

الجريان اللزمني في غشاء رقيق متناظر على سطح مائل

خضر محمد صالح خضر

كلية العلوم

جامعة كركوك

جوزيف غانم عبد الأحد

كلية التربية

جامعة الموصل

تاريخ قبول البحث: ٢٠٠٥/٤/٥

تاريخ استلام البحث: ٢٠٠٤/١٠/٣

ABSTRACT

In this paper, we consider steady incompressible viscous flow in a symmetric thin liquid film on an inclined surface with angle β in two dimensions with no inertia force. The surface of the film is taken to be real that is there is no shear stress on the liquid surface. We found the differential equations that govern the flow. We solve these equations numerically by using Rang Kutta method.

الملخص

في هذا البحث تمت دراسة الجريان اللزج في الأغشية الرقيقة المتناظرة للسوائل غير القابلة للانضغاط وبانعدام قوى القص الذاتي وبفرض أن جهد القص على السطح يكون صفراً. وفي هذا البحث تمت دراسة الجريان اللزمني عندما يكون الغشاء مائلاً بزاوية β . وقد حلت هذه المعادلات بطريقة رنج-كوتا العددية.

Introduction

(1-1) المقدمة

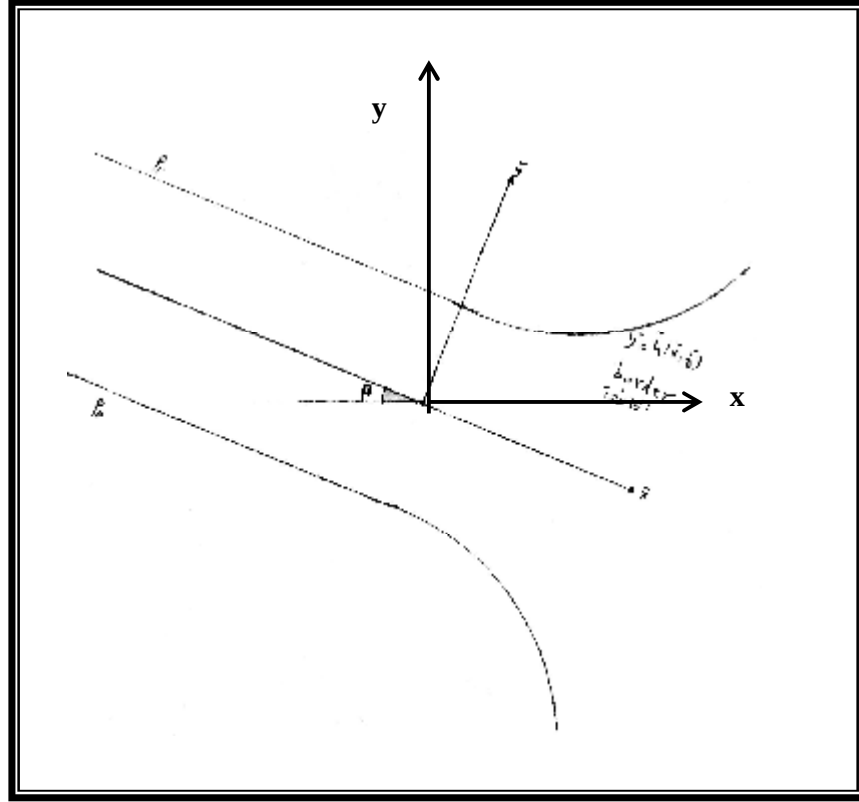
تمت دراسة الأغشية الرقيقة (Thin films) التي تتكون عادة من الهواء وسائل لزج مع الشد السطحي (surface tension) سابقاً دراسة مستفيضة. وان إحدى هذه التأثيرات هي نحافة (thinness) هذه الأغشية والتي لها أهمية كبيرة في كثير من التطبيقات الصناعية مثل عمليات الطلاء. على الرغم من العديد من الدراسات في مجال الأغشية الرقيقة مثل (Rayleigh, 1890)، (Mysels, 1959)، (Isenperge, 1978) فإنه لا يوجد وصف دقيق للظواهر التي تحدث في هذه الأغشية الرقيقة، إذ درس (Abdulahad, 1994) الشروط الديناميكية على سطوح الأغشية الرقيقة، كما درس (Morshed, 1996) الجريان اللزج في

الأغشية الرقيقة في حالتي الجريان المستقر وغير المستقر آخذاً بالاعتبار الموجات في هذه الأغشية عندما تكون لزوجة السائل صغيرة جداً.

كما اهتم كل من (B. R. Duffy and S. K. Wilson, 1997) بدراسة جريان الأغشية الرقيقة اللزجة للموائع والتي يكون فيها الغشاء سطحا حرا وبوجود الشد السطحي ودرس (Javier, 2000) الجريان في الأغشية الرقيقة والذي يكون للشد السطحي وللجاذبية التأثير في جريان المائع ، وباستخدام نظرية التزبييت. وفي بحثنا هذا سوف نتطرق إلى دراسة الجريان اللزج في الأغشية الرقيقة السائلة والمائلة بزواوية β وبإهمال تأثير قوى القصور الذاتي وباعتبار ان السطح لا يمتلك أي جهد قص على سطح الغشاء.

المعادلات التي تحكم الجريان Equations that Govern the Flow (1-2)

لوصف الجريان نأخذ الإحداثيات الكارتيزية x و y حيث ان الإحداثي x هو إحداثي المتناظر وان الجريان يكون باتجاه الإحداثي x والذي يميل بزواوية β عن الإحداثي الكارتيزي x وان الإحداثي y يكون عموديا عليه وكما موضح بالشكل (1-1) إذ أن للتعجيل الأرضي g تأثيراً كبيراً فـ



الشكل (1-1) المقطع المستعرض لغشاء متناظر المائل بزاوية β

نفرض أن $\bar{u}$ و $\bar{v}$ هي مركبات السرعة في الاتجاهين $\bar{x}$ و $\bar{y}$ على الترتيب ،

$\bar{P}$ يمثل الضغط ولتكن معادلة السطح الحر للغشاء بالصيغة الآتية :

$$\bar{y} = \bar{m} \bar{h}(\bar{x}, \bar{t}) \quad \dots(1-2)$$

سوف نحصر اهتمامنا بالحالة التي يكون فيها :

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} \ll 1$$

على المجال $\bar{x}$.

وبهذا يمكن إهمال الحد $\left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}}\right)^2$ من معادلة الانحناء والذي له الصيغة :

$$k = \frac{\frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial \bar{x}^2}}{\left[1 + \left\{\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}}\right\}^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad \dots(2-2)$$

إذ تصبح بالصيغة الآتية:

$$k = \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial \bar{x}^2} \quad \dots(3.2)$$

وإن معادلة الزخم الطولي باتجاه $\bar{x}$ لها الصيغة الآتية :

$$\rho \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right] = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} \right) + \rho g_{\bar{x}} \quad \dots(4-2)$$

وباستخدام نظرية التزيب تصبح بالصيغة الآتية :

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}} = m \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + r g \sin(b) \quad \dots(5-2)$$

وإن معادلة الزخم العرضي باتجاه $\bar{y}$ لها الصيغة التالية :

$$\rho \left[\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \right] = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{z}^2} \right) + \rho g_{\bar{y}} \quad \dots(6-2)$$

وباستخدام نظرية التزيب وبتكامل المعادلة (9-2) بالنسبة لـ $\bar{y}$ وباشتقاق $\bar{v}$ بعد

التكامل مرتين بالنسبة لـ $\bar{x}$ نحصل على المعادلة الآتية :

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = -m y \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{x}^3} - r g \cos(b) \quad \dots(7-2)$$

حيث أن : μ يمثل اللزوجة ، ρ يمثل الكثافة ، g يمثل التعجيل الأرضي.

وإن معادلة الاستمرارية لها الصيغة الآتية:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = 0 \quad \dots(8-2)$$

وبما أن الجريان باتجاه الإحداثيين $\bar{x}$ و $\bar{y}$ فإن (8 - 2) تصبح بالصيغة الآتية :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad \dots(9-2)$$

وإن الجريان غير قابل للانضغاط.

Boundary Conditions

(3-3) الشروط الحدودية

1. شرط إجهاد القص (المماسي) على السطح الحر للغشاء

Tangential stress condition at free surface

$$\tau = \mu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right)_s = 0 \quad \dots(1-3)$$

حيث S يمثل سطح الغشاء الحر .

Normal – stress condition

2. شرط الإجهاد العمودي

$$\tilde{w} = -s (\pm k) \quad \dots(2-3)$$

حيث أن : σ يمثل الشد السطحي .

وبتعويض المعادلة (3.2) في (2.3) نحصل على ما يأتي:

$$\tilde{w} = s \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial \bar{x}^2} \quad \dots(3-3)$$

كما يمكن إعطاء مركبة الإجهاد العمودي (بصيغة أخرى) وهي:

$$\tilde{w} = \left(-\bar{P} + 2m \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right)_s \quad \dots(4-3)$$

ومن المعادلتين (3.3) و (4.3) نحصل على ما يأتي:

$$\left[-\bar{P} + 2\mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right]_s = \sigma \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial \bar{x}^2} \quad \dots(5-3)$$

ويمكن كتابة المعادلة (9-2) بالصيغة الأتية:

$$\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right)_s = \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right)_s \quad \dots(6-3)$$

وبتعويض (6 - 3) في (5 - 3) وبعد الترتيب نحصل على مايلي:

$$\bar{P} = -s \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial \bar{x}^2} - 2m \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \quad \dots(7 - 3)$$

3. شرط المشتقة التي تتبع الجسيم على السطح الحر

Material derivative at free surface condition

من معادلة سطح الغشاء $\bar{y} = \bar{h}(\bar{x}, \bar{t})$ فإن :

$$F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \bar{y} - \bar{h}(\bar{x}, \bar{t}) = 0$$

وباستخدام المؤثر

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial \bar{y}}$$

نحصل على ما يأتي:

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} = 0 \quad \text{on } \bar{y} = \bar{h}$$

أو

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} + \bar{h} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} = 0$$

أو

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\bar{u} \bar{h}) = 0$$

وفي حالة الجريان اللازمي تصبح بالصيغة الأتية:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\bar{u} \bar{h}) = 0 \quad \dots(8-3)$$

(3-4) الاشتقاقات والتكاملات اللازمة لإيجاد المعادلة التي تحكم الجريان :

نشتق المعادلة (7-3) بالنسبة لـ $\bar{x}$ فنحصل على ما يأتي:

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}} = -s \frac{\partial^3 \bar{h}}{\partial \bar{x}^3} - 2m \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} \quad \dots(1-4)$$

ومن المعادلتين (2 - 5) و (1-4) نحصل على ما يأتي :

$$-s \frac{\partial^3 \bar{h}}{\partial \bar{x}^3} - 2m \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} = m \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + r g \sin(b)$$

أو

$$-s \frac{\partial^3 \bar{h}}{\partial \bar{x}^3} - 3m \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} - r g \sin(b) = 0$$

أو

$$s \frac{\partial^3 \bar{h}}{\partial \bar{x}^3} + 3m \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + r g \sin(b) = 0 \quad \dots(2-4)$$

تكامل المعادلة (4 - 2) مرتين بالنسبة لـ $\bar{x}$ فنحصل على ما يأتي:

$$\sigma \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial \bar{x}^2} + 3\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \rho g \sin(\beta) \bar{x} = A \quad \dots(3-4)$$

و

$$\sigma \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} + 3\mu \bar{u} + \frac{1}{2} \rho g \sin(\beta) \bar{x}^{-2} = A \bar{x} + R$$

حيث أن A, R ثوابت التكامل .
أو

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} + \frac{3\mu Q}{\sigma \bar{h}} + \frac{1}{2} \frac{\rho g}{\sigma} \sin(\beta) \bar{x}^{-2} = \frac{A}{\sigma} \bar{x} + \frac{R}{\sigma} \quad \dots(4.4)$$

ومن تكامل المعادلة (3 - 8) فإن $Q = \bar{u} \bar{h}$ حيث أن Q يمثل التصريف .

(3.5) المتغيرات اللابعديّة

Non – Dimensional variables

$$\left. \begin{aligned} \bar{h} &= \left(\frac{\mu^3 Q^3}{\sigma^2 \rho g} \right)^{1/5} f \\ \bar{x} &= \left(\frac{\mu \sigma Q}{\rho^2 g^2} \right)^{1/5} \xi \end{aligned} \right\} \quad \dots(1-5)$$

الآن لحل المعادلة (4 - 4) نأخذ الحالتين الآتيتين :

الحالة الأولى : نفرض أن $R=0$ و $A \neq 0$ في المعادلة (4 - 4) فتصبح بالصيغة الآتية:

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} + \frac{3\mu Q}{\sigma \bar{h}} + \frac{1}{2} \frac{\rho g}{\sigma} \sin(\beta) \bar{x}^{-2} = \frac{A}{\sigma} \bar{x} \quad \dots(2-5)$$

وبتعويض (1 - 5) في (2 - 5) نحصل على :

$$f' + 3f^{-1} + \frac{1}{2} \sin \beta \xi^2 = A \left(\frac{1}{\mu \sigma \rho g Q} \right)^{1/5} \xi \quad \dots(3-5)$$

$$\left(\mu \sigma \rho g Q \right)^{1/5}$$

حيث إن الثابت A له البعد
ويمكن كتابة المعادلة (3.5) بالصيغة الآتية:

$$f' + 3f^{-1} + \frac{1}{2} \sin(\beta) \xi^2 = k_1 \xi \quad \dots(4-5)$$

$$\text{حيث إن } k_1 = A \left(\frac{1}{\mu \sigma \rho^3 g^3 Q} \right)^{1/5} \text{ ثابت لا بعدي .}$$

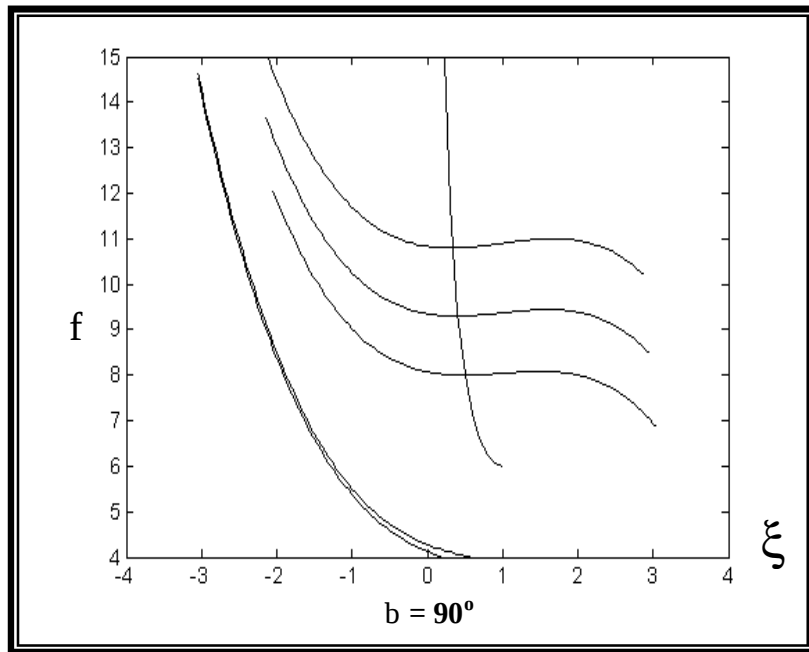
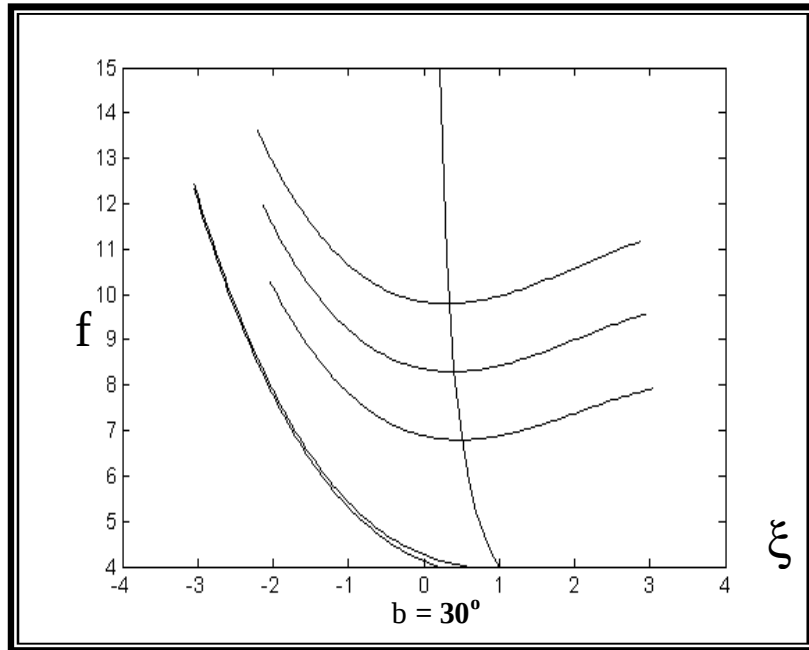
ولحل المعادلة (4 - 5) نحتاج الى شروط ابتدائية ولأجل الحصول على هذه الشروط نفرض أن المشتقة الأولى f' تكون مساوية للصفر وهذا يعطينا المحل الهندسي للنقاط التي تكون عندها المشتقة $f' = 0$ وبهذا تصبح المعادلة (4 - 5) بالصيغة الآتية:

$$3f^{-1} + \frac{1}{2} \sin(\beta) \xi^2 = k_1 \xi$$

أو

$$f = \frac{-3}{\frac{1}{2} \sin(\beta) \xi^2 - k_1 \xi} \quad \dots(5-5)$$

ومن المعادلة (5 - 5) نحصل على الشروط الابتدائية لحل المعادلة (4 - 5) وباستخدام برنامج الـ MATLAB باستخدام طريقة رنج كوتا من الرتبة الرابعة نحصل على النتائج والحلول العددية للمعادلة (4 - 5) عندما $k_1=1$ وان β تأخذ القيم 30 ، 90 بالترتيب وكما موضح في الشكل (1-5).



الشكل (1-5) : يمثل منحنيات الحلول في المستوي (f, ξ) للمعادلة (4-5)

الحالة الثانية : نفرض إن $A=0$ و $R \neq 0$ في المعادلة (4.4) فتصبح بالصيغة الآتية:

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{3\mu Q}{\sigma h} + \frac{1}{2} \frac{\rho g}{\sigma} \sin(\beta) x^{-2} = \frac{R}{\sigma} \quad \dots(6-5)$$

وبتعويض (5 - 1) في (5 - 6) نحصل على ما يأتي:

$$f' + 3f^{-1} + \frac{1}{2} \sin(\beta) \xi^2 = \frac{R}{\sigma} \left(\frac{1}{\frac{2}{\mu} - \frac{3}{\sigma} \frac{1}{\rho} \frac{1}{g} \frac{2}{Q}} \right)$$

أو

$$f' + 3f^{-1} + \frac{1}{2} \sin \beta \xi^2 = B \left(\frac{1}{\frac{2}{\mu} \frac{2}{\sigma} \frac{2}{\rho} \frac{2}{g} \frac{2}{Q}} \right)^{1/5} \quad \dots(7 - 5)$$

حيث إن R له البعد $\left(\frac{2}{m} \frac{2}{s} \frac{2}{r} \frac{2}{g} \frac{2}{Q} \right)^{1/5}$

ويمكن كتابة المعادلة (5 - 7) بالصيغة الآتية:

$$f' + 3f^{-1} + \frac{1}{2} \sin(\beta) \xi^2 = k_2 \quad \dots(8-5)$$

حيث إن $k_2 = B \left(\frac{1}{\frac{2}{\mu} \frac{2}{\sigma} \frac{2}{\rho} \frac{2}{g} \frac{2}{Q}} \right)^{1/5}$ ثابت لا بعدي .

ولحل المعادلة (8-5) نحتاج الى شروط ابتدائية ولأجل الحصول على هذه الشروط نتبع

نفس الطريقة المذكورة لحل المعادلة (5 - 4) فتصبح المعادلة (5 - 8) بالصيغة الآتية:

$$3f^{-1} + \frac{1}{2} \sin(\beta) \xi^2 = k_2$$

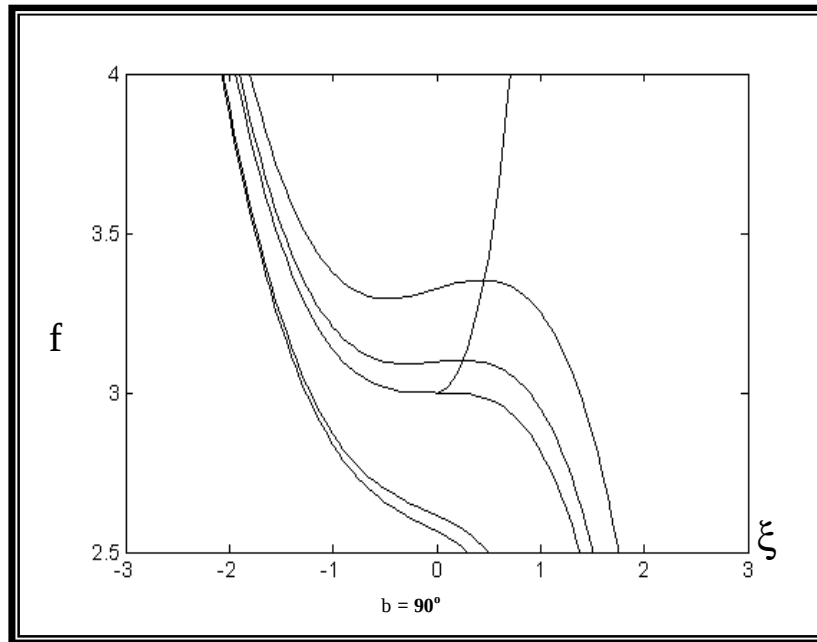
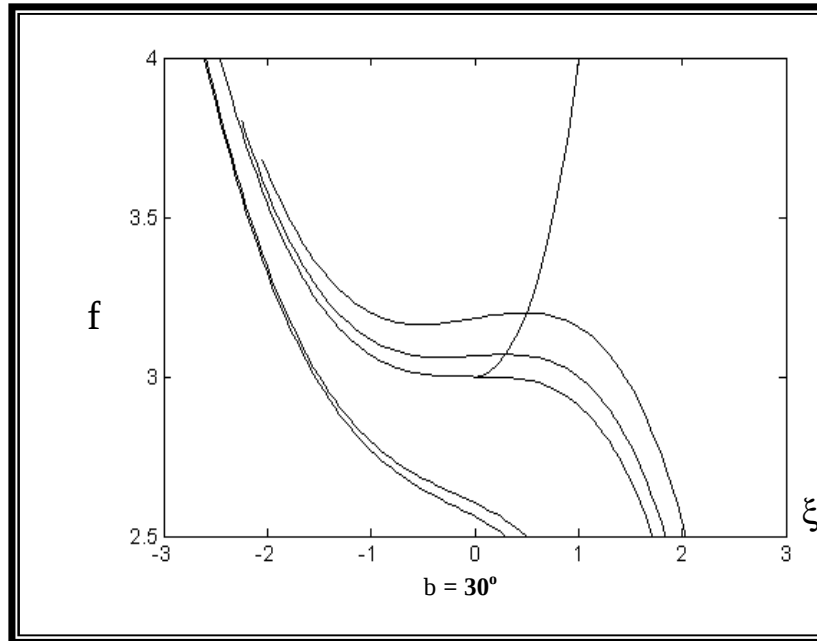
أو

$$f = \frac{-3}{\frac{1}{2} \sin(\beta) \xi^2 - k_2} \quad \dots(9 - 5)$$

ومن المعادلة (9-5) نحصل على الشروط الابتدائية لحل المعادلة (5 - 8) وباستخدام

برنامج MATLAB بطريقة رنج كوتا من الرتبة الرابعة نحصل على النتائج والحلول العددية

للمعادلة (5 - 8) عندما $k_2=1$, $\beta = 30^\circ, 90^\circ$ وكما موضح في الشكل (5 - 2).



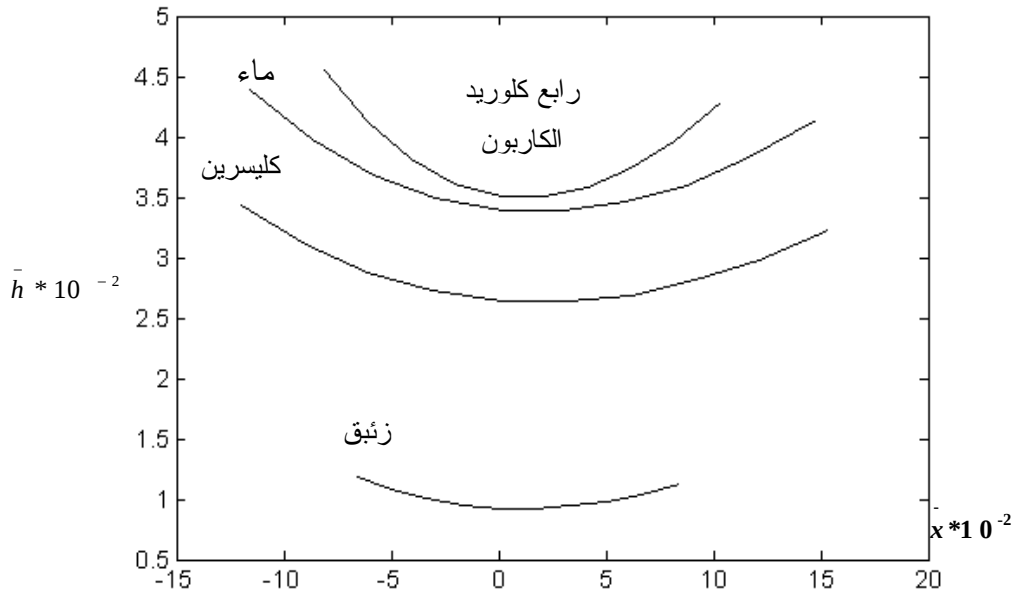
الشكل (5-2) منحنيات الحلول في المستوي (f, ξ) للمعادلة (5-8)

لإيجاد سمك الغشاء لبعض السوائل المعروفة نستخدم الجدول الآتي وبفرض أن التصريف $Q=1$.

الجدول (1 - 5) يمثل قيم الثوابت لبعض السوائل

السائل	الصيغة الجزيئية	$\mu \times 10^3$ N.sec/m ²	$\rho \times 10^{-3}$ Kg/m ³	$\sigma \times 10^3$ N/m	$g \times 10^2$ m/sec ²
الكليسرين	C ₃ H ₈ O ₃	1.49	1.26	63.4	980
الماء	H ₂ O	1	1	72.7	980
الزئبق	Hg	1.55	13.6	435	980
رابع كلوريد الكربون	CCl ₄	0.97	1.6	27	980

والشكل (3 - 5) يبين سمك الأغشية لكل من الكليسرين والماء والزئبق ورابع كلوريد الكربون



الشكل (3 - 5)

الاستنتاجات (1-6) Conclusions

في هذا البحث تمت دراسة الجريان اللازماني في غشاء رقيق متناظر على سطح مائل بزاوية ما وفي نظام ثنائي البعد بعد إهمال قوى القصور الذاتي و جهد القص على سطح الغشاء وتبين من الحلول للمعادلة (4-5) بأن المنحنيات تبدأ بالميلان باتجاه اليمين بينما باتجاه اليسار تكون محاذية للدالة $f(\xi) = A\xi^2$ عندما $\xi \rightarrow -\infty$ بينما المنحنيات تكون أكثر تموجاً لسمك الغشاء في المعادلة (8-5) وتزداد هذه التموجات كلما ازدادت قيم β .

المصادر

- [1] Abdul Ahad, J. G., 1994, "Similarity solution for unsteady flow thin liquid films", **J. Ed. SCI**, Vol. 17.
- [2] B. R. Duffy and S. K. Wilson, 1997 "A third – order deferential equation arising in thin – film flows and relevant to Tanner's Law", **App. Math. Lebb**, Vol. 10, No.3, PP, 63 – 68.
- [3] Isenperge. C., 1978, **The science of soap film and soap Bubbles**, Clevedon, England.
- [4] Javier. A. , 2000, "Global models for moving contact lines", **Physical reviews**, Vol. 63, 011208, PP. 1 – 13.
- [5] Morshed, A. M, 1996, "**Fluid flow in thin liquid films**", M. Sc, thesis University of Mosul.
- [6] Myesl, K. J., Shinoda, K., and Frankle, S., 1959, " **Soap films studies of their thinning and bibliography**", pergamon press, London.
- [7] Rayleiyh, J. W., 1890, "**Foam proceeding of the Royal institution**", Vol. 13, PP 85 – 97.