - N^2 f(u_1)\right)}{k^2}} \qquad (36)$$

إذ أن $k^2 + (np)^2 \le N^2 f(u_1)$ وفي هذه الحالة توجد لدينا الحالتان الآتيتان :

a) إذا كان $k^2 + (np)^2 < N^2 f(u_1)$ فان $c_1 > 0$ وان الحل غير مستقر في هذه الحالة .

b) إذا كان $k^2+(np)^2=N^2 f(u_1)$ فان $c_1=0$ ، وللحصول على منحني الإستقرارية المتعادلة ، نأخذ اقل قيمة ذاتية (Eigen Value) عندما $n=1$.

$$k=\sqrt{N^2 f(u_1)-9.869604401} \tag{37}$$

If $N^2 f(u_1)>9.869604401$

إذ أن القيمة الذاتية هي تلك القيمة التي تمتلك المسألة عندها حلاً غير تافه (Non Trivial Solution) ويسمى الحل الذي يقابلها بالدالة الذاتية (Eigen Function) .

والان سوف يتم تطبيق النتائج في أعلاه على الحالتين الآتيتين :

a) عندما ..., $u_1=\mp p, \mp 3p, \mp 5p$ ، بالتعويض عن هذه القيم في المعادلة (35) نحصل على:

$$c_1=\sqrt{\frac{-\left(k^2+(np)^2-N^2\right)}{k^2}}$$

إذ أن $k^2+(np)^2\le N^2$

i) إذا كان $k^2+(np)^2<N^2$ فان $c_1>0$ وان الحل غير مستقر في هذه الحالة .

ii) إذا كان $k^2+(np)^2=N^2$ فان $c_1=0$ ، وللحصول على منحني الإستقرارية المتعادلة ، نأخذ اقل قيمة ذاتية عندما $n=1$.

$$k=\sqrt{N^2-9.869604401} \tag{38}$$

If $N^2>9.869604401$

b) عندما $u_1=u_1(X)$ كما في المعادلة (15) نحصل على :

$$c_1=\sqrt{\frac{-\left(k^2+(np)^2+N^2\cos(u_1(X))\right)}{k^2}} \tag{39}$$

إذ أن $\cos(u_1(X))<0$, $N^2\cos u_1(X)\le -\left(k^2+(np)^2\right)$

نفرض أن $f(u_1(X))>0$, $\cos(u_1(X))=-f(u_1(X))$ فان :

$$c_1=\sqrt{\frac{-\left(k^2+(np)^2-N^2 f(u_1(X))\right)}{k^2}} \tag{40}$$

إذ أن $k^2+(np)^2\le N^2 f(u_1(X))$ وفي هذه الحالة توجد لدينا الحالتان الآتيتان :

a) إذا كان $k^2+(np)^2<N^2 f(u_1(X))$ فان $c_1>0$ وان الحل غير مستقر في هذه الحالة.

b) إذا كان $k^2+(np)^2=N^2 f(u_1(X))$ فان $c_1=0$ ، وللحصول على منحني الإستقرارية المتعادلة ، نأخذ اقل قيمة ذاتية عندما $n=1$.

$$k=\sqrt{N^2 f(u_1(X))-9.869604401} \qquad (41)$$

If $N^2 f(u_1(X))>9.869604401$

2) إذا كان :

$$c_1=-\sqrt{\frac{-\left(k^2+(np)^2+N^2\cos u_1\right)}{k^2}} \qquad (42)$$

إذ أن $\cos u_1<0\ ,N^2\cos u_1\le-\left(k^2+(np)^2\right)$ نفـــ

إذ أن $\cos u_1<0\ ,N^2\cos u_1\le-\left(k^2+(np)^2\right)$ نفرض أن $f(u_1)>0\ ,\cos u_1=-f(u_1)$ فان :

$$c_1=-\sqrt{\frac{-\left(k^2+(np)^2-N^2 f(u_1)\right)}{k^2}} \qquad (43)$$

إذ أن $k^2+(np)^2\le N^2 f(u_1)$ وفي هذه الحالة توجد لدينا الحالتان الآتيتان :

a) إذا كان $k^2+(np)^2<N^2 f(u_1)$ فان $c_1<0$ وان الحل مستقر في هذه الحالة .

b) إذا كان $k^2+(np)^2=N^2 f(u_1)$ فان $c_1=0$ ، وللحصول على منحنـــي الإســـتقرارية المتعادلة ، نأخذ اقل قيمة ذاتية (Eigen Value) عندما $n=1$.

$$k=\sqrt{N^2 f(u_1)-9.869604401} \qquad (44)$$

If $N^2 f(u_1)>9.869604401$

والآن سوف يتم تطبيق النتائج في أعلاه على الحالتين الآتيتين :

a) عندما $u_1=\mp p\ ,\mp 3p\ ,\mp 5p\ ,...$ ، بالتعويض عن هذه القيم في المعادلة (42) نحصل على:

$$c_1=-\sqrt{\frac{-\left(k^2+(np)^2-N^2\right)}{k^2}}$$

إذ أن $k^2+(np)^2\le N^2$

i) إذا كان $k^2+(np)^2<N^2$ فان $c_1<0$ وان الحل مستقر في هذه الحالة .

ii) إذا كان $k^2+(np)^2=N^2$ فان $c_1=0$ ، وللحصول على منحني الإستقرارية المتعادلة ، نأخذ اقل قيمة ذاتية (Eigen Value) عندما $n=1$.

$$k=\sqrt{N^2-9.869604401} \qquad (45)$$

If $N^2>9.869604401$

b) عندما $u_1=u_1(X)$ كما في المعادلة (15) نحصل على :

$$c_1=-\sqrt{\frac{-\left(k^2+(np)^2+N^2\cos(u_1(X))\right)}{k^2}} \qquad (46)$$

إذ أن $\cos(u_1(X))<0$, $N^2\cos(u_1(X))\le -(k^2+(np)^2$

نفرض أن $f(u_1(X))>0$, $\cos(u_1(X))=-f(u_1(X))$ فان :

$$c_1=-\sqrt{\frac{-(k^2+(np)^2-N^2 f(u_1(X)))}{k^2}} \qquad (47)$$

إذ أن $k^2+(np)^2\le N^2 f(u_1(X))$ وفي هذه الحالة توجد لدينا الحالتان الآتيتان :

a) إذا كان $k^2+(np)^2<N^2 f(u_1(X))$ فان $c_1<0$ وان الحل مستقر في هذه الحالة .

b) إذا كان $k^2+(np)^2=N^2 f(u_1(X))$ فان $c_1=0$ ، وللحصول على منحني الإستقرارية المتعادلة ، نأخذ اقل قيمة ذاتية (Eigen Value) عندما $n=1$.

$$k=\sqrt{N^2 f(u_1(X))-9.869604401} \qquad (48)$$

If $N^2 f(u_1(X))>9.869604401$

3.2.2 تحليل الإستقرارية باستخدام طريقة Galerkin العددية

إن هذه الطريقة هي من طرائق المتبقيات الموزونة (The Weighted Residual Methods)،تعتمد هذه الطريقة على فرض حل معين للمسألة،وبما أن هذا الحل هو تقريب للحل المضبوط(Exact Solution)،فعند تعويضه في المعادلة المطلوب حلها بعد مساواتها بالصفر ينتج ما يعرف بالخطأ،وبعد ذلك يضرب الخطأ بدالة موزونة (Weighted Function) ثم يوجد التكامل المحدد بالشروط الحدودية لهذا المقدار وعند وضع هذا التكامل مساوياً للصفر ينتج ما يسمى بالمتبقي R (Residual) [1]

نفرض أن الحل للمعادلة (32) على الشكل الآتي :

$$A(X)=\sum_{n=1}^{\infty}(B_n\cos l_n X+C_n\sin l_n X) \qquad (49)$$

بأخذ أحد حدود الحل المتمثل بالمعادلة (49) نحصل على :

$$A(X)=B_n\cos l_n X+C_n\sin l_n X$$

وباستخدام الشروط الحدودية نحصل على :

$$\left.\begin{aligned} B_n\cos l_n - C_n\sin l_n &= b\\ B_n\cos l_n + C_n\sin l_n &= b\end{aligned}\right\} \qquad (50)$$

وبحل النظام الجبري (50) نحصل على:

$$l_n=np \quad , \quad n=\mp 1,\mp 2,\mp 3,... \qquad (51)$$

$$B_n = b \qquad (52)$$

وبالتعويض عن المعادلتين (51) و(52) في المعادلة (49) ، نحصل على :

$$A(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(b\cos(np)X + C_n \sin(np)X\right) \qquad (53)$$

وبتعويض المعادلة (53) في المعادلة (32) نحصل على :

$$\sum_{n=1}^{\infty} D\left(b\cos(np)X + C_n \sin(np)X\right) - \sum_{n=1}^{\infty}\left((np)^2 b\cos(np)X + (np)^2 C_n \sin(np)X\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{p}\left[D - (np)^2\right]\left(b\cos(np)X + C_n \sin(np)X\right) = R \qquad (54)$$

إذ أن R هو المتبقي ،وباستخدام فرضية Galerkin نحصل على :

$$\int_{-1}^{1}\left[\sum_{n=1}^{p}\left[D - (np)^2\right]\left(b\cos(np)X + C_n \sin(np)X\right)\right] f_m(X)dX = 0 \qquad (55)$$

إذ $f_m(X)$ هي دالة مثلثية (متعامـــدة) مناســـبة (Suitable Orthogonal Trigonometric Function) .

$$f_m(X) = \cos l_m X \quad , \quad l_m = mp \quad , \quad m = \mp 1, \mp 2, \mp 3, \ldots \qquad (56)$$

إن أي عنصر في المصفوفة سيكون على الشكل الآتي [11] :

$$X(n,m) = \int_{-1}^{1}\sum_{n=1}^{p}\sum_{m=1}^{p}\left[D - (np)^2\right]\left(b\cos(np)X + C_n \sin(np)X\right)\cos(mp)XdX \qquad (57)$$

وبالاستفادة من التكاملات التحليلية الآتية :

$$\int_{-1}^{1}\cos(np)X\cos(mp)XdX = \begin{bmatrix} 1 & if & n = m \\ 0 & if & n \neq m \end{bmatrix}$$

$$\int_{-1}^{1}\sin(np)X\cos(mp)XdX = 0 \qquad for\ any \quad n, m$$

لحساب قيمة c_1 من المعادلة (57) نحصل على :

$$D - (np)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$D = -k^2 - N^2\cos u_1 - c_1{}^2 k^2 = (np)^2 \Rightarrow$$

$$c_1{}^2 = \frac{-\left(k^2 + (np)^2 + N^2\cos u_1\right)}{k^2} \Rightarrow$$

$$c_1 = \mp\sqrt{\frac{-\left(k^2 + (np)^2 + N^2\cos u_1\right)}{k^2}} \qquad (58)$$

نلاحظ أن المعادلة (58) التي تم الحصول عليها باستخدام طريقة Galerkin العددية هي المعادلة (34) نفسها التي تم الحصول عليها باستخدام الحل التحليلي ، أي أن المعادلة (58) سوف تعطي النتائج نفسها التي تم الحصول عليها باستخدام المعادلة (34) في الحالات $u_1 = \mp p, \mp 3p, \mp 5p, \ldots$ ، $u_1 = u_1(X)$ فيما لو استخدمت لحساب تلك النتائج ، وهذا يدل على كفاية طريقة Galerkin ودقتها.

4.الاستنتاجات

تمت دراسة استقرارية الحلول اللازمنية للمعادلة (2) في حالتين:الأولى في حالة كون السعة ثابتة والثانية في حالة كون السعة متغيرة وقد تم الحصول في حالة السعة الثابتة على النتائج الآتية :

1- عندما :

$$c_1 = \sqrt{\frac{-\left(k^2 + N^2\cos u_1\right)}{k^2}}$$

إذ أن $N^2\cos u_1 \le -k^2$, $\cos u_1 < 0$وفي هذه الحالة توجد لدينا النتيجتان الآتيتان :

a) الحل $u_1 = \mp p, \mp 3p, \mp 5p, \ldots$ غير مستقر إذا كان $k^2 < N^2$.

b) الحل $u_1 = u_1(X)$ ، كما في المعادلة (15) غير مستقر إذا كان $k^2 < N^2 f(u_1(X))$.

2- عندما

$$c_1 = -\sqrt{\frac{-\left(k^2 + N^2\cos u_1\right)}{k^2}}$$

إذ أن $N^2\cos u_1 \le -k^2$, $\cos u_1 < 0$وفي هذه الحالة توجد لدينا النتيجتان الآتيتان :

a) الحل $u_1 = \mp p, \mp 3p, \mp 5p, \ldots$مستقر إذا كان $k^2 < N^2$وان منحني الإستقرارية المتعادلة في هذه الحالة:

$$k = N$$

b) الحل $u_1 = u_1(X)$ ،كما المعادلة (15) مستقر إذا كان $k^2 < N^2 f(u_1(X))$ وإن منحني الإستقرارية المتعادلة في هذه الحالة :

$$k = \sqrt{N^2 f(u_1(X))}$$

أما في حالة كون السعة متغيرة فقد تمت مقارنة النتائج التي تم الحصول عليها عن طريق الحل التحليلي بالنتائج العددية لطريقة Galerkin إذ تبين إن النتائج التي تم الحصول عليها من طريقة Galerkin هي نفسها التي تم الحصول عليها من الحل التحليلي وهذا يدل على كفاية هذه الطريقة ودقتها وقد تم الحصول على النتائج الآتية :

1- عندما

$$c_1 = \sqrt{\frac{-\left(k^2 + (np)^2 + N^2 \cos u_1\right)}{k^2}}$$

إذ أن $N^2 \cos u_1 \le -\left(k^2 + (np)^2\right)$, $\cos u_1 < 0$ وفي هذه الحالة توجد لدينا النتيجتان الآتيتان:

a) الحل $u_1 = \mp p, \mp 3p, \mp 5p, \ldots$ غير مستقر إذا كان $k^2 + (np)^2 < N^2$.

b) الحل $u_1 = u_1(X)$ ، كما في المعادلة (15) غير مستقر إذا كان $k^2 + (np)^2 < N^2 \; f(u_1(X))$.

2- عندما

$$c_1 = -\sqrt{\frac{-\left(k^2 + (np)^2 + N^2 \cos u_1\right)}{k^2}}$$

إذ أن $NL^2 \cos u_1 \le -\left(k^2 + (np)^2\right)$, $\cos u_1 < 0$ وفي هذه الحالة توجد لدينا النتيجتان الآتيتان :

a) الحل $u_1 = \mp p, \mp 3p, \mp 5p, \ldots$ مستقر إذا كان $k^2 + (np)^2 < N^2$ وان منحني الإستقرارية المتعادلة في هذه الحالة :

$k^2 = \sqrt{N^2 - 9.869604401}$ ، If $N^2 > 9.869604401$

b) الحل $u_1 = u_1(X)$ ، كما في المعادلة (15) مستقر إذا كان $k^2 + (np)^2 < N^2 \; f(u_1(X))$ وان منحني الإستقرارية المتعادلة في هذه الحالة :

$k = \sqrt{N^2 f(u_1(X)) - 9.869604401}$ ، If $N^2 f(u_1(X)) > 9.869604401$

المصادر

[1] Allaire,P.E. (1985) **Basics of the Finite Element Method**, Wm.C.Brown Publishers.

[2] Chen , D. ; Zhang , D. and Deng , S. (2002) "The Novel Multi–Soliton Solutions of the MKdV–Sine Gordon Equations" , J. Phys. Soc. Japan , Vol. 71 , No. 2 , PP.658 – 659.

[3] Cuenda, S. and Sanchez, A. (2004) "Nonlinear Excitations in DNA : A Periodic Models versus Actual Genome Sequences", **Phys. Rev. E70**, 051903.

[4] D'Anna , A.; DeAngelis, M. and Fiore , G. (2005) "Towards Soliton Solution of a Perturbed Sine–Gordon Equation" , **arXiv :math-ph**/ 0507005.

[5] Davidson , A. J. and Mottram , N. J. (2002) " Flexoelectric Switching in a Bistable Nematic Device" , **Phys. Rev. E**, Vol. 65 , 051710.

[6] Ercolani , N. , Forest , M.G. and Mclaughlin , D.W.(1990) "Geometry of the Modulation of Instability III , Homoclinic Orbits for the Periodic Sine–Gordon Equation"**, Physica D 43**, PP.349-384.

[7] Garbey, M.; Kaper, H.G. and Romanyukha, N. (2001) **A Fast Solver for System of Reaction–Diffusion Equations**, Thirteenth International Conference on Domain Decomposition Methods , Editors : Debit , N. , Garbey , M. , Hoppe , R. , Periaus, J. , Knznetsov , Y., PP.385–392.

[8] Hirota,R. (1977) "Nonlinear Partial Difference Equation III; Discrete Sine–Gordon Equation" , **J. Phys. Soc. Japan** 43 , 2079.

[9] Landa,P.S. (1996) **Nonlinear Oscillations and Waves in Dynamical Systems** , Kluwer Academic Publisher.

[10] Logan, J. D. (1987) **Applied Mathematics** , John Wiley and Sons.

[11] Manaa,S.,A.and Moheemmeed,M.A. (2005) "Stability Analysis for Steady State Solutions of Huxley Equation", Raf. J. of Comp. and Math's.Vol.2,No.1, PP.69-84.

[12] Mandula,G. ;Bugaychuk,S.; Kovacs,L.; Rupp,R.A. and Polgar,K. (2003) **Soliton Profile of the Dynamic Grating Amplitude and its Alteration in Photorefractive Wave–Mixing** , Ninth International Conference on Photorefractive Effects , Materials ,and Devices. PR03,Nice,France17–21 June.

[13] McLaughlin , D. W. and Scott , A. C. (1978) "Perturbation Analysis of Fluxon Dynamics" , **Phys. Rev. A**, Vol.18 , No.4 , pp.1652–1680.

[14] Quintero , N. R. and Sanchez , A. (1998) "dc Motion of ac Driven Sine– Gordon Solutions" , **Phys. Lett. A247** , PP.161–166.

[15] Scott , A. C. (2003) **Nonlinear Science: Emergence and Dynamics of Coherent Structures** , Second Edition,Oxford: Oxford University Press.

[16] Smith , G. D. (1985) **Numerical Solution of Partial Differential Equations : Finite Difference Methods** , Oxford University Press.

[17] Wei , G. W. (2000) **Discrete Singular Convolution for the Sine–Gordon Equation** , J. Physica D 137 , PP. 247 – 259.