دراسة محاكاة لمقارنة بعض طرائق التقدير لأنموذج الانحدار المقسم ذو نقاط تغيير متعددة

بحث مقدم من

م.م. محمد أحمد عباس

ماجستير في الاحصاء التطبيقي من كلية الادارة والاقتصاد - جامعة بغداد

ديوان الوقف السني/ دائرة التعليم الديني والدراسات الاسلامية

تاريخ القبول: ٢٠٢٣/٢/١ تاريخ النشر:٢٠٢٣/٣/٣٠

مستخلص :

يعتبر الانحدار المقسم من الوسائل الاحصائية التي تستخدم لتمثيل ونمذجة الظواهر التي تمر بعدة مراحل انتقالية. ويعتمد المفهوم الاساسي للانحدار المقسم على وجود نقطة معينة في المتغير التوضيحي تدعى بـ (نقطة التغيير)، وتكون هذه النقطة مشتركة ومستمرة بين اطراف كل مرحلتين انتقاليتين متتاليتين. تم في هذا البحث التعامل مع انموذج الانحدار المقسم ذو نقاط تغيير متعددة، وتم استخدام مقدر الامكان الاعظم (MLE) وطريقتي الاوزان التكرارية الحصينة (IRWm)، (IRWs)لتقدير معلمات الانموذج ونقاط التغيير والمقارنة بين هذه الطرائق لاختيار الطريقة الامثل بينها. إذ تم انشاء عملية محاكاة بعدة سيناريوهات وباحجام مختلفة من العينات ونسب تلوث(قيم شاذة)(٠٪ ,٥٪ ,١٠٪ ,١٥٪) لإجراء عملية المقارنة وإيجاد الطريقة الامثل للتقدير.
واظهرت نتائج المحاكاة بعد اتمام عملية المقارنة باستعمال معيار المقارنة متوسط مربعات الخطأ (MSE)كفاءة طريقة الاوزان التكرارية (IRWm)عند وجود نسب تلوث في البيانات وكفاءة طريقة الامكان الاعظم (MLE) عندما تكون البيانات لا تحتوي على أي نسبة تلوث.

المصطلحات الرئيسية للبحث: الانحدار المقسم، نقاط التغيير المتعددة، الاوزان التكرارية الحصينة، تقنية المعالجة الخطية، دراسة المحاكاة.

Abstract:

Segmented regression is one of the statistical methods that are used to represent and model phenomena that go through several transitional stages. The basic concept of segmented regression depends on the presence of a certain point in the explanatory variable called (change point), and this point is shared and continuous between the ends of each two Consecutive transitional stages.In this research, the segmented regression model with multiple change points will be dealt with. the maximum likelihood estimator (MLE) and the two methods of robust repetitive weights (IRWm), (IRWs) will be used to estimate the model parameters and change points and then compare between these methods to choose the best method between them.A simulation process will be created with several scenarios, with different sample sizes and contamination rates (Outliers values) (١٥٪, ١٠٪, ٥٪, ٠٪) to Procedure the comparison process and find the best method for estimation.The simulation results, after completing the comparison process using the comparison standard, mean squared error (MSE), showed the efficiency of the Iterative Weights method (IRWm) when there were contamination rates in the data, and the efficiency of the maximum likelihood method (MLE) when the data did not contain any contamination.

Keyword: segmented regression, multiple change points, Robust iterative weights, linear reparameterization technique, simulation study.

١- المقدمة

تعد نماذج الانحدار المقسم (Segmented regression models) احد الوسائل الاحصائية التي تستخدم بشكل شائع لنموذجة انواع معينة من الظواهر أو العلاقات غير الخطية (non linear) بين متغيري الاستجابة والتوضيحي التي تمر بمراحل انتقالية (Transition) أو تغيير في نمط بيانات المتغير التوضيحي، ويمكن تمثيلها بيانياً بعدة خطوط مستقيمة. ويرتبط كل خط مستقيم بالخط الذي يليه بنقطة مشتركة تسمى هذه النقطة بنقطة الربط (joint) أو التغيير (change) أو العتبة (threshold)، وموقع هذه النقطة ضمن قيم المتغير التوضيحي. وتعد هذه النقطة ذات أهمية كبيرة لأنها تمثل تغيير أو نقلة في نمط البيانات, وبسببها يتغير شكل الدالة للأنموذج.

ويطلق احياناً على انموذج الانحدار المقسم بأنموذج الانحدار متعدد الاطوار "multiphase " (Lu & Chang, ٢٠٢٠) أو انموذج الانحدار متعدد المراحل "multistage"(Roslyakova, ٢٠١٧) أو انموذج انحدار العتبة "Threshold " (Shi, Li, & Wan, ٢٠١٨) أو انحدار متعدد الاقسام "segmented multivariate " (Liu, Wu, & Zidek, ١٩٩٧). وتم التركيز في هذا البحث على أنموذج الانحدار المقسم ذو نقاط تغيير متعددة "Multiple change point segmented regression model " والذي يحتوي على نقاط تغيير في مناطق أو مواقع مختلفة في المتغير التوضيحي ولكنه مستمر عند هذه النقاط.

توجه العديد من الباحثين إلى استخدام نماذج الانحدار المقسم في الادبيات ومنهم: (Hudson, ١٩٦٦)، (Gallant & Fulle, ١٩٧٣)، (Muggeo, ٢٠٠٣) وغيرهم، وتعد أسالب هؤلاء الباحثين من الاساليب التقليدية التي تستخدم عندما تكون البيانات لا تحتوي على قيم شاذة (Outliers values) أو عندما تتبع البواقي التوزيع الطبيعي. لذا عالج بعض الباحثين مشكلة وجود القيم الشاذة في البيانات التي يمكن أن تؤثر على دقة تقدير معلمات الانموذج وقاموا بإيجاد طرائق حصينة تعالج هذه المشكلة.

فقد اقترح الباحثان (Zhang & Li, ٢٠١٧)المقدر المستند إلى الرتب "rank-based estimator " الحصين لانحدار الخط المنحني (bent line regression) مع نقطة تغيير واحدة غير معلومة. وقدم الباحثان (Ali & Abbas, ٢٠١٩) مقدر حصين جديد (IRWm) لتقدير نقطة التغيير (نقطة واحدة) في انموذج الانحدار الخطي المقسم وذلك بتوظيف تقنية مقدر M الحصين ضمن نهج (Muggo) التقليدي، وبعد ذلك قدم الباحثان (Ali & Abbas, ٢٠٢٠) مقترح اسلوب (IRWS) الحصين لتقدير انموذج الانحدار المقسم ذو نقطة تغيير واحدة باستخدام (توظيف) تقنية S الحصينة ضمن نهج (Muggo)، وقام الباحث (Ali O. A., ٢٠٢٠) بإجراء مقارنة بين طرائق حصينة مقترحة لتقدير نقطة العتبة لانموذج الانحدار متعدد الاطوار وقد اثبت كفاءة طريقة المقدر الهجين (Hybrid) المقترحة باستخدام خوارزمية (ad-hoc) للتغلب على القيم الشاذة.

وقد تم في هذا البحث استخدام الطرائق المقترحة من الباحثان (Ali & Abbas) وطريقة (Muggo) التقليدية في انموذج الانحدار المقسم ذو **نقاط تغيير متعددة** والمقارنة بين هذه الطرائق في دراسة محاكاة بسيناريوهات متعددة واحجام عينة مختلفة ومستوى تلوث (٠٪, ٥٪, ١٠٪, ١٥٪)، ومن ثم اجراء مقارنة هذه الطرائق لاختيار الطريقة الامثل لتقدير معلمات انموذج الانحدار المقسم الذي يحتوي على نقاط تغيير متعددة وايضاً تقدير هذه النقاط.

٢- الجانب النظري

٢-١وصف الانموذج:

في بعض التطبيقات لا يمكن وصف التجارب بدالةمعلميه واحدة في مجال التحليلبأكمله،ولنمذجة مثل هذا السلوك المعقد من الضروري النظر في نماذج الانحدار التي لها شكل تحليلي مختلف(ذات مراحل او مجالات متعددة)،وتسمى نماذج الانحدار من هذا النوع نماذج الانحدار المقسم (segmented regression models)، أي أننا نلاحظ البيانات من نموذج الانحدار غير الخطي التالي:

(Roslyakova, ٢٠١٧)

$$y_i = f(x_i; B, \tau) + \epsilon_i, \qquad i = ١,٢, \ldots\ldots, n \qquad \ldots\ldots (١)$$

إذ أن:

y_i : المتغير التابع.

x_i : المتغير المستقل.

f : دالة الانحدار.

B : متجه معلمات الانحدار التي يجب تقديرها.

ϵ_i: الأخطاء العشوائية.

τ : متجه نقاط التغيير(غير معلومة) بين الدوال الفرعية وتكون ضمن قيم x_i.

و تحدد صيغة دالة الانحدار المقسم لـ r من الاقسام وفق الصيغة: (Roslyakova, ٢٠١٧)

$$f(x_i;B,\tau)=\begin{cases} & f_1(x:\beta_1)x_1 \le x \le \tau_1 \\ & f_2(x:\beta_2)\tau_1 < x \le \tau_2 \\ \vdots & \vdots \\ & f_r(x:\beta_r)\tau_{r-1} < x \le x_n \end{cases} \quad \dots(٢)$$

إذ ان:

$f_j(x:\beta_j)$: هي نماذج انحدار فرعية وخطية مع معلمات غير معلومة β_j , $j = ١,٢,\dots,r$

حيث تعرف الدالة $f(x_i;B,\tau)$ في الصيغة رقم (٢) بأنها دوال فرعية $f_j(x:\beta_j)$ مختلفة ضمن فترات مختلفة $[\tau_{j-1},\tau_j]$، وان نقاط نهاية هذه الفترات غير معلومة ويجب تقديرها، وهي نقاط تربط كل دالة فرعية بالدالة التي تليها وعادة ما تكون هذه النقاط ذات أهمية لأنها تمثل التحولات أو التغيير في نمط واتجاه البيانات، ولهذا يمكن تسمية الانحدار المقسم باسم انحدار متعدد المراحل (multistage) أو الأطوار (multiphase)(Roslyakova, ٢٠١٧).

وبافتراض أن انموذج الانحدار المقسم مقيد بالاستمرارية عند نقاط الربط (نقاط التغيير) بين الدوال الفرعية الخطية $f_j(x:\beta_j)$ يمكن تعريف الانموذج وفق الصيغة: (Roslyakova, ٢٠١٧)

$$f(x_i;B,\tau)=\begin{cases} f_1(x:\beta_1) = \beta_{1,0} + \beta_{1,1}\ x & x_1 \le x \le \tau_1 \\ f_2(x:\beta_2) = \beta_{2,0} + \beta_{2,1}\ x & \tau_1 < x \le \tau_2 \\ \vdots & \vdots \\ f_r(x:\beta_r) = \beta_{r,0} + \beta_{r,1}\ x & \tau_{r-1} < x \le x_n \end{cases} \quad \dots(٣)$$

وان قيد الاستمرارية يكون وفق الصيغة التالية:(Yu, Barrett, Kim, & Feuer, ٢٠٠٧)

$$\beta_{j,0} + \beta_{j,1}\tau_j = \beta_{j+1,0} + \beta_{j+1,1}\tau_j\,, \quad for\ \ j = ١,٢,\dots..,r-١ \qquad \dots(٤)$$

وتكون صياغة الانموذج (٣) مع قيد الاستمرارية (٤) وفق الصيغة الاتية:

(Lain, ٢٠١٨)،(Yu, Barrett, Kim, & Feuer, ٢٠٠٧)

$$f(x_i;B,\tau) = \beta_0 + \beta_1 x + \Delta_1(x-\tau_1)_+ + \cdots + \Delta_{r-1}(x-\tau_{r-1})_+,$$
$$or \quad = \beta_0 + \beta_1 x + \sum_{j=1}^{r-1}\Delta_j(x-\tau_j)_+, \qquad \dots(٥)$$

إذ أن :

β_0 : معلمة الحد الثابت.

β_1 : معلمة الميل.

Δ_j هي الفرق بين معلمتي الميل j و $j+1$ $(\Delta_j = \beta_{j+1} - \beta_j)$.

وأن :

$$(x-\tau_j)_+ = \begin{cases} x-\tau_j, & x > \tau_j \\ ٠, & x \le \tau_j \end{cases}$$

٢-٢ طرائق تقدير الانموذج:

٢-٢-١ تقنية المعالجة الخطية لموغيو(linear reparameterization technique for Muggeo)

لتقدير المعلمات في الأنموذج رقم (٥) يلاحظ أن لوغاريتم دالة الإمكان الأعظم للأنموذج غير قابلة للاشتقاق عند نقاط التغيير $x_i = \tau_j$، لذا اقترح الباحث(Muggeo, ٢٠٠٣)تقنية المعالجة الخطية (linear reparameterization)لتحويل هذه المشكلة الى إطار خطي كأسلوب بديل ومن ثم إيجاد تقدير الإمكان الأعظم (ML) لمعلمات الانموذج إضافةً الى تقدير نقاط التغيير وبأسلوب تكراري بسيط.

ولتقدير (r-١) من نقاط التغيير باستخدام الصيغة (٥) تم تقريب الصيغةالغير قابلة للتفاضل $\Delta_j(x-\tau_j)_+$ حول القيم الأولية $\tau_j^{(٠)}$ باستخدام متسلسلة تايلور(Taylor expansion) من الدرجة الأولى، حيث يجب أن تكون $\tau_j^{(٠)}$ قريبة من القيمة الحقيقية قدر الإمكان وحسب الصيغة الآتية: (Shi, Li, & Wan, ٢٠١٨)

$$(X-\tau_j)_+ \approx (X-\tau_j^{(٠)})_+ + (-١)I(X > \tau_j^{(٠)})(\tau_j - \tau_j^{(٠)}) \quad \dots (٦)$$

حيث $(-١)I(X > \tau_j^{(٠)})$ هي المشتقة الأولى لـ $(X-\tau_j^{(٠)})_+$ بالنسبة لـ$\tau_j^{(٠)}$.

وأن ١=$I(X > \tau_j^{(٠)})$إذا كانت $X > \tau_j^{(٠)}$ وتساوي صفر في ما عدى ذلك.

وتم تطبيق الصيغة الخطية(٦) على جميع نقاط التغيير، وصيغة الأنموذج(٥)يمكن تقريبها وفق الصيغة:

$$f(x_i; B, \tau) = \beta_٠ + \beta_١ x + \sum_j^{r-١} \Delta_j \bar{U}_j + \sum_j^{r-١} \gamma_j \bar{V}_j, \quad \dots (٧)$$

إذ أن: المعلمة $\gamma_j = \Delta_j(\tau_j - \tau_j^{(٠)})$.

وأن : $\bar{U}_j = (X-\tau_j^{(٠)})_+$ ، $\bar{V}_j = (-١)I(X > \tau_j^{(٠)})$ هما متغيرات إضافية.

وبهذه الطريقة يمكن النظر الى الانموذج (٧) كأنموذج انحدار خطي اعتيادي ويمكن الحصول على مقدر (ML)لمعلمات الانموذج ونقاط التغيير عندما يتبع الخطأ العشوائي توزيعاً احتماليا معروفاً.

ويمكن إيجاد أفضل مقدر(ML) وفق خوارزمية(Muggeo, ٢٠٠٣)التكرارية البسيطة وكما يلي:

١- وضع قيم $\tau_j^{(٠)}$ الابتدائية. عند التكرار ٠ =s.

٢- حساب المتغيرات الإضافية $\bar{U}_j^{(s)}$ ، $\bar{V}_j^{(s)}$.

٣- وبفرض أن الخطأ العشوائي يتبع التوزيع الطبيعي تم إيجاد مقدرات (ML)للأنموذج (٧) لكل تكرار(s)وفق الصيغة:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(ML)}^{(s)} = (\mathrm{X}'\mathrm{X})^{-١}\mathrm{X}'\mathrm{Y} \quad \dots (٨)$$

إذ أن :

$$Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} 1 & x_1 u_1^{(s)} \dots u_j^{(s)} \dots u_{r-1}^{(s)} & v_1^{(s)} \dots v_j^{(s)} \dots v_{r-1}^{(s)} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \cdots \quad \vdots & \vdots \quad \cdots \quad \vdots \quad \cdots \quad \vdots \\ 1 & x_n u_n^{(s)} \dots u_{j.n}^{(s)} \dots u_{r-1.n}^{(s)} & v_n^{(s)} \dots v_{j.n}^{(s)} \dots v_{r-1.n}^{(s)} \end{pmatrix}, \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{(ML)}^{(s)}$$

$$= \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0^{(s)} \\ \hat{\beta}_1^{(s)} \\ \hat{\Delta}_1^{(s)} \\ \vdots \\ \hat{\Delta}_{r-1}^{(s)} \\ \hat{\gamma}_1^{(s)} \\ \vdots \\ \hat{\gamma}_{r-1}^{(s)} \end{pmatrix}$$

٤- تحديث نقاط التغيير حسب الصيغة:

$$\hat{\tau}_j = \frac{\hat{\gamma}_j}{\hat{\Delta}_j} + \tau_j^{(0)} \dots (٩)$$

٥- إعادة تكرار الخطوات السابقة من الخطوة (٢) الى (٤) بعد تحديث نقاط التغيير واستبدالها بالقيم الابتدائية الى s من التكرارات حتى إتمام تقارب قيم المعلمات$(\hat{\gamma}_j \approx 0)$، وعندما تقترب هذه المعلمات من الصفر فهذا يعني ان $(\tau_j^{(s)} - \tau_j^{(s-1)} \approx 0)$وعندها يتم الحصول على أفضل تقدير (ML) لمعلمات الانموذج ونقاط الربط عند التكرارsth أي: $\tau_j^{(s)} = \hat{\tau}_j$.

٢-٢-٢ طريقة الاوزان التكرارية باستخدام مقدر Mالحصين (Repetitive weighting method using the robust M-estimator)

تعد طريقة الاوزان التكرارية باستخدام مقدرM الحصين (IRWm-estimator) أحد الطرائق المقترحة من الباحثان (O.A.Ali, M.A.Abbas,٢٠١٩)، وتعتمد هذه الطريقة على استعمال مقدر M الحصين ضمن نهج(Muggeo) الكلاسيكي للحصول على تقدير اكثر حصانة لمعلمات الانموذج ونقاط التغيير في ذات الوقت، إذ تم اعتماد نهج الحصانة على استبدال مجموع المربعات الصغرى الاعتيادية $\sum e_i^2$ بدالة الخسارة (loss function)$\sum P(e_i)$لكونها ذات تباين قليل عند وجود بواقي متطرفة (شاذة).

(Ali & Abbas, ٢٠١٩)

و تم الحصول على التقدير الحصين(IRWm-estimator) لمعلمات الانموذج ونقاط التغيير في الصيغة (٧)وفق الخطوات التالية: (Ali & Abbas, ٢٠١٩)

١- وضع القيم الابتدائية للمعلمات $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{(\mathrm{IRWm})}^{(s)} = (\hat{\beta}_0^{(s)}, \hat{\beta}_1^{(s)}, \hat{\Delta}_j^{(s)}, \hat{\gamma}_j^{(s)})$ ، $\hat{\tau}_j^{(s)}$عند التكرار s=٠مع ملاحظة انالقيم الأولية للمعلمة $\hat{\gamma}_j^{(s)}$تكون صغيرة مثل ٠.٠١ .

٢- تقدير المعلمات $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{(s+1)} = (\hat{\beta}_0^{(s+1)}, \hat{\beta}_1^{(s+1)}, \hat{\Delta}_j^{(s+1)}, \hat{\gamma}_j^{(s+1)})$بأسلوب تكراري(m)وفق الصيغة:

$$D\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{(\boldsymbol{m+1})}\right) = arg\ min \sum_{i=1}^{n} p\left(z_i^{(m)}\right), \qquad \cdots (١٠)$$

إذ أن :

$$z_i^{(m)} = \frac{e_i^{(m)}}{\hat{\sigma}_{MAD}}, e_i^{(m)} = y_i - (\beta_0^{(m)} + \beta_1^{(m)} x_i + \sum_j^{r-1} \Delta_j^{(m)} \bar{U}_j + \sum_j^{r-1} \gamma_j^{(m)} \bar{V}_j)$$

$$\hat{\sigma}_{MAD} = \frac{median\left|e_i^{(m)} - median\left(e_i^{(m)}\right)\right|}{0.6745},$$

وباشتقاق الصيغة(١٠) بالنسبة لـ $\boldsymbol{\beta}$ ومساواتها بالصفر نحصل على :

$$\sum_{i=1}^{n} Xw\left(z_i^{(m)}\right)\left(y_i - (\beta_0^{(m)} + \beta_1^{(m)} x_i + \sum_j^{r-1} \Delta_j^{(m)} \bar{U}_j + \sum_j^{r-1} \gamma_j^{(m)} \bar{V}_j)\right) = 0 \ldots (11)$$

إذ أن:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 u_1^{(s)} \ldots u_j^{(s)} \ldots u_{r-1}^{(s)} & v_1^{(s)} \ldots v_j^{(s)} \ldots v_{r-1}^{(s)} \\ \vdots \quad \vdots \quad \cdots \vdots \quad \cdots \vdots & \vdots \quad \cdots \vdots \quad \cdots \vdots \\ x_n u_n^{(s)} \ldots u_{j.n}^{(s)} \ldots u_{r-1.n}^{(s)} & v_n^{(s)} \ldots v_{j.n}^{(s)} \ldots v_{r-1.n}^{(s)} \end{pmatrix}$$

$$w\left(z_i^{(m)}\right) = \frac{\psi\left(z_i^{(m)}\right)}{\left(z_i^{(m)}\right)}, \psi = p'(p \text{ مشتقة الدالة})$$

وأن الصيغة (١١) تعرف بالمربعات الصغرى الموزونة (WLS) والحل لهذه الصيغة اعطى تقدير $\boldsymbol{\beta}^{(m+1)}$ وفق الصيغة:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{(m+1)} = (X'WX)^{-1}X'WY, \quad \ldots . (12)$$

إذ أن: W مصفوفة قطرية من الدرجة (n)×nوعناصر قطرها الرئيسي هو $w\left(z_i^{(m)}\right)$.

يكرر تقدير المعلماتلـ (m)من المراتحتى تتقارب المعلمات المقدرةأي:

(Zhang & Li, ٢٠١٧)

$$\left\|\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{m+1} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{m}\right\|_\infty < 10^{-5}، \text{ إذ أن } \|v\|_\infty = \max_j |v_j| \text{ لكل } v \in R^q.$$

وبعد اتمام التقارب في الخطوة mth فأن $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{s+1} = \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{m+1}$

٣- تحديث نقاط التغيير وفق الصيغة (٩)في طريقة(Muggeo)

٤- تكرار الخطوات السابقة بدأ من الخطوة ٢حتى اتمام عملية التقارب حسب معيار(Muggeo) $(\hat{\gamma}_j \approx 0)$، وبالتالي فإن التقدير التقريبي في التكرارsth يفترض تقدير $\hat{\beta}^{(s+1)}$هو تقدير (IRWm-estimator) ،وأن $\tau_j^{(s)} = \hat{\tau}_j$.

ويوجد دوال عدة يمكن استعمالها في الدالة p كأوزان لحل مشكلة التصغير والتي اوجدت من خلال أخذ مشتقات جزئية بالنسبة لـ $\hat{\beta}$ ومساواتها بالصفر، وقد تم استعمال دالة (Tukey):

(Salini, Cerioli, Laurini, & Riani, ٢٠١٦)

$$p(z) = \begin{cases} \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{2c^2} + \frac{z^6}{6c^4}, & \text{if } |z| \le c \\ \frac{c^2}{6}, & \text{if } |z| > c \end{cases}, \quad W(z)$$

$$= \begin{cases} \left(1 - \left(\frac{z}{c}\right)^2\right)^2, & \text{if } |z| \le c \\ 0, & \text{if } |z| > c \end{cases} \quad \dots (13)$$

إذ إن : c = ٤.٦٨٥.

٢-٢-٣ طريقة الاوزان التكرارية باستخدام مقدر S الحصين (Repetitive weighting method using the robust S-estimator)

أن طريقة الاوزان التكرارية باستخدام مقدرS الحصين (IRWs-estimator) هي أحد الطرائق المقترحة من الباحثان (Ali & Abbas, ٢٠٢٠)، والتي تعتمد على استعمال مقدر S الحصين، حيث يعتمد هذا المقدر على مقياس البواقي لأسلوب مقدر M،إذ تم التغلب على نقاط الضعف في الوسيط باستعمال الانحراف المعياري للبواقي(Susanti, Pratiwi, Sulistijowati, & Liana, ٢٠١٤).

وقد استخدم الباحثان(Ali & Abbas, ٢٠٢٠)هذا المقدر في تقدير الانحدار المجزأ ضمن نهج(Muggeo) الكلاسيكي للحصول على تقدير أكثر حصانة وبذات الطريقة المتبعة في استخدام مقدر M الحصين في الفقرة السابقة (٢-٢-٢).

وتم الحصول على مقدر S الحصين (IRWs) لمعلمات الانموذج ونقاط التغيير في الصيغة (٧) وفق نفس الخطوات المتبعة في مقدر (IRWm)في الفقرة (٢-٢-٢) ولكن باختلاف الخطوة الثانية إذ تم فيها تقدير المعلمات $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{(\boldsymbol{m+1})}$ من خلال أسلوب مقدر S الحصين وفق الصيغة الآتية: (Ali & Abbas, ٢٠٢٠)

$$D\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{(\boldsymbol{m+1})}\right) = arg\ min \sum_{i=1}^{n} p\left(\frac{e_i^{(m)}}{\hat{\sigma}_{si}^{(m)}}\right), \qquad \cdots (14)$$

إذ أن :

$$\hat{\sigma}_{si}{}^{(m)} = \begin{cases} \dfrac{median\left|e_i^{(m)} - median\left(e_i^{(m)}\right)\right|}{0.6745}, & \text{if } m = 1 \\ \sqrt{\dfrac{1}{nk}\sum_{i=1}^{n} w_i^{(m-1)}\, e_i^{2(m)}}, & \text{if } m > 1 \end{cases} \quad \dots (15)$$

إذ أن: K=٠.١٩٩

وتم حساب قيمة الوزن $w_i^{(m)}$باستعمال دالة(Tukeybisquare)حسب الصيغة الآتية:
(Susanti, Pratiwi, Sulistijowati, & Liana, ٢٠١٤)

$$w_i^{(m)} = \begin{cases} \begin{cases} \left(1 - \left(\frac{z_i^{(m)}}{1.547}\right)^2\right)^2, & \text{if } \left|z_i^{(m)}\right| \le 1.547 \\ 0, & \text{if } \left|z_i^{(m)}\right| > 1.547 \end{cases}, & m = 1 \\ \frac{p\left(z_i^{(m)}\right)}{z_i^{2(m)}}, & m > 1 \end{cases} \quad \dots (16)$$

إذ أن : $z_i^{(m)} = \frac{e_i^{(m)}}{\hat{\sigma}_{si}^{(m)}}$.

وبعد اشتقاق الصيغة(١٤) بالنسبة لـ $\boldsymbol{\beta}$ ومساواتها بالصفر واتمام باقي الخطوات المتبعة في الطريقة السابقة في الفقرة (٢-٢-٢) نحصل على مقدر (IRWs)بطريقة المربعات الصغرى الموزونة (WLS) وفق الصيغة (١٢).

وتكرر الخطوات السابقة للتقدير حتى حصول التقارب، وان التقدير التقريبي sth يفترض تقدير $\hat{\beta}^{(s+1)}$هو تقدير(IRWs)،وأن$= \tau_j^{(s)}$ $\hat{\tau}_j$.(Ali & Abbas, ٢٠٢٠)

٢-٣ معيار المقارنة:

بعد ان تم وصف الانموذج في الصيغة (٥) والتطرق إلى طرائق تقدير الانموذج يأتي أهمية معرفة الطريقة الامثل بين هذه الطرائق السابق ذكرها في الفقرة (٢-٢) إذ يمكن أن تكون هناك طرائق تعطي نتائج مقبولة ولكن يتم المقارنة بينها لاختيار الطريقة التي تعطي نتائج افضل بينهم ولإتمام عملية المقارنة تم استعمال متوسط مربعات الخطأ (MSE) والذي يعد من أهم المقاييس الإحصائية شيوعاً إذ يقيس مدى اقتراب معلمات الانموذج ونقاط التغيير المقدرة وابتعادها عن القيم الحقيقية، لذا تم استعمال هذه الصيغة في المقارنة في دراسة المحاكاة واختيار المقدر الذي يمتلك اقل قيمة (MSE) والذي يحسب وفق الصيغة:

(Boudt, Caliskan, & Croux, ٢٠١١)

$$\boldsymbol{MSE_\beta} = \frac{1}{R}\sum_{i=1}^{R}(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})^2 , \qquad \boldsymbol{MSE_\tau} = \frac{1}{R}\sum_{i=1}^{R}(\hat{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\tau})^2 \dots . (17)$$

إذ أن:

R : قيمة التكرار في المحاكاة.

$\hat{\boldsymbol{\beta}}$: معلمات الانموذج المقدرة في تجربة المحاكاة.$\boldsymbol{\beta}$: معلمات الانموذج الحقيقية.

$\hat{\boldsymbol{\tau}}$: نقاط التغيير المقدرة في تجربة المحاكاة.$\boldsymbol{\tau}$: نقاط التغيير الحقيقية.

٣- الجانب العملي (المحاكاة)

لتقييم أداء طرائق التقدير المذكورة في الجانب النظري تم اجراء تجربة محاكاة بسيناريوهات عدةباستعمال (MATLAB R٢٠١٧a).

٣-١خطوات التجربة:

تم اجراء تجربة المحاكاة لتقييم أداء الطرائق ومعرفة الطريقة الأمثل بينهم وفق الخطوات التالية:

٣-١-١الخطوة الأولى:

تعد هذه الخطوة من الخطوات الأساسية والمهمة والتي فيها تم تحديد حجم العينة (n)، إذ تم تحديد ثلاث احجام للعينات (٤٠ ,٨٠ ,١٦٠) وبتكرار التجربة (R=١٠٠٠) مرة لكل حجم منها.

٣-١-٢الخطوة الثانية:

تم في هذه الخطوة توليد البيانات وفق حجمالعينة المحدد في الخطوة الأولى وكما يلي:

١- المتغير المستقل:

تم في بادئ الامر توليد المتغير المستقل x_iالذي يتبع التوزيع المنتظم ضمن فترة معينة (a, b):
(Shi, Li, & Wan, ٢٠١٨)

$$x_i \sim Uniform(a, b), \qquad i = ١,٢,\cdots,n \qquad \ldots (١٨)$$

٢- الخطأ العشوائي:

تم توليد الأخطاء العشوائية e_iوالتي تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط $(\mu = ٠)$ وتباين $\sigma^٢$ وفق طريقة(Box & Muller, ١٩٥٨)وكما يلي:

- توليد المتغيرين $(U_١, U_٢)$العشوائيين وفق التوزيع المنتظم القياسي $Uniform(٠,١)$.
- تحويل المتغيرين $(U_١, U_٢)$ إلى متغيرين عشوائيين مستقلين $(Z_١, Z_٢)$ يتبعان التوزيع الطبيعي القياسي وفقالصيغة الأتية:

$$\mathrm{Z}_١ = \sqrt{-٢\log U_١} * \cos(٢\pi U_٢)\ , \qquad \ldots (١٩)$$

$$\mathrm{Z}_٢ = \sqrt{-٢\log U_١} * \sin(٢\pi U_٢)\ , \qquad \ldots (٢٠)$$

- توليد متغير عشوائي $U_٣$وفق التوزيع المنتظم القياسي$U_٣ \sim Uniform(٠,١)$.
- الحصول على المتغير العشوائي Zالذي يتبع التوزيع الطبيعي القياسي$\mathrm{Z} \sim N(٠,١)$ وفق الصيغة:

$$\mathrm{Z} = \begin{cases} \mathrm{Z}_١ & if\ \ U_٣ \geq ٠.٥ \\ \mathrm{Z}_٢ & if\ \ U_٣ < ٠.٥ \end{cases}, \qquad \ldots (٢١)$$

- ومن ثم تمالحصول على متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وتباين $\sigma^٢$ بالاعتماد على التوزيع الطبيعي القياسي من خلال الصيغة الآتية:

$$e = \mu + \sigma * Z\ , \qquad \ldots (٢٢)$$

وتم تناول افتراضات عديدة لتوليد الأخطاء العشوائية وهي كما يلي:

- إذا كان توزيع الخطأ العشوائي e_i غير ملوث ويتبع التوزيع الطبيعي القياسي$e_i \sim N(٠,١)$.
- إذا كان توزيع الخطأ العشوائي e_i ملوث، وذلكبافتراض أن البيانات تحتوي على قيم شاذة (Outliers)، إذ تم توليد متغيرات الخطأ العشوائي وفق التوزيع الطبيعي$e_i \sim N(\mu, \sigma^٢)$ بنسبة (p-١)ووفق نفس التوزيع ولكن بتباين مختلف ($\Omega^٢\sigma^٢$) بنسبة p.

(إذ أن:p هي نسبة التلوث، وأن $٠ \leq p \leq ١$) أي:

$$e \sim [(١ - p) * N(٠, \sigma^٢), p * N(٠, \Omega^٢\sigma^٢)], \qquad \ldots (٢٣)$$

٣- المتغير المعتمد:

إن المتغير المعتمد y_iتم الحصول عليه بالاعتماد على قيم المتغير المستقلx_i وقيم الخطأ العشوائي e_iالتي تم توليدها مسبقاً، من خلال استخدام انموذج الانحدار المجزأوفق الصيغة (٥) المذكورة في الجانب النظري مضافاً اليها حد الخطأ.

وتم اجراء تجربة المحاكاة لأنموذج الانحدار المجزء لثلاث سيناريوهات(Shi, Li, & Wan, ٢٠١٨)من القيم الافتراضية لمعلمات الانموذج وهي:

$$Case١: \boldsymbol{\beta} = (\beta_{٠} = ٠.٠١, \beta_{١} = ٠.١, \Delta_{١} = ٦, \Delta_{٢} = -٩), \tau = (\tau_{١} = ٤, \tau_{٢} = ٩)$$

$$Case٢: \boldsymbol{\beta} = (\beta_{٠} = ٠.٠١, \beta_{١} = ٠.١, \Delta_{١} = ٦, \Delta_{٢} = -٩, \Delta_{٣} = ٥), \tau = (\tau_{١} = ٤, \tau_{٢} = ٩, \tau_{٣} = ١٥)$$

$$Case٣: \boldsymbol{\beta} = (\beta_{٠} = ٠.٠١, \beta_{١} = ٠.١, \Delta_{١} = ٦, \Delta_{٢} = -٩, \Delta_{٣} = ٥, \Delta_{٤} = ٨), \tau = (\tau_{١} = ٤, \tau_{٢} = ٩, \quad \tau_{٣} = ١٥, \tau_{٤} = ٢٠)$$

وبافتراض أن قيم x_i هي ضمن الفترة (a=٠ , b=٢٥).

٣-١-٣الخطوة الثالثة:

تم بعد عملية توليد البيانات في هذه المرحلة استعمالطرائق التقدير لانموذجالانحدار المجزءالمذكورة في الجانب النظري، وتم حساب المعدل و متوسط مربعات الخطأ (MSE) لتقدير معلمات الانموذج ونقاط التغيير.

٣-١-٤الخطوة الرابعة:

في هذه المرحلة تم المقارنة بين الطرائق باستعمال معيار (MSE)لتقدير معلمات الانموذج ونقاط التغييرلتقييم إداء الطرائق واختيار الطريقة الامثل للتقدير.

٣-٢نتائج دراسة المحاكاة:

تم استعمال برنامج (Matlab R٢٠١٧a) لتنفيذ دراسة المحاكاة والذي يعد من أحد البرامج ذات الامكانيات العالية في الجوانب الاحصائية والرياضية والهندسية، وتم إجراء تجربة دراسة المحاكاة لثلاث مجاميع من البيانات المولدة وهي:

- (Case١): حالة احتواء البيانات على نقاط تغيير عدد اثنان.
- (Case٢): حالة احتواء البيانات على نقاط تغيير عدد ثلاثة.
- (Case٣): حالة احتواء البيانات على نقاط تغيير عدد اربعة.

وتم توليد البيانات بعدة احجام مختلفة(n=٤٠,٨٠,١٢٠)وبتكرار (١٠٠٠) لكل مجموعة ولكل حجم من احجام العينات، وقد تم افتراض الخطأ العشوائي للبيانات المتولدة في الدراسة بحالات عدة وهي:

- في حال افتراض أن البيانات غير ملوثة بقيم شاذة فأن توزيع الخطأ العشوائي للبيانات المتولدة سيكون وفق التوزيع $e_i \sim N(٠, ١)$.
- في حال افتراض أن البيانات ملوثة بقيم شاذة فأن توزيع الخطأ العشوائي للبيانات المتولدة سيكون توزيع ملوث يحسب وفق الصيغة (٢٣)حيث يولد الخطأ العشوائي وفق التوزيع $e_i \sim N(٠, ٠.٠١)$ بنسبة (١-p) والتوزيع $e_i \sim N(٠, ٣)$ بنسبة p، وأن (p= (٥٪, ١٠٪ , ١٥٪ .

وقد تم تطبيق طرائق التقدير لأنموذج الانحدار المقسم المذكورة في الجانب النظري في الفقرة الثانية لتقييم أداء هذه الطرائق في التقدير وإجراء المقارنة بينها واختيار الطريقة الأمثل باستعمال معيار متوسط مربعات الخطأ (MSE) للمعلمات، ولإعطاء صورة واضحة للنتائج وتحليلها تم عرضها وفق الجداول الآتية:

جدول رقم (١): نتائج تجربة المحاكاة لعينة(n=٤٠) مشاهدة وبتكرار ١٠٠٠ مرة وبتوزيع خطأ $e_i \sim N(0, 1)$.

the Case	Parameter	True value	Muggeo (ML)		IRWm- (Tukey)		IRWs- (Tukey)	
			$\hat{\tau}, \hat{\beta}$	MSE	$\hat{\tau}, \hat{\beta}$	MSE	$\hat{\tau}, \hat{\beta}$	MSE
Case ١	τ_1	٤	٣.٩١٤٨٣	**٠.٢٠١٧٩**	٣.٩٤١٧٨	٠.٩٢٢٠٥	٤.٦٦٤٩٠	٨.٦٣٦٠٦
	τ_2	٩	٩.٠٢٤١٩	**٠.٠١٩٢٤**	٩.٠٤٣٨١	٠.٠٣٠٦٣	٩.٤١١٣٠	٣.٤١٢٧٩
	β_0	٠.٠١	٠.٣٠٩٩٥	**٧.٥٥٣١٣**	٠.٢٧٨٩٠	٨.١٥٨٥٦	-٠.٤٨٣٣١	٢١.٩٦٧٧٩
	β_1	٠.١	-٠.١٥٦٣٤	**٢.٧٧٥١٩**	-٠.١٤٣١٧	٢.٨٣٧٥٦	٠.٠٩٧٧٧	١٤.٣٥٠٩٠
	Δ_1	٦	٦.١٨٥٥٤	**٢.٨٠٠٧٢**	٦.١٣٤٩٢	٢.٩٣٧٣٨	٥.٥١١٩٣	٣١.١٩٦٥٣
	Δ_2	-٩	-٨.٩٣١٤٨	**٠.١٨١٠٧**	-٨.٨٩٤٧٧	٠.٢٢٠٦٦	-٨.٣٩٤٠٤	٥.٠٩٣٣٦
Case ٢	τ_1	٤	٣.٩٠٨٩٢	**٠.١٥٣٦١**	٣.٨٩٥٢١	٠.٢٠٢١٨	٤.٣٩٢١٥	٣.٩٦٢٩٠
	τ_2	٩	٩.٠٥٧٣٣	**٠.٠٩٧٩١**	٩.٠٦٥٩٠	٠.١٢٥٣٤	٩.٥١٩٦٦	٣.٣٢٧١٢
	τ_3	١٥	١٤.٩٥٠٠٨	**٠.١٣٣٦٦**	١٤.٩٥٥٧٥	٠.١٤٤١٨	١٥.١٣٨٧١	١.٩١١٨٥
	β_0	٠.٠١	٠.٣٢٢١٨	**٧.٤٨٢٧٣**	٠.٣٣٤٢٥	٧.٥٧٨٣٧	-٠.٣٤١١١	٢٠.٤١١٨١
	β_1	٠.١	-٠.١٥٨٥٠	**٢.٧٧٥٥٢**	-٠.١٦٥٢٥	٢.٧٩٤٦٦	٠.٠٣٧١٥	١٤.٣٥٩٤١
	Δ_1	٦	٦.١٩٧٦٧	**٢.٧٧١٢٣**	٦.١٥٠٧٨	٣.١٦٤٦٢	٥.٣٠٨٠٩	٢٥.٠٨٢٠٦
	Δ_2	-٩	-٨.٨٢٩٦٩	٣٠.٦٤٥٨١	-٨.٧٧٠٠٩	**٣٠.٤٤٢٧٢**	-٧.٨٦٦٢٢	٤٥.٤٩٩٣٦
	Δ_3	٥	٤.٨٨٩٩١	**٣٠.٢٣٩١٢**	٤.٨٨٤٤٠	٣٠.٢٤٧٠٧	٤.٦١٧٨٤	٣٤.٠٧٨٧١
Case ٣	τ_1	٤	٣.٩١٠١٤	٠.٢٢٣٣٧	٣.٨٩١٢٨	**٠.٢٠٥٨٣**	٤.٠٢٣٣٤	١.٦٣٩٥٦
	τ_2	٩	٩.٠٦٧٨٥	٠.١٦١٥٧	٩.٠٧٠٧٨	**٠.١٢٦٠٠**	٩.١٤٨٤١	٠.٥٦٢٣٦
	τ_3	١٥	١٤.٩٢٧٧٣	**٠.١٥٢٠٢**	١٤.٩٢١٢٦	٠.١٦٦١٢	١٥.٠٢٥٧٤	٠.٥٠٠٥٤
	τ_4	٢٠	١٩.٩٧٧٨٦	**٠.٠٣٩٤٦**	١٩.٩٧٩٥٤	٠.٠٤١١٤	٢٠.٠٣٨٣٨	٠.٢١٢٨٩
	β_0	٠.٠١	٠.٣٢١٠٦	**٧.٧٠٧٧٤**	٠.٣٢٨٧٣	٧.٨٠٧٤٥	٠.١٤٨٥٠	١٠.١٣٩٠٨
	β_1	٠.١	-٠.١٦٨٤٤	**٢.٨٨٩٩٥**	-٠.١٧١٣٥	٢.٩١٥٧٠	-٠.١٢٠٩١	٣.٤٨٨٨٦

	Δ_1	٦	٦.١٨٦٧٠	**٣.١١٤٧٩**	٦.١٤٧٥٠	٣.٣٠١٠٧	٥.٩٧٣٨٦	٥.٩٤٧٤١
	Δ_2	-٩	-٨.٧٨٤٩٢	**٣٢.٠١٩٨٨**	-٨.٧٤٤٦٥	٣١.٦٢٣٢٨	-٨.٥٤٩٦١	٣٤.٢١٠٤٩
	Δ_3	٥	٤.٨٢٣٨٦	**٣١.٥٢٦٣٠**	٤.٨٢٠٠٦	٣١.٥٤٠١٩	٤.٨٧٠٩٨	٣١.٧٨٢٨٣
	Δ_4	٨	٨.٠٣٢٨٤	**٠.٢٥١٣٥**	٨.٠٤٢٧١	٠.٢٧٠١٥	٨.١٠٥٠٠	١٠.٧٢٤٨٤

جدول رقم (٢): نتائج تجربة المحاكاة لعينة(n=٨٠) مشاهدة وبتكرار ١٠٠٠ مرة وبتوزيع خطأ $e_i \sim N(0, 1)$.

the Case	Parameter	True value	Muggeo (ML)		IRWm- (Tukey)		IRWs- (Tukey)	
			$\hat{\tau}, \hat{\beta}$	MSE	$\hat{\tau}, \hat{\beta}$	MSE	$\hat{\tau}, \hat{\beta}$	MSE
Case ١	τ_1	٤	٣.٩٩٠١٧	٠.٠٢٨٣٥	٣.٩٩٤٦١	**٠.٠٢٨١٧**	٤.٦٥١٣٠	٧.٢٦١١٥
	τ_2	٩	٩.٠٠٥٦٧	**٠.٠٠٥١٤**	٩.٠٠٦٨٤	٠.٠٠٥٦١	٩.٣١٨٦٥	٣.٤٥٩٣٨
	β_0	٠.٠١	٠.٠٧٥٣٠	**٠.٤٠٩٢٣**	٠.٠٧٠٦٠	٠.٤٣٦٠٢	-٠.٦٩٨٢١	١١.١٩٨٨٩
	β_1	٠.١	٠.٠٦٩٩٨	**٠.٠٩٠٧٧**	٠.٠٧٤٤٧	٠.٠٩٥٥٥	٠.١٦٦١٢	٣٨.٩٥٨٥٩
	Δ_1	٦	٦.٠٢٤٣٣	**٠.١١٧٤١**	٦.٠٢١٢٣	٠.١٣٠٨٣	٥.٤٦٦٤٢	٥١.٨٢٢٣٣
	Δ_2	-٩	-٨.٩٩٦٧٤	**٠.٠٤٢٣٨**	-٨.٩٩٨٢٦	٠.٠٤٥٢٧	-٨.٥٣٩٤٠	١٠.٤٠٣٩٧
Case ٢	τ_1	٤	٣.٩٨٨٧٦	**٠.٠٢٨١٩**	٣.٩٩٥٠٠	٠.٠٣٠٠٢	٤.٥٣٧١٨	٤.٥٧٩٣٥
	τ_2	٩	٩.٠٠٩٩٧	**٠.٠٠٨١٩**	٩.٠١٢٤١	٠.٠٠٨٩٢	٩.٤٨١٩٢	٣.٤٠٩٤٩
	τ_3	١٥	١٤.٩٨٨٧١	**٠.٠١٨٥٠**	١٤.٩٨٧٨٦	٠.٠١٩٨٧	١٥.١٤٩٩٨	١.٢٩٧١٠
	β_0	٠.٠١	٠.٠٧٤٨١	**٠.٤١١٠٠**	٠.٠٦٦٩٨	٠.٤٣٥٥٣	-٠.٧٤٠١١	١١.٦٩٣٧٦
	β_1	٠.١	٠.٠٦٩٦٨	**٠.٠٩٠٨٤**	٠.٠٧٧٤١	٠.٠٩٧٦٣	٠.١٨٥٦٢	٣٩.٢٩٢٦٦
	Δ_1	٦	٦.٠٢١٥١	**٠.١١٧٣٢**	٦.٠١٤٥٩	٠.١٣٥٨٦	٥.١٨٤٧٤	٥٢.٥٢٨٨٦
	Δ_2	-٩	-٩.٠٠٨٤٤	**٠.٠٦٣٢٤**	-٩.٠١٢٣٢	٠.٠٧١١٢	-٧.٩٠٩٧٦	٢٧.٥٦٠٠٤
	Δ_3	٥	٥.٠١٢٣١	**٠.٠٢٧٧٠**	٥.٠١٥٩٣	٠.٠٢٩٧٢	٤.٦٥٦١٤	٩.٧٦٧٠٦
Case ٣	τ_1	٤	٣.٩٨٨٢٦	**٠.٠٢٨٢٦**	٣.٩٩٣١١	٠.٠٣١٦٨	٤.٣٠٤٥٩	٢.٣٦٩٣٠

	τ_2	٩	٩.٠١١٦٢	٠.٠٠٨٢٩	٩.٠١٤٣٠	٠.٠٠٩٤١	٩.٣١٦١٩	١.٨٧٧١٢
	τ_3	١٥	١٤.٩٧٤٤٦	٠.٠٣١٤٠	١٤.٩٧٤٢٥	٠.٠٣٣١٠	١٥.١٩٩٢٢	١.١٥٦٢٠
	τ_4	٢٠	١٩.٩٩٧٠٩	٠.٠١١٧٢	١٩.٩٩٧٤٣	٠.٠١٣٢٣	٢٠.٠٦٨٢٥	٠.٤٧٢١٤
	β_0	٠.٠١	٠.٠٦٨٩٠	٠.٤٠٦٦٢	٠.٠٦٤٤١	٠.٤٤٦٩٩	-٠.٤٣٨٧٨	٨.١٠٤١٧
	β_1	٠.١	٠.٠٧١٥٠	٠.٠٩٠٩٠	٠.٠٧٦٣٢	٠.١٠٢٢٣	٠.٠٧٤٧٧	٣٩.٥٦٩٧٥
	Δ_1	٦	٦.٠١٨٧٧	٠.١١٦٥٧	٦.٠١٤١٢	٠.١٤٠٠٨	٥.٥٧٣٠٥	٤٦.٦٠٣٤٣
	Δ_2	-٩	-٩.٠١٤٣٨	٠.٠٦٣٧٣	-٩.٠١٧٨٨	٠.٠٧١٦٨	-٨.٣٨١١٨	١٠.١١٥٥٩
	Δ_3	٥	٥.٠٠٧٤٥	٠.٠٦١٠٣	٥.٠١٤٠٩	٠.٠٦٥٣١	٥.٠٧٠٦٠	١.٧٨٤٩٠
	Δ_4	٨	٨.٠١٤٣٢	٠.٠٧٩٨٥	٨.٠١٠٣٢	٠.٠٨٨٨١	٧.٧٧١٥٥	٥.٤٢٥٦٥

جدول رقم (٣): نتائج تجربة المحاكاة لعينة(n=١٦٠) مشاهدة وبتكرار ١٠٠٠ مرة وبتوزيع خطأ $e_i \sim N(0, 1)$.

he Cas	Parameter	True value	Muggeo (ML)		IRWm- (Tukey)		IRWs- (Tukey)	
			$\hat{\tau}, \hat{\beta}$	MSE	$\hat{\tau}, \hat{\beta}$	MSE	$\hat{\tau}, \hat{\beta}$	MSE
Case ١	τ_1	٤	٣.٩٩٤٢٦	٠.٠٠٩٩٠	٣.٩٩٦٣٣	٠.٠١٠٠١	٤.٧٠١٣٤	٨.٦٠٥٢٣
	τ_2	٩	٨.٩٩٩٦٤	٠.٠٠٢٢٨	٨.٩٩٩٢٦	٠.٠٠٢٤٢	٩.٢٤٧٩٤	٢.٧٧٤٠٥
	β_0	٠.٠١	٠.٠١٩٨٢	٠.١٧٥٦٢	٠.٠٢١٧٤	٠.١٨٩٩٢	-٠.٧٠٤١٣	٧.٧٥٧٠٩
	β_1	٠.١	٠.٠٨٧٠٠	٠.٠٣٣٩٠	٠.٠٨٧١٤	٠.٠٣٦٢٦	٠.٣٨٣٢٠	١.٢١٥٤٥
	Δ_1	٦	٦.٠١٦٦٤	٠.٠٤٩٠٤	٦.٠١٩٤٠	٠.٠٥٢٨٩	٥.٣٥٩٨٨	١١.٩٣٨٨٨
	Δ_2	-٩	-٩.٠٠٣٨٠	٠.٠١٩١٠	-٩.٠٠٦٧٧	٠.٠١٩٩٦	-٨.٦٣١١٥	٨.٧٢١١٥
Case ٢	τ_1	٤	٣.٩٩٤٥٣	٠.٠٠٩٩٠	٣.٩٩٦٥٢	٠.٠١٠٠٣	٤.٥٣١٥٤	٤.٧٢٤٢١
	τ_2	٩	٩.٠٠٠٨٤	٠.٠٠٣٤٩	٩.٠٠٠٩٨	٠.٠٠٣٧٢	٩.٤٤٧٨٩	٣.٢٢٣٧٨
	τ_3	١٥	١٤.٩٩٥٤٢	٠.٠٠٨٢٥	١٤.٩٩٥٩٦	٠.٠٠٨٧٣	١٥.١١٩٦٨	١.١٧٩٠٧
	β_0	٠.٠١	٠.٠١٨٩٨	٠.١٧٦١٦	٠.٠٢١١٠	٠.١٩١٤١	-٠.٧٤٣٠٧	٨.٣٢٤٤٨
	β_1	٠.١	٠.٠٨٧١٩	٠.٠٣٣٨١	٠.٠٨٧٢٥	٠.٠٣٦٢٦	٠.٤٢٣٩٢	٢.١٣٦٩٤
	Δ_1	٦	٦.٠١٦٩٣	٠.٠٤٩٣٣	٦.٠١٩٦٨	٠.٠٥٣٦٥	٥.٠١٢٢٣	٢٠.١٩٥٢

							٨
	Δ_2	-٩	-٩.٠١٠٣٤	٠.٠٢٩٠٧	-٩.٠١٤١٤	٠.٠٣١٠٥	-٨.١٣٧٨٩	١٥.٩١١٩٩
	Δ_3	٥	٥.٠٠٥٥٥	٠.٠١١٨٥	٥.٠٠٧١٠	٠.٠١٢٨٤	٤.٧٩٤٤٨	١١.٢٤٥٠٥
Case ٣	τ_1	٤	٣.٩٩٣٨٨	٠.٠١٠٢٠	٣.٩٩٦٥٤	٠.٠١٠٣٢	٤.٣٢٨٣٩	٢.٠٤٠٣٢
	τ_2	٩	٩.٠٠١٤٠	٠.٠٠٣٤٢	٩.٠٠١٣٣	٠.٠٠٣٦٨	٩.٣٤٦٦٣	٢.٢٦٥٠٩
	τ_3	١٥	١٤.٩٩٢٤٢	٠.٠١١٧١	١٤.٩٩١٩٤	٠.٠١٢٤١	١٥.٢٤٥٧٣	١.٢٦٨٥١
	τ_4	٢٠	١٩.٩٩٤١٣	٠.٠٠٤٨٦	١٩.٩٩٣٧٤	٠.٠٠٥٣٤	٢٠.٠٣٦٦٧	٠.٦٢٤٤٣
	β_0	٠.٠١	٠.٠١٨٨٢	٠.١٧٥٩٣	٠.٠١٩٦٩	٠.١٩٢٥٣	-٠.٥٢٣٧٥	٥.٩٦٢٩١
	β_1	٠.١	٠.٠٨٦٨٥	٠.٠٣٤٢٥	٠.٠٨٧٦١	٠.٠٣٦٩٨	٠.٣٠٨٧٠	٠.٩٢٢٥٦
	Δ_1	٦	٦.٠١٦٤٠	٠.٠٤٩١١	٦.٠١٩٢٨	٠.٠٥٣٧٧	٥.٣٢٦١٤	٨.٩٦٧٨٢
	Δ_2	-٩	-٩.٠١٠٨٠	٠.٠٢٨٨٨	-٩.٠١٥٧٠	٠.٠٣١٠٧	-٨.٢٥٤٨٩	١٠.٥٦٩٠٠
	Δ_3	٥	٥.٠٠٢٢١	٠.٠٢٦٢٥	٥.٠٠١٩٤	٠.٠٢٨٥٦	٥.٠٣٩٧٨	٣.٢٥٠١٠
	Δ_4	٨	٧.٩٩٥٠٦	٠.٠٣٢٥٦	٧.٩٩٨٤٩	٠.٠٣٤٠٧	٧.٦٥٣٧٨	٥.٩٩٨٦٥

جدول رقم (٤): نتائج تجربة المحاكاة لعينة(n=٤٠) مشاهدة وبتكرار ١٠٠٠ مرة وبتوزيع خطأ ملوث ٩٥٪ يتبع $e_i \sim N(0,\ 0.01)$ و ٥٪ يتبع $e_i \sim N(0, 3)$.

he Case	Parameter	True value	Muggeo (ML)		IRWm- (Tukey)		IRWs- (Tukey)	
			$\hat{\tau}, \hat{\beta}$	MSE	$\hat{\tau}, \hat{\beta}$	MSE	$\hat{\tau}, \hat{\beta}$	MSE
Case ١	τ_1	٤	٣.٩٧٥٣٧	٠.٠٣١٠٨	٣.٩٧٩١٥	٠.٠١٨٢٥	٤.٤٥٠٠٤	٤.٥٠٣٠٦
	τ_2	٩	٩.٠٠٨٢٣	٠.٠٠٦١٩	٩.٠١٣٧٣	٠.٠١٠٠٦	٩.٣١٣٨١	٣.٢٩٦٤٨
	β_0	٠.٠١	٠.٠٢٧١٥	٠.٢٤٨٥٠	٠.٠١٨٨٥	٠.١٨١٥٦	-٠.٥٣٣٧٢	٦.٤٩٠١٦
	β_1	٠.١	٠.٠٧٧٧١	٠.٠٧١٥٠	٠.٠٨٩٤١	٠.٠٣٧٧٣	٠.٣١٧٦٥	٠.٩٣١٠١
	Δ_1	٦	٥.٩٩٧٨٨	٠.٠٩٨٠٢	٥.٩٧٣٩٠	٠.٠٨٤٧٩	٥.٣٥٩٧٠	٧.٧٨٦٠٧
	Δ_2	-٩	-٨.٩٧٧٤٤	٠.٠٥٣٥٩	-٨.٩٦٣٣٧	٠.٠٤٩٦٨	-٨.٤٧٠١٣	١٢.٨٥٦٧٦

Case ٢	τ_1	٤	٣.٩٧٧٦٢	٠.٠٢٩٠١	٣.٩٩٢٣٩	٠.٠٨٥٤٤	٤.٥٩٠٥٥	٥.٠٩٣٤٨
	τ_2	٩	٩.٠١٩٢١	٠.٠٥١٨٥	٩.٠٠٩٣٦	٠.٠٩٣٧٣	٩.٤٥٠٥٩	٢.٨٧٦٠٥
	τ_3	١٥	١٤.٩٨٩٠٠	٠.٠٥٧٠٢	١٤.٩٨٨٤٣	٠.٠٥٢٩٩	١٥.١٩٩٣٠	٢.٤٢٣٧٤
	β_0	٠.٠١	٠.٠٣٤٢٥	٠.٣٠٦٠١	٠.٠١٥٤٠	٠.١٩٣٨٠	-٠.٧٧٥٣٧	٩.٤٨٤١٦
	β_1	٠.١	٠.٠٧٥٠١	٠.٠٨٦٥٦	٠.٠٨٦٩٨	٠.٠٦٤٧٥	٠.٤٠٦٤٤	١.٣٥٧٧٠
	Δ_1	٦	٦.٠٠٠٨١	٠.١٠٦٢٥	٥.٩٧٣٠٠	٠.٣٠٣٦٠	٤.٩٥٨١٦	١٣.٦٢٥٩١
	Δ_2	-٩	-٨.٩٧٠٤١	٠.٤٦٧٧٧	-٨.٩٤٧١٠	٠.٥٣١٢٣	-٧.٩٤٣٩٥	١٤.٥٠٠٩١
	Δ_3	٥	٤.٩٩٣٨٨	٠.٤٠٠٦٢	٤.٩٨٧٤٢	٠.٢٨٤١٤	٤.٦٧٠١٦	٢.٢١٣٦٦
Case ٣	τ_1	٤	٣.٩٨٥٣٥	٠.٠٢٤٢٧	٣.٩٨٢٠٢	٠.٠١٩٧٢	٤.١٨٠٤١	١.٥٣٩٧٠
	τ_2	٩	٩.٠١٩٩١	٠.٠٦٠١٣	٩.٠٢٠٩٣	٠.٠٧٧٩٨	٩.١٨٥٠٢	١.٢٦٣٨٣
	τ_3	١٥	١٤.٩٧٦٤٤	٠.٠٥٩٧٣	١٤.٩٨٢٢٣	٠.٠٦٦١٢	١٥.١٠٩٨١	٠.٥٣٥٢٩
	τ_4	٢٠	١٩.٩٩٢٥٦	٠.٠١١٢٣	١٩.٩٩٢٠٦	٠.٠٠٥٤٣	٢٠.٠٤٤٥٩	٠.١٢٥٢٠
	β_0	٠.٠١	٠.٠٢٣٥٧	٠.٢٩٤١٠	٠.٠٢١٠٦	٠.٢٠٦٠٣	-٠.٢٩٠٤٤	٤.٣٧١٦٧
	β_1	٠.١	٠.٠٨٢١٢	٠.٠٧٣٢٨	٠.٠٨٣١٣	٠.٠٥٦٨١	٠.٢٠٦١١	٠.٥٣٦٣١
	Δ_1	٦	٦.٠٠٣٩١	٠.٠٩٤٩٠	٦.٠٠٢٧٧	٠.١٨٧٨١	٥.٦٥٢٣٣	٤.٤٨٨٨٨
	Δ_2	-٩	-٨.٩٧٧٠٥	٠.٥١٥٤٧	-٨.٩٦٩٥٤	٠.٤٨٢٠٥	-٨.٧٠٦٧٤	٧.٧٦٩٨٠
	Δ_3	٥	٤.٩٧٦٣٩	٠.٤٧٣٩٦	٤.٩٧١٩٠	٠.٣٥٧٧٧	٥.٠٩٦٦٦	٣.٥٧٩٠٦
	Δ_4	٨	٨.٠٠٧٥٦	٠.٠٦٨٣٧	٨.٠٠٢٧٧	٠.٠٣٠٥٧	٧.٨٧٢٥١	١.٠٦٧٥١

جدول رقم (٥): نتائج تجربة المحاكاة لعينة(n=٨٠) مشاهدة وبتكرار ١٠٠٠ مرة وبتوزيع خطأ ملوث ٩٥٪ يتبع $e_i \sim N(0,\ 0.01)$ و ٥٪ يتبع $e_i \sim N(0,3)$

the Case	Parameter	True value	Muggeo (ML)		IRWm- (Tukey)		IRWs- (Tukey)	
			$\hat{\tau}, \hat{\beta}$	MSE	$\hat{\tau}, \hat{\beta}$	MSE	$\hat{\tau}, \hat{\beta}$	MSE
Case ١	τ_1	٤	٣.٩٩٢٧٩	٠.٠١٣٠٠	٣.٩٩٦٢١	٠.٠٠٦٨٣	٤.٤٨٤٧٢	٥.٦١٦٩٥
	τ_2	٩	٩.٠٠٣٧٥	٠.٠٠٢٥٧	٩.٠٠١٣٩	٠.٠٠٠٧٢	٩.١٩٧٨٢	٢.٤٠٤٥٤
	β_0	٠.٠١	٠.٠٤٣٢٨	٠.١٧٥٧٣	٠.٠٢٩٠٩	٠.٢٣٠٩٧	-٠.٣٩٧٦٩	١٢.٤٧٤٦٥
	β_1	٠.١	٠.٠٨٢١٩	٠.٠٤١٨٣	٠.٠٨٤٧٥	٠.١٤٠٠٥	٠.١٧٩٤٠	١٢.٨٤٩١٠
	Δ_1	٦	٦.٠١٣٤٦	٠.٠٦٠٥٢	٦.٠١٢٦٩	٠.١٣٢١٢	٥.٥٤٩٣٨	١٨.١٢٦٢٤
	Δ_2	-٩	-٨.٩٩٦٩٢	٠.٠٢٣٣٩	-٨.٩٩٧٧١	٠.٠٠٤١١	-٨.٦٢٧٤٧	٣.٤٩٣٨٩
Case ٢	τ_1	٤	٣.٩٩٠٠٥	٠.٠١٤٥٩	٤.٠٠٠٦٤	٠.٠٠٠٦١	٤.٥٨٧٩٠	٥.١٣٥٠٦
	τ_2	٩	٩.٠٠٦٧٨	٠.٠٠٣٩٧	٩.٠٠١٨١	٠.٠٠١٠١	٩.٥٤٤٩٤	٣.٨٠٣٠٢
	τ_3	١٥	١٤.٩٩٦٢٦	٠.٠٠٦٩٠	١٤.٩٩٩٢٨	٠.٠٠٠١٧	١٥.٠٩٣٢٦	٢.١١١٠٦
	β_0	٠.٠١	٠.٠٤٦١٣	٠.٢١٣٥٣	٠.٠١٠٥٥	٠.٠١٠٢٢	-٠.٦٩٣٠٧	١٥.٠٦٠١٧
	β_1	٠.١	٠.٠٧٧٩٠	٠.٠٥٦١٤	٠.١٠٠٥٦	٠.٠٠١٦١	٠.٣١٠٩٥	١٢.٧٨٦٥٧
	Δ_1	٦	٦.٠١٣٩٦	٠.٠٧٠٩٩	٥.٩٩٧٥٨	٠.٠٠٥٦٨	٥.٠٣٨٩٢	٢٤.٦٥١٣٢
	Δ_2	-٩	-٨.٩٩٩٦١	٠.٠٣٢٣١	-٨.٩٩٨٨٠	٠.٠٠٤٤٠	-٨.٠٤٥٧٨	٢٠.٣٥٨٣٥
	Δ_3	٥	٥.٠٠٦٢٣	٠.٠١٢٣٩	٥.٠٠٠١٩	٠.٠٠٠٢٨	٤.٧٨٦٣٨	١٠.٥٦٨٣٢
Case ٣	τ_1	٤	٣.٩٩١٦٧	٠.٠١٢٩٢	٣.٩٩٩٢٥	٠.٠٠٤٩٤	٤.٣٦٦٨٢	٢.٥٧٨٦٦
	τ_2	٩	٩.٠٠٧١١	٠.٠٠٣٧٤	٩.٠٠٠٨٥	٠.٠٠٠٣٨	٩.٣٤٥١٣	٢.١٥٧٥٧
	τ_3	١٥	١٤.٩٩٥٨٤	٠.٠١٠٧٧	١٤.٩٩٩٦٩	٠.٠٠٠٢٧	١٥.٢٥١٩٦	١.٢١١٧٢
	τ_4	٢٠	١٩.٩٩٧٣٩	٠.٠٠٤١٥	٢٠.٠٠٠٤٣	٠.٠٠٠١٩	٢٠.٠٤١٦٨	٠.٦٦٢٣٦
	β_0	٠.٠١	٠.٠٣٨٤٢	٠.١٩١٠٤	٠.٠٢٥٨٥	٠.٢٣٧٠٨	-٠.٥٧٩٢٦	٦.٦٥٣٨٢
	β_1	٠.١	٠.٠٨٣٥٣	٠.٠٤٧٧٩	٠.٠٨٨٤٤	٠.١٣٧١٩	٠.٣٣٨٠٧	٠.٩٧٠٧٥
	Δ_1	٦	٦.٠٠٨٠٠	٠.٠٦٥٠١	٦.٠١١٤٦	٠.١٣٠٤٠	٥.٢٨٥١٤	٩.٢٣٨٥٣
	Δ_2	-٩	-٩.٠٠١٤٦	٠.٠٣١٠٤	-٩.٠٠٠٥٣	٠.٠٠٢٦٩	-٨.٢١٦٤١	١٠.٩٥٠٤٨
	Δ_3	٥	٥.٠٠٨٩٠	٠.٠٢٣٦٢	٥.٠٠١٤١	٠.٠٠٠٦٦	٤.٩٦٦٧٩	٧.١٨٠٣٦

	Δ_4	٨	٧.٩٩٧٩٠	٠.٠٣٦٢٩	٧.٩٩٨٠٣	٠.٠٠١٦٧	٧.٧٧٧٩٨	٨.٨٠٦٩٢

جدول رقم (٦): نتائج تجربة المحاكاة لعينة(n=١٦٠) مشاهدة وبتكرار ١٠٠٠ مرة وبتوزيع خطأ ملوث ٩٥٪ يتبع $e_i \sim N(0,\ 0.01)$ و ٥٪ يتبع $e_i \sim N(0,3)$.

the Case	Parameter	True value	Muggeo (ML)		IRWm- (Tukey)		IRWs- (Tukey)	
			$\hat{\tau}, \hat{\beta}$	MSE	$\hat{\tau}, \hat{\beta}$	MSE	$\hat{\tau}, \hat{\beta}$	MSE
Case ١	τ_1	٤	٣.٩٩٤٦٦	٠.٠٠٤١٩	٤.٠٠٠٠٤	٠.٠٠٠٠٩	٤.٤٧١٠٠	٥.٥٢٣٨٨
	τ_2	٩	٩.٠٠٢٤١	٠.٠٠٠٩٧	٨.٩٩٩٨١	٠.٠٠٠٠٢	٩.١٧٧٧١	٢.٢٨٠٦١
	β_0	٠.٠١	-٠.٠٠٩٠٥	٠.٠٧٦٧٨	٠.٠٠٩٦٩	٠.٠٠١٩٤	-٠.٤٩٧٤٧	٥.٣٧٠٨٧
	β_1	٠.١	٠.١٠١٦٨	٠.٠١٣٩٤	٠.٠٩٩٧٣	٠.٠٠٠٣٦	٠.٣٠١١٦	٠.٨١٦٨٥
	Δ_1	٦	٥.٩٩٠٥٨	٠.٠١٩٩٠	٦.٠٠١٠٧	٠.٠٠٠٥٤	٥.٤٥٦٣١	٦.٢٨٧٦٥
	Δ_2	-٩	-٨.٩٩٢٠٢	٠.٠٠٧٧٦	-٩.٠٠٠٧٩	٠.٠٠٠٢٠	-٨.٦٥٥٧٣	٣.٢٧٣٢٣
Case ٢	τ_1	٤	٣.٩٩٣٦٣	٠.٠٠٤٣٨	٤.٠٠٠١٧	٠.٠٠٠٠٩	٤.٤٥٥١٦	٤.٣٦٩٦٦
	τ_2	٩	٩.٠٠١٥٩	٠.٠٠١٣٤	٨.٩٩٩٨٦	٠.٠٠٠٠٤	٩.٣٧٥٠٤	٣.٠٢٦٤١
	τ_3	١٥	١٥.٠٠١٠٧	٠.٠٠٣٢٨	١٤.٩٩٩٨٥	٠.٠٠٠٠٨	١٥.٠١٩٢٠	١.٥٧٧٩٩
	β_0	٠.٠١	-٠.٠٠٣٩٣	٠.٠٧٦١٨	٠.٠٠٩٣٤	٠.٠٠١٩٨	-٠.٥٧٨٠٢	٦.٢٤٣٠٥
	β_1	٠.١	٠.٠٩٨٥٧	٠.٠١٤٢٣	٠.٠٩٩٧٧	٠.٠٠٠٣٧	٠.٣٣٢٧٢	٠.٩٤٥٤٤
	Δ_1	٦	٥.٩٩٣٤٧	٠.٠٢٠٠٩	٦.٠٠١٣٤	٠.٠٠٠٥٥	٥.٢١٣٨٢	١١.٠٦٤٣٧
	Δ_2	-٩	-٨.٩٨٩٤٩	٠.٠١١٨٣	-٩.٠٠١٤١	٠.٠٠٠٣٠	-٨.٢٥٨٥٢	٩.٨٢٣٩٩
	Δ_3	٥	٤.٩٩٧٢٢	٠.٠٠٤٩١	٥.٠٠٠٣٢	٠.٠٠٠١٣	٤.٧٨١٣٦	٣.٠٤٧٩١
Case ٣	τ_1	٤	٣.٩٩٤٢٠	٠.٠٠٤٢٣	٤.٠٠٠٢٦	٠.٠٠٠٠٩	٤.٣٦٧٩٩	٢.٥٧٨٣٧
	τ_2	٩	٩.٠٠١٧٠	٠.٠٠١٣٩	٨.٩٩٩٧١	٠.٠٠٠٠٤	٩.٣٦٢٢٤	٢.٣٣٠٧٨
	τ_3	١٥	١٤.٩٩٩٥٧	٠.٠٠٥٠٢	١٤.٩٩٩٩٧	٠.٠٠٠١١	١٥.٢٧١٣١	١.٣٦٠٥٠
	τ_4	٢٠	١٩.٩٩٧٩٥	٠.٠٠٢٠٥	١٩.٩٩٩٦٩	٠.٠٠٠٠٥	٢٠.٠٠٣٨٣	٠.٥٢٧٣٥

	β_0	٠.٠١	-٠.٠٠٣٤٧	٠.٠٧٤٥٧	٠.٠٠٩٧٨	٠.٠٠٢٠٠	-٠.٥٩٢٨٩	٦.٤٢٦٦٤
	β_1	٠.١	٠.٠٩٩٢٨	٠.٠١٣٨٩	٠.٠٩٩٧٢	٠.٠٠٠٣٧	٠.٣٣٩٧٤	٠.٩٦٩٧٨
	Δ_1	٦	٥.٩٩٣٢٧	٠.٠٢٠٠٤	٦.٠٠١٥٥	٠.٠٠٠٥٥	٥.٢٦١٦٢	٩.٥٩٦٤٠
	Δ_2	-٩	-٨.٩٩٠٦٠	٠.٠١٢٣٧	-٩.٠٠١٣٤	٠.٠٠٠٣٠	-٨.١٨٨٣٢	١١.٣٩٣٥٦
	Δ_3	٥	٤.٩٩٥٥٨	٠.٠١٢٣٥	٥.٠٠٠٠٩	٠.٠٠٠٢٨	٤.٩٧٨٤٩	١٦.١٣١٢١
	Δ_4	٨	٨.٠٠٠١٥	٠.٠١٤٢٤	٧.٩٩٩٣٦	٠.٠٠٠٣٥	٧.٧٠٩٣٥	١٧.٦٥٢٧٦

جدول رقم (٧): نتائج تجربة المحاكاة لعينة(n=٤٠) مشاهدة وبتكرار ١٠٠٠ مرة وبتوزيع خطأ ملوث ٩٠٪ يتبع $e_i \sim N(0,\ 0.01)$ و ١٠٪ يتبع $e_i \sim N(0,3)$.

the Case	Parameter	True value	Muggeo (ML)		IRWm- (Tukey)		IRWs- (Tukey)	
			$\hat{\tau}, \hat{\beta}$	MSE	$\hat{\tau}, \hat{\beta}$	MSE	$\hat{\tau}, \hat{\beta}$	MSE
Case ١	τ_1	٤	٣.٩٤١٨٧	٠.٠٧٣٦٠	٣.٩٦٩٢٨	٠.٠٥٢٨٩	٤.٦٦٦٦٧	٧.٠٥٤٧٨
	τ_2	٩	٩.٠١٩٥٦	٠.٠١٥٨٨	٩.٠١٤٦٥	٠.٠٢٩٠٠	٩.٣٤٩٣٧	٤.٤٦٣٨٤
	β_0	٠.٠١	٠.١٥١٥٧	١.٣٢٥٥٤	٠.١٠٤٩٢	٠.٩٩٢٢٥	-٠.٥٩٥٢٩	٨.٢٧٠٦٨
	β_1	٠.١	-٠.٠١٣٠٠	٠.٥٦٦٧٣	٠.٠٣٧٤٧	٠.٤٦٦٢٥	٠.٣٢٥٠٢	١.٥٠٥٢١
	Δ_1	٦	٦.٠٦١٩١	٠.٥٨١٤٥	٥.٩٦٩٣٠	١.٦٧٥٧٠	٥.٠٩٠٣٨	١٣.٦٧٢٢١
	Δ_2	-٩	-٨.٩٤٩٣٨	٠.١٠٩٩٧	-٨.٩٠٦٨٧	١.٢٣٤٤٩	-٨.٣٨٨٥٨	١١.٨٣٤٦١
Case ٢	τ_1	٤	٣.٩٤٣١١	٠.٠٧١١٦	٣.٩٨٥٠٢	٠.١٢٠٨٩	٤.٧١١٠٨	٦.١٥٠٦٦
	τ_2	٩	٩.٠٥٤١٧	٠.١٤٨٩٦	٩.٠٣٣٧٩	٠.١٧٨٧٣	٩.٦٢١٨٦	٤.٦٣٧٨٨
	τ_3	١٥	١٤.٩٦١٢٥	٠.١٢١٤٣	١٤.٩٧٢٥٢	٠.٠٩١٢٥	١٥.٢٤٤٣٩	٢.٢٣٨٦٤
	β_0	٠.٠١	٠.١٤١٩٩	١.٣١٧١٧	٠.٠٥٣٧٤	١.٢١٧٢٢	-٠.٩٦٢٢٧	١٢.٦٩١٠١
	β_1	٠.١	-٠.٠٠٤٩٧	٠.٥٤٩٨٢	٠.٠٥١٠٦	٠.٤٥٣٠٦	٠.٤٦١١١	٢.٠١٥٠٦
	Δ_1	٦	٦.٠٥٢٩٢	٠.٥٧٦١٠	٥.٩٩٧٧٦	٠.٦٨١٠٣	٤.٦٩٧٩١	١٨.٤٩٢٣٧
	Δ_2	-٩	-٨.٨٩٦٣٢	٦.٦٠٢٩٤	-٨.٨٦٧٩٩	٦.٦١٨٩٢	-٧.٦٥٨١٠	٢٣.٣٤٢٥٩
	Δ_3	٥	٤.٩٤٦٤٩	٦.٤٩٩٧٣	٤.٩١٩٤٠	٦.٣٠٧٥٢	٤.٥٩٨٨٤	٨.٩٧٦٩٧
Ca	τ_1	٤	٣.٩٣٦٩٤	٠.٠٦٨٩٢	٣.٩٦٧٩٥	٠.٠٣٦٨٩	٤.٣١٤٧١	٢.٩٠٣٥١

se ٣	τ_2	٩	٩.٠٣٦٤١	٠.٠٧٧٢٦	٩.٠٢٧٣٢	٠.٠٧٤٤٢	٩.٢٥٧٩٤	١.٥٨٥٦١
	τ_3	١٥	١٤.٩٧١٦٦	٠.١٦٩١٧	١٤.٩٦٦٦٢	٠.٠٨٥٠٦	١٥.١٩٠٨٣	٠.٩٨٥٩٤
	τ_4	٢٠	١٩.٩٩٢٠١	٠.٠٢٧٠٦	١٩.٩٩٢٠٧	٠.٠١٣١٧	٢٠.٠٩٨٢١	٠.٤٥٤٦٢
	β_0	٠.٠١	٠.١٦٨٥٤	١.٤٢٧٧٧	٠.٠٩٦٤١	٠.٧٩٧٢٧	-٠.٣٨٤٨١	٦.٤٧٨٦٢
	β_1	٠.١	-٠.٠١٩٧١	٠.٦٠٨٣٦	٠.٠٣٥٠١	٠.٤٨٣٨٤	٠.٢٢٥٥٦	١.١٩٢٠٧
	Δ_1	٦	٦.٠٦٢٢٦	٠.٦٣٥١٣	٦.٠٢٨١٠	٠.٥٣٦٦٣	٥.٥٢١٥٨	٧.٠٤٣٣١
	Δ_2	-٩	-٨.٩٥١٤٨	٠.٦٥٥٢٩	-٨.٩٤٩٢١	٠.٤٢٣١٩	-٨.٤٢٦٩٤	٧.٨٩٠٠١
	Δ_3	٥	٤.٩٩١٠٥	٠.٦٥٥٥٤	٤.٩٦٤٢٨	٠.٣٩٦٨٣	٥.٠٩٢٤٢	٠.٦١٤٧٠
	Δ_4	٨	٨.٠٠٣٧٠	٠.١٨١٨٠	٨.٠٠٢٨٩	٠.٠٧١٢١	٧.٦٨٧٨١	٢.٥١٧٦٥

جدول رقم (٨): نتائج تجربة المحاكاة لعينة(n=٨٠) مشاهدة وبتكرار ١٠٠٠ مرة وبتوزيع خطأ ملوث ٩٠٪ يتبع $e_i \sim N(0,\ 0.01)$ و ١٠٪ يتبع $e_i \sim N(0,3)$.

the Case	Parameter	True value	Muggeo (ML)		IRWm- (Tukey)		IRWs- (Tukey)	
			$\hat{\tau}, \hat{\beta}$	MSE	$\hat{\tau}, \hat{\beta}$	MSE	$\hat{\tau}, \hat{\beta}$	MSE
Case ١	τ_1	٤	٣.٩٨١٨٨	٠.٠٢٦٣٤	٣.٩٩٥٤٥	٠.٠٠٤٨٦	٤.٤١٣٦٠	٣.٧٥٣٣٧
	τ_2	٩	٩.٠٠٦٧٠	٠.٠٠٥٧٤	٩.٠٠٢٧٠	٠.٠٠٤٣٠	٩.٢٥٤٩٢	٣.١٤٥٨٤
	β_0	٠.٠١	٠.٠٥٩٤٨	٠.٣١٦٩٦	٠.٠١٩٥٨	٠.٠٣١٣٦	-٠.٥٨١٢٠	٨.٤٣٨٠١
	β_1	٠.١	٠.٠٦٩٧٨	٠.٠٧٩٧٤	٠.٠٩٤٥٤	٠.٠٠٩٤٠	٠.٣٠٩٠٧	١.٠٤٧٧٠
	Δ_1	٦	٦.٠١٣٦٢	٠.١١١٠٨	٦.٠٠٠٢٤	٠.٠٢٣١٢	٥.٣٣٧١٩	٨.٨٩٣٨٠
	Δ_2	-٩	-٨.٩٨٤٢٤	٠.٠٤٨٤٣	-٨.٩٩٤٩٩	٠.٠١٤١٦	-٨.٥٧٩٨٤	٥.٣٨٥٣١
Case ٢	τ_1	٤	٣.٩٨١٠٩	٠.٠٢٦٧٠	٣.٩٩٦٩٩	٠.٠٠٣٠٨	٤.٥٣٠٢٨	٤.٠٣٠٤١
	τ_2	٩	٩.٠٠٨٢٩	٠.٠٠٩٣٧	٩.٠٠٣٦٦	٠.٠٠٤٥٠	٩.٥٤١٨٨	٤.٠٥٩٣٠
	τ_3	١٥	١٤.٩٨٩٦٤	٠.٠١٥٤١	١٤.٩٩٨٨٥	٠.٠٠٠١٨	١٥.١٠٨٥٨	١.٧٨٥٧٤
	β_0	٠.٠١	٠.٠٤٢٦٤	٠.٣٠٥٢٠	٠.٠١٤٤٣	٠.٠٢٢٤٧	-٠.٨٣٥٥٣	١٠.٤٧٣٩٨
	β_1	٠.١	٠.٠٧٣٣٧	٠.٠٧٧٤١	٠.٠٩٧٤١	٠.٠٠٥٦٥	٠.٤٤٠٢٤	١.٥٥٩٨٧
	Δ_1	٦	٦.٠٠٨٩٢	٠.١١٢٤٨	٥.٩٩٦١٣	٠.٠١٨٦٤	٤.٩٩٦٧٣	١٦.٧٧٦٢

								٤
	Δ_2	-٩	-٨.٩٩٢٤٧	٠.٠٦٢٤٨	-٨.٩٩٤٣٤	٠.٠١٣٤٣	-٧.٩٥٧٩٥	١٣.٨٨٩٣١
	Δ_3	٥	٥.٠٠٦٢٤	٠.٠٢٤١٣	٥.٠٠٠١٨	٠.٠٠٠٢٨	٤.٦٩٦٣٢	٢.٠٢٣٩٦
Case ٣	τ_1	٤	٣.٩٨٣١٠	٠.٠٢٥٦٢	٣.٩٩٧٦٩	٠.٠٠٢٨٢	٤.٣٥١٥٥	٢.٤٨٨٥٨
	τ_2	٩	٩.٠٠٩٩٣	٠.٠٠٩٠٩	٩.٠٠١٥٨	٠.٠٠٠٥٥	٩.٣٤٦٥٨	٢.٢٥٩٠٩
	τ_3	١٥	١٤.٩٨١٨٥	٠.٠٢٣٠١	١٤.٩٩٩٤٠	٠.٠٠٠٣٨	١٥.٢٥١٣٦	١.٢٥٢٠٠
	τ_4	٢٠	٢٠.٠٠٢٣٩	٠.٠٠٩٣٥	٢٠.٠٠٠٢٢	٠.٠٠٠٣٨	٢٠.٠١٧٩٧	٠.٦٢٠٨٣
	β_0	٠.٠١	٠.٠٥١٣٥	٠.٣١٨١٤	٠.٠١٤٧٢	٠.٠١٨٧٣	-٠.٥٢٧٢٢	٦.٤٩٧٨٨
	β_1	٠.١	٠.٠٧٣٠٢	٠.٠٧٦٥٧	٠.٠٩٧٥١	٠.٠٠٦٠٦	٠.٣١٠٤٩	٠.٩٠٠٧٩
	Δ_1	٦	٦.٠٠٩٧٧	٠.١١١٣١	٥.٩٩٨٦٧	٠.٠١٠٤١	٥.٣٦٤١٩	١٤.٩٢٧٨٤
	Δ_2	-٩	-٨.٩٩٦٧٩	٠.٠٦٠٦١	-٨.٩٩٦٨٧	٠.٠٠٤٤١	-٨.٢٧٥١١	١٦.٥٣٤٩٠
	Δ_3	٥	٥.٠٠٤٢٤	٠.٠٤٩٨٤	٥.٠٠١٦١	٠.٠٠١٢٥	٥.١١٧٨١	١.٠١٤٢٥
	Δ_4	٨	٨.٠١٧٧٢	٠.٠٦٥٩١	٧.٩٩٧٧٩	٠.٠٠١٩٠	٧.٦٧٥٨٤	٧.٣٠٧١٢

جدول رقم (٩): نتائج تجربة المحاكاة لعينة(n=١٦٠) مشاهدة وبتكرار ١٠٠٠ مرة وبتوزيع خطأ ملوث ٩٠٪ يتبع $e_i \sim N(0,\ 0.01)$ و ١٠٪ يتبع $e_i \sim N(0,3)$.

the Case	Parameter	True value	Muggeo (ML)		IRWm- (Tukey)		IRWs- (Tukey)	
			$\hat{\tau}, \hat{\beta}$	MSE	$\hat{\tau}, \hat{\beta}$	MSE	$\hat{\tau}, \hat{\beta}$	MSE
Case ١	τ_1	٤	٣.٩٩٠٧٩	٠.٠٠٩٨٥	٤.٠٠٠٠٩	٠.٠٠٠١٠	٤.٣٤٧٨١	٤.٢٢٠٢١
	τ_2	٩	٩.٠٠٤٠٩	٠.٠٠٢٢٤	٨.٩٩٩٨٠	٠.٠٠٠٠٢	٩.١٨٤٠٢	٢.١٤٢٤٥
	β_0	٠.٠١	٠.٠٣٢٧١	٠.١٤٥٢٠	٠.٠٠٩٤١	٠.٠٠٢٠٥	-٠.٣٩٤٨٧	٤.٤٠١٦٦
	β_1	٠.١	٠.٠٨٤٨٧	٠.٠٣٢٦٩	٠.٠٩٩٨٦	٠.٠٠٠٣٩	٠.٢٥٨٠٨	٠.٦٥٨١٩
	Δ_1	٦	٦.٠٠٧٢٢	٠.٠٤٦٥٨	٦.٠٠٠٨٧	٠.٠٠٠٥٩	٥.٦٧٦٦٩	١٤.٤٦٥٦٣
	Δ_2	-٩	-٨.٩٩٣٥٣	٠.٠١٧٧٣	-٩.٠٠٠٦٩	٠.٠٠٠٢٠	-٨.٨٣٢٨٤	١٢.٤٥٦٧١
Cas	τ_1	٤	٣.٩٩١١١	٠.٠٠٩٤٩	٤.٠٠٠١١	٠.٠٠٠١٠	٤.٣٨٥٦	٣.١٨٨٦٦

e ٢	τ_2	٩	٩.٠٠٥٧٩	٠.٠٠٣٠٤	٨.٩٩٩٨٣	٠.٠٠٠٠٤	٩.٣٨٨٧٥	٢.٨٩٣٣٩
	τ_3	١٥	١٤.٩٩١٨٦	٠.٠٠٧١٢	١٤.٩٩٩٩٦	٠.٠٠٠٠٩	١٥.٠٥٤٧٨	١.٠٩٧٦٩
	β_0	٠.٠١	٠.٠٢٧٣٧	٠.١٤٧٣٩	٠.٠٠٩١٥	٠.٠٠٢٠٧	-٠.٥٤٨٢٣	٥.٩٠٦٢٤
	β_1	٠.١	٠.٠٨٦٢٢	٠.٠٣٢٣٦	٠.٠٩٩٧٥	٠.٠٠٠٣٩	٠.٣٢٤٢٦	٠.٩١٣٤١
	Δ_1	٦	٦.٠٠٦٤٩	٠.٠٤٦٥٩	٦.٠٠١٢٩	٠.٠٠٠٥٩	٥.٢٣٥١٢	١١.٤٧٧٤٩
	Δ_2	-٩	-٩.٠٠٢٠٩	٠.٠٢٦٢١	-٩.٠٠١٢٢	٠.٠٠٠٣١	-٨.٢١٤٩٨	٢٣.٢٧٤٦٢
	Δ_3	٥	٥.٠٠٥٥٨	٠.٠١٠١٠	٥.٠٠٠٢٤	٠.٠٠٠١٤	٤.٧٥٩٤٥	١٤.٩٨٧٨٥
Cas e ٣	τ_1	٤	٣.٩٩١٣٨	٠.٠٠٩٧٣	٤.٠٠٠٢٥	٠.٠٠٠١٠	٤.٢٥٦١١	١.٥٦٣٠٥
	τ_2	٩	٩.٠٠٦٦٠	٠.٠٠٣٠٩	٨.٩٩٩٧٠	٠.٠٠٠٠٤	٩.٢٨٦٥٧	١.٩٧١٢٦
	τ_3	١٥	١٤.٩٨٣٩٩	٠.٠٠٩٩٦	١٤.٩٩٩٩٠	٠.٠٠٠١١	١٥.٢٠١٢٠	١.٠٢٩٤١
	τ_4	٢٠	١٩.٩٩٥٨٣	٠.٠٠٤١٧	١٩.٩٩٩٧٠	٠.٠٠٠٠٥	١٩.٩٧٧٩٢	٠.٦٢٨٤٢
	β_0	٠.٠١	٠.٠٢٩٦٨	٠.١٤٦٩٢	٠.٠٠٩٣٤	٠.٠٠٢٠٦	-٠.٤١٠٦٠	٤.٣٢٤١٠
	β_1	٠.١	٠.٠٨٦٢٧	٠.٠٣٢٩٣	٠.٠٩٩٧٢	٠.٠٠٠٣٩	٠.٢٧١٧٤	٠.٦٩١٥٤
	Δ_1	٦	٦.٠٠٥٦٢	٠.٠٤٧٩٣	٦.٠٠١٦٧	٠.٠٠٠٥٩	٥.٢٧٤٨٠	٣٤.٠٦٤٧٢
	Δ_2	-٩	-٩.٠٠٣٧٦	٠.٠٢٦١٦	-٩.٠٠١٥٣	٠.٠٠٠٣٢	-٨.٣٨٢٩٥	٨.٦٦١٣١
	Δ_3	٥	٤.٩٩٨٠٣	٠.٠٢٢٨٣	٥.٠٠٠١٦	٠.٠٠٠٣١	٥.٢٢٦٩٨	٢٣.٧٨٧٥٤
	Δ_4	٨	٨.٠٠٩٣٢	٠.٠٣٠٢٦	٧.٩٩٩٢٤	٠.٠٠٠٣٨	٧.٧٢٧٥٥	٢.٤٦٢٥٥

جدول رقم (١٠): نتائج تجربة المحاكاة لعينة(n=٤٠) مشاهدة وبتكرار ١٠٠٠ مرة وبتوزيع خطأ ملوث ٨٥٪ يتبع $e_i \sim N(0,\ 0.01)$ و ١٥٪ يتبع $e_i \sim N(0,3)$.

the Case	Parameter	True value	Muggeo (ML)		IRWm- (Tukey)		IRWs- (Tukey)	
			$\hat{\tau}, \hat{\beta}$	MSE	$\hat{\tau}, \hat{\beta}$	MSE	$\hat{\tau}, \hat{\beta}$	MSE
Cas e ١	τ_1	٤	٣.٩٣١٧٨	٠.٠٨٥٧٦	٣.٩٦٠٠٤	٠.٠٦٥٤٣	٤.٤٨٢٩٦	٤.٥٩١١٤
	τ_2	٩	٩.٠١٩٧٣	٠.٠١٩٤٩	٩.٠١٩٣٩	٠.٠١٨٥٩	٩.٣٤٠٧٨	٤.٢٤٦٧٥

	β_0	٠.٠١	٠.٢٠١٤٥	٢.٤٥٧٢٥	٠.١٢٧٩٤	**٢.١٩١٨٤**	-٠.٣٢٧٤٣	٦.٦٦٠٩٨
	β_1	٠.١	-٠.٠٣٤٤٦	**٠.٥٧٣٦٩**	-٠.١٩٩٤٨	٤٢.٢٦٤٩٥	٠.٢١٠٢٩	١.٧٥٨٢٩
	Δ_1	٦	٦.٠٧٨٤٣	**٠.٦١٨٨٠**	٦.٢٥٢٤٧	٤١.٣٢٤٥٢	٥.٢٧٥٧٨	٢٤.٣٣٤٥٦
	Δ_2	-٩	-٨.٩٤٣١١	٠.١٣٤٠٦	-٨.٩٥٣٠٨	**٠.٠٩١٨٢**	-٨.٤٣٠٧٩	٢١.٥٨٦٦٣
Case ٢	τ_1	٤	٣.٩٢٨٧٣	٠.٠٩٥٣٨	٣.٩٦٥٨٨	**٠.٠٤٧٨٣**	٤.٥١٣٧٣	٥.٤٣٨٧١
	τ_2	٩	٩.٠٥٣٣٢	٠.١٠٢٣٢	٩.٠٣٥١٦	**٠.٠٨٣٨٧**	٩.٤٥١٨٨	٣.٢٠٤٠٤
	τ_3	١٥	١٤.٩٤٤٤٢	٠.١٦٦٨٧	١٤.٩٨٢١٢	**٠.١٠٥٥٢**	١٥.١٢٦٩٨	١.٤٦٩٠٦
	β_0	٠.٠١	٠.٢١٤٠٦	٢.٥١٩٨٥	٠.٠٧٦٥٢	**١.٥٢٥٤٢**	-٠.٥٥٩٥٤	١٠.٣٢٣٩١
	β_1	٠.١	-٠.٠٣٦٧٠	٠.٥٨٨٨٧	٠.٠٤٥٢٠	**٠.٣٥٦٢٩**	٠.٢٩٥٠٠	١.٥٩٧٥٠
	Δ_1	٦	٦.٠٦٩٧١	٠.٦٤٠٤٢	٦.٠٠٤٦٨	**٠.٤١٠٦٦**	٥.٢٢٦٩٥	١٠.٦٦٧٥٥
	Δ_2	-٩	-٨.٩٦٨٣٧	١.١٤٩٢٨	-٨.٩٢٠٤٥	**٠.٨٤٤٨٠**	-٨.٢٤٠٢٠	٢٣.٢٧٨١٦
	Δ_3	٥	٥.٠٣٣٢٣	١.٠٤٣٨٠	٤.٩٧١٢٧	**٠.٧٧٩٦٧**	٤.٨٨٤٠٣	١٧.٤٧٧٦٤
Case ٣	τ_1	٤	٣.٩٢١٩٩	٠.٠٩٧٣٩	٣.٩٥٥٦٢	**٠.٠٥٣٠٩**	٤.١٠٢٧٦	١.٤٦٠٦١
	τ_2	٩	٩.٠٤٨٠٧	٠.٠٤٧٤١	٩.٠٢٣٥٥	**٠.٠٢١٥٩**	٩.١٢٣٣١	١.٠٧٠١٧
	τ_3	١٥	١٤.٩٣٣٠٩	٠.١٠٨٦٤	١٤.٩٨٨٨٨	**٠.٠٩٩٦٠**	١٥.٠٦٣٩٨	٠.٣٨٨٠٢
	τ_4	٢٠	١٩.٩٧٨٧٩	٠.٠٤٥٩١	١٩.٩٩٦٣٥	**٠.٠١٩٣٨**	٢٠.٠٤٥٢٦	٠.١٥٩١١
	β_0	٠.٠١	٠.٢٤٠٢٤	٢.٧٨٥٤٣	٠.١٠٧١٧	**١.٦٧١٦٧**	٠.٠٢٤٤٧	٤.١٥٢٧٠
	β_1	٠.١	-٠.٠٥٣٧٦	٠.٦٤٣٩٢	٠.٠٢٩٦٤	**٠.٣٩٢٥٣**	٠.٠٣٠٩٤	١.٢١٩٧٤
	Δ_1	٦	٦.٠٨٦١٠	٠.٦٩٥٣٤	٦.٠١١٢٥	**٠.٤٥٩٠١**	٥.٨٥٩٨١	٣.٩٢٢٤١

	Δ_2	-٩	-٩.٠٢٥٣٨	٠.٣٠٣٩٨	-٨.٩٥٩١٢	**٠.٢٠٠٤٣**	-٨.٧٦٥٨٧	٣.٥٢٠٨٩
	Δ_3	٥	٥.٠٥٢٨٤	٠.٣٤٤٩٢	٤.٩٩٩١٧	**٠.٢٢٣٨٣**	٥.٠٥٤٢٣	٠.٦٤٤٦٩
	Δ_4	٨	٨.٠٣٧١٢	٠.٣٢٨٢٥	٨.٠٢٩١٢	**٠.٢٥٦٠٣**	٨.٠٢٥٣٤	٢.١٩٧٥١

جدول رقم (١١): نتائج تجربة المحاكاة لعينة(n=٨٠) مشاهدة وبتكرار ١٠٠٠ مرة وبتوزيع خطأ ملوث ٨٥٪ يتبع $e_i \sim N(0,\ 0.01)$ و ١٥٪ يتبع $e_i \sim N(0,3)$.

the Case	Parameter	True value	Muggeo (ML)		IRWm- (Tukey)		IRWs- (Tukey)	
			$\hat{\tau}, \hat{\beta}$	MSE	$\hat{\tau}, \hat{\beta}$	MSE	$\hat{\tau}, \hat{\beta}$	MSE
Case ١	τ_1	٤	٣.٩٧٨٩٦	٠.٠٤٣٤٥	٣.٩٨٩٧٤	**٠.٠١٢٢٤**	٤.٥١٣٥٢	٦.١٧٣٨٣
	τ_2	٩	٩.٠٠٤٦٠	٠.٠٠٨٦٨	٩.٠٠٣٣٩	**٠.٠٠١٣١**	٩.١٨٨٥٨	٢.٠٩٤٥٠
	β_0	٠.٠١	٠.١٠٠٩٩	**٠.٥٢٢٧٥**	٠.٠٥٣٣٥	٠.٦٠٣٨٢	-٠.٤٩٣٥١	٦.١٨٦٤٠
	β_1	٠.١	٠.٠٤٦٩٧	**٠.١٤٠١٤**	٠.٠٧٠٠٧	٠.٣٤٩٢٨	٠.٢٩٢٥٠	٠.٩١٠٣٢
	Δ_1	٦	٦.٠٤٤٢٩	**٠.١٧٦٦٨**	٦.٠١٩٧٨	٠.٣٥٨٧٧	٥.٤١٤٢٤	٨.٣١٧٤٥
	Δ_2	-٩	-٨.٩٩١٦٥	٠.٠٧٥٣٥	-٨.٩٩٠٠٧	**٠.٠١١٨٥**	-٨.٦١٠٥٧	٣.٨٦٦١٦
Case ٢	τ_1	٤	٣.٩٨٠٧٦	٠.٠٤٣٨٩	٣.٩٩٣٨٦	**٠.٠٠٥١٢**	٤.٣٤٤٩٦	٣.٢٦٦٣٦
	τ_2	٩	٩.٠٠٩٥٣	٠.٠١٢٧٧	٩.٠٠٢١٤	**٠.٠٠٠٨٣**	٩.٣١١٥٢	٢.٤٧١٢٢
	τ_3	١٥	١٤.٩٩٤٩٢	٠.٠٢٢٣١	١٤.٩٩٩٢٠	**٠.٠٠٠٢٢**	١٥.٠٤٠٦١	٠.٨٦٠٨٩
	β_0	٠.٠١	٠.١٠٩٤٩	٠.٥٥٤١٨	٠.٠٣٦٣٢	**٠.١٤٠٤٧**	-٠.٤٤٦٩٣	٦.١٥٨١٤
	β_1	٠.١	٠.٠٤٧١٢	٠.١٤٩٣٣	٠.٠٨٤٨٧	**٠.٠٥٠٦٥**	٠.٢٧٢٨٩	٠.٨٦٧٣٣
	Δ_1	٦	٦.٠٤٤٢١	٠.١٨٧٤٢	٦.٠١٠٣٨	**٠.٠٥٥٧٦**	٥.٤٣٣٥٩	٧.٥٩٣٤٠
	Δ_2	-٩	-٩.٠٠٩٢٢	٠.٠٩٩٣٧	-٨.٩٩٦٥٩	**٠.٠٠٦٥٦**	-٨.٤٠٥٣٤	٨.١٨٨١٧
	Δ_3	٥	٥.٠٢٠٢٣	٠.٠٣٦٠٨	٥.٠٠٠٨٤	**٠.٠٠٠٨٨**	٤.٧٩٤٨٣	١.٤٤٠٥٨
Cas	τ_1	٤	٣.٩٨١٤٠	٠.٠٤٣٥٩	٣.٩٩٦٥٥	**٠.٠٠٢٨٠**	٤.٣١١٢٧	٢.٥٦٩٢٧
	τ_2	٩	٩.٠٠٨٦٨	٠.٠١٢٣٠	٩.٠٠١٧٥	**٠.٠٠٠٦٥**	٩.٢٩٣٤٥	٢.٢٦٢٣١

e ٣	τ_3	١٥	١٤.٩٨٤٤١	٠.٠٣٥٦٧	١٤.٩٩٨٢١	٠.٠٠١٣٣	١٥.٢٠٥٠٣	١.٠٠٣٠٨
	τ_4	٢٠	١٩.٩٨٧٨٣	٠.٠١٦٩٤	١٩.٩٩٨٧٦	٠.٠٠٠٥٩	٢٠.٠٢٥٦١	٠.٤٧٤٣٦
	β_0	٠.٠١	٠.١٠٣٩٩	٠.٥٢٨٤٣	٠.٠٢١٠٣	٠.٠٦٤١٩	-٠.٤١٦٧٢	٥.٥٢٥٨١
	β_1	٠.١	٠.٠٤٩٨١	٠.١٣٨٢٤	٠.٠٩٣٥٥	٠.٠١٥٦٨	٠.٢٦٥٣١	٠.٧٨٠٥٨
	Δ_1	٦	٦.٠٤٢٣٠	٠.١٧٩٣٠	٦.٠٠٢٣٥	٠.٠١٩٩٤	٥.٤٢٨٤٣	٧.٨٤٠٨٥
	Δ_2	-٩	-٩.٠٠٩٤٧	٠.٠٩٨٦٢	-٨.٩٩٦٣٨	٠.٠٠٤٧٠	-٨.٣٥١٦٥	١٢.٢٢٢٧٨
	Δ_3	٥	٥.٠٠٥٧٢	٠.٠٧٩٨٨	٤.٩٩٩٣٩	٠.٠٠١٨٦	٥.٠٦١٩٤	٠.٩٣٠١٤
	Δ_4	٨	٨.٠٠٠٢١	٠.١٢١٠٠	٧.٩٩٥٨٨	٠.٠٠٦٩٤	٧.٦٦٦٧٧	٤.٩٦٠٦٨

جدول رقم (١٢): نتائج تجربة المحاكاة لعينة(n=١٦٠) مشاهدة وبتكرار ١٠٠٠ مرة وبتوزيع خطأ ملوث ٨٥٪ يتبع $e_i \sim N(0,\ 0.01)$ و ١٥٪ يتبع $e_i \sim N(0,3)$.

the Case	Parameter	True value	Muggeo (ML)		IRWm- (Tukey)		IRWs- (Tukey)	
			$\hat{\tau}, \hat{\beta}$	MSE	$\hat{\tau}, \hat{\beta}$	MSE	$\hat{\tau}, \hat{\beta}$	MSE
Case ١	τ_1	٤	٣.٩٩١٥٣	٠.٠١٥٥٢	٤.٠٠٠٠٨	٠.٠٠٠١١	٤.٢٨٩٥٥	٣.٠٨٠٣٨
	τ_2	٩	٩.٠٠٠٦٦	٠.٠٠٣٢٣	٨.٩٩٩٩١	٠.٠٠٠٠٣	٩.١١٥٤٤	١.٣١٢٠٩
	β_0	٠.٠١	٠.٠٣٧٤١	٠.٢٣٨٣٣	٠.٠٠٨٩٨	٠.٠٠٢٣١	-٠.٣١٦٨٠	٣.٣٦٦٢٨
	β_1	٠.١	٠.٠٨٣٢٣	٠.٠٥٣٥٤	٠.١٠٠٠١	٠.٠٠٠٤٤	٠.٢٣٣٦٥	٠.٥٢٦٣٢
	Δ_1	٦	٦.٠١٣٩٢	٠.٠٦٩٠٧	٦.٠٠٠٦٢	٠.٠٠٠٦٦	٥.٦٢٧٣٩	٤.٣٢٩٩٩
	Δ_2	-٩	-٨.٩٩٧٥٨	٠.٠٢٦٢٨	-٩.٠٠٠٦٦	٠.٠٠٠٢٢	-٨.٧٦٠٢٦	٢.١٩٥٨٧
Case ٢	τ_1	٤	٣.٩٩١١٠	٠.٠١٥٣٦	٣.٩٩٩٩٤	٠.٠٠٠١٢	٤.٢٤٤٩٢	١.٧٣٥٦٨
	τ_2	٩	٩.٠٠٢٤٣	٠.٠٠٤٨٩	٩.٠٠٠٠٠	٠.٠٠٠٠٤	٩.٢٩٢٧١	٢.٤٥٤٥٤
	τ_3	١٥	١٤.٩٩٣٥٦	٠.٠١٠٦٣	١٤.٩٩٩٧٧	٠.٠٠٠٠٩	١٥.٠٢٥٧٤	٠.٦٨٣٦٢
	β_0	٠.٠١	٠.٠٤٢٤٢	٠.٢٣٨٢٩	٠.٠١٢٤٣	٠.٠١٤٩٣	-٠.٣٦٩٧٢	٤.١٤٦

								٦٥
	β_1	٠.١	٠.٠٨٠٢٤	٠.٠٥٣٤١	٠.٠٩٨٨٩	٠.٠٠١٥٨	-٠.٠٢١٧٤	٧٠.٠٠٠٠٥
	Δ_1	٦	٦.٠١٨٥١	٠.٠٦٩٠٦	٦.٠٠١٧٦	٠.٠٠١٨٤	٥.٧٧٠٥٣	٧٤.٨٩٣٢٧
	Δ_2	-٩	-٩.٠٠٨٧٦	٠.٠٣٩٢٣	-٩.٠٠٠٩٢	٠.٠٠٠٣٤	-٨.٣١١٠٥	٢٢.٢٣٢١٦
	Δ_3	٥	٥.٠٠٩٢٤	٠.٠١٨٣٨	٥.٠٠٠١٦	٠.٠٠٠١٥	٤.٦٦٦٢٥	١٣.٣٠١٦٥
Case ٣	τ_1	٤	٣.٩٩٠٥١	٠.٠١٥٢٣	٤.٠٠٠٢٨	٠.٠٠٠١١	٤.٢٤١١٦	١.٦٩٦٧٤
	τ_2	٩	٩.٠٠٢٩٢	٠.٠٠٤٩٥	٨.٩٩٩٨٨	٠.٠٠٠٠٤	٩.٢٣٧٨٦	١.٤١٦٢٠
	τ_3	١٥	١٤.٩٨٦٨٥	٠.٠١٥٠٩	١٤.٩٩٩٩١	٠.٠٠٠١٣	١٥.١٨٨٣٧	٠.٩٣٤٧٥
	τ_4	٢٠	١٩.٩٩٤٧٣	٠.٠٠٦٧٠	١٩.٩٩٩٧٠	٠.٠٠٠٠٥	٢٠.٠٤٣٠٥	٠.٢٠٩٦٢
	β_0	٠.٠١	٠.٠٤٢١٥	٠.٢٤٥٢٠	٠.٠٠٨٣٣	٠.٠٠٢٢٦	-٠.٣٧٤٦٩	٣.٨٩٦٩١
	β_1	٠.١	٠.٠٧٩٧٤	٠.٠٥٤٠٩	٠.١٠٠٢٧	٠.٠٠٠٤٣	٠.١٦٤٧٠	٨.٦٩٦٢٥
	Δ_1	٦	٦.٠١٩٤٠	٠.٠٦٩٥٢	٦.٠٠٠٦٧	٠.٠٠٠٦٥	٥.٥٧٥٦٢	١٤.٤١٠٦١
	Δ_2	-٩	-٩.٠١١٩٣	٠.٠٣٩٦٤	-٩.٠٠١١٤	٠.٠٠٠٣٥	-٨.٤٤٣٦٨	٧.٨١٤٠١
	Δ_3	٥	٥.٠٠١١٦	٠.٠٣٦٧٠	٥.٠٠٠١٥	٠.٠٠٠٣٤	٥.٠٦٣٧٠	١.١٧٠١١
	Δ_4	٨	٨.٠٠٩٧٣	٠.٠٤١٩١	٧.٩٩٩٣٥	٠.٠٠٠٤٢	٧.٧٤٩٢٤	٢.٦٧٠٩٩

٣-٣تحليل النتائج:

بعد استعراض نتائج تجربة المحاكاة من خلال الجداول السابقة تم ملاحظة ما يأتي:

١- اظهرت نتائج التجربة في حالة افتراض عدم وجود تلوث (قيم شاذة) في البيانات أي في حالة أن الخطأ العشوائي يتبع التوزيع الطبيعي $e_i \sim N(0,1)$ في الجداول رقم (٣),(٢),(١) أن طريقة (MLE) لـ (Muggeo)كانت ذو افضلية واضحة في التقدير مقارنتا مع بقية الطرائق المطبقة حسب معيار (MSE) لجميع احجام العينة وفي الحالات الثلاثةلتعدد نقاط التغيير، وكلما كبر حجم العينة كانت ذو افضلية اقوى.

٢- بينت نتائج التجربة في حالة افتراض وجود تلوث في البيانات بنسب (١٥٪ ,١٠٪ ,٥٪) في الجداول رقم (١٢),(١١),(١٠),(٩),(٨),(٧),(٦),(٥),(٤) أن طريقة (Tukey) -IRWmقد حصلت على اقل قيمة (MSE) في معظم احجام العينات وفي

الحالات الثلاثة لتعدد نقاط التغيير، وكانت ذو افضلية واضحة مقارنتا مع بقية الطرائق وبشكل اقوى كلما كبر حجم العينة كما موضح في الجدول رقم (١٢),(٩),(٦).

٤- الاستنتاجات والتوصيات

٤-١الاستنتاجات:

على ضوء ما تم التوصل اليه من النتائج من خلال تنفيذ تجربة المحاكاة لعملية المقارنة بين بعض طرائق التقدير لأنموذج الانحدار المقسم ذو نقاط تغيير متعددة تم استنتاج ما يأتي:

١- تفوق تقنية المعالجة الخطية لـMuggeo(MLE) على حساب بقية الطرائق المطبقة في هذا البحث في حالة عدم تلوث البيانات بقيم شاذة ولجميع احجام العينة وجميع حالات تعدد نقاط التغيير المطبقة في التجربة.

٢- تفوق طريقة الاوزان التكرارية باستخدام مقدر M الحصين (Tukey) -IRWm على حساب بقية الطرائق المطبقة في هذا البحث في حالة وجود تلوث البيانات بقيم شاذة بنسب (١٥٪, ١٠٪, ٥٪)لجميع احجام العينة وجميع حالات تعدد نقاط التغيير المطبقة في التجربة، وتفوقت بشكل افضل كلما كبر حجم العينة.

٤-٢التوصيات:

بالاعتماد على الاستنتاجات التي توصلنا اليها من النتائج العددية لدراسة المحاكاة يمكننا ذكر بعض التوصيات التي بالامكان الاخذ بها:

- استخدام تقنية المعالجة الخطية لـ Muggeo لتقدير معلمات انموذج الانحدار المقسم ذو نقاط تغيير متعددة في حالة وجود بيانات ذات خطأ عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي ولا تحتوي على نسب تلوث (قيم شاذة).
- يمكن الاعتماد على طريقة الاوزان التكرارية باستخدام مقدر M الحصين كطريقة حصينة لتقدير معلمات انموذج الانحدار المقسم ذو نقاط تغيير متعددة في حالة وجود بيانات ذات خطأ عشوائي ملوث أي تحتوي على قيم شاذة.

المصـــادر

- Ali, O. A. (٢٠٢٠). Suggesting Multiphase Regression Model Estimation With Some Threshold Point. *Journal of Mechanics of Continua And Mathematical Sciences, Vol.١٥, No.*٢, pp.٢١٢-٢٢٣.
- Ali, O. A., & Abbas, M. A. (٢٠١٩). New Robust Estimator Of Change Point In Segmented Regression Model For Bed-Load Of Rivers. *Journal of Mechanics of Continua And Mathematical Sciences, Vol.١٤, No.*٦, PP. ٣٨٤-٤٠٢.
- Ali, O. A., & Abbas, M. A. (٢٠٢٠). Proposing Robust IRWs Technique To Estimate Segmented Regression Model For the Bed Load Transport Of Tigris River With Change Point Of Water Discharge Amount at Baghdad City. *Journal of Economics And Administrative Sciences, Vol.*٢٦*, No.*١٢١, pp.٤١٥-٤٢٧.
- Boudt, K., Caliskan, D., & Croux, C. (٢٠١١). Robust Explicit Estimators Of Weibull parameters. *Metrika, ٧٣*, ١٨٧-٢٠٩.
- Box, G. E., & Muller, M. E. (١٩٥٨). A note On The Generation Of Random Normal Deviates. *Ann. Math. Stat.,* ٢٩, ٦١٠-٦١١.
- Gallant, R., & Fulle, W. A. (١٩٧٣). Fitting Segmented Polynomial Regression Models Whose Join Points have to be Estimated. *Journal of the American Statistical Association, Vol.* ٦٨*, No.* ٣٤١, pp. ١٤٤-١٤٧.

- Hudson, D. J. (١٩٦٦). Fitting Segmented Curves Whose Join Points Have to be Estimated. *Journal of the American Statistical Association,* ٦١:٣١٦, ١٠٩٧-١١٢٩.
- Lain, M. (٢٠١٨). JoinpointRegrese. *Univerzita Karlova. Matematicko-fyzikální fakulta, BAKALÁŘSKÁ PRÁCE*.
- Liu, J., Wu, S., & Zidek, J. V. (١٩٩٧). On Segmented Multivariate Regression. *Statistica Sinica, Vol ٧*, pp ٤٩٧-٥٢٥.
- Lu, K.-P., & Chang, S.-T. (٢٠٢٠). Robust algorithms for multiphase regression models. *Applied Mathematical Modelling, Vol.٧٧*, pp. ١٦٤٣–١٦٦١.
- Muggeo, V. M. (٢٠٠٣). Estimating regression models with unknown breakpoints. *Statistics in Medicine,* ٢٢, ٣٠٥٥–٣٠٧١.
- Roslyakova, I. (٢٠١٧). Modeling thermodynamical properties by segmented non-linear regression. *Ruhr-University Bochum, Doctoral Thesis*.
- Salini, S., Cerioli, A., Laurini, F., & Riani, M. (٢٠١٦). Reliable Robust Regression Diagnostics. *International Statistical Review, ٨٤(١)*, ٩٩-١٢٧.
- Shi, S., Li, Y., & Wan, C. (٢٠١٨). Robust continuous piecewise linear regression model with multiple change points. *The Journal of Supercomputing*.
- Susanti, Y., Pratiwi, H., Sulistijowati, H. S., & Liana, T. (٢٠١٤). M estimation, S estimation, and MM Estimation in Robust Regression. *Int. J. Pure Appl. Math., Vol. ٩١ No. ٣*, pp. ٣٤٩-٣٦٠.
- Yu, B., Barrett, M. J., Kim, H.-J., & Feuer, E. J. (٢٠٠٧). Estimating joinpoints in continuous time scale for multiple change-point models. *Computational Statistics & Data Analysis٥١*, ٢٤٢٠–٢٤٢٧.
- Zhang, F., & Li, Q. (٢٠١٧). Robust bent line regression. *Journal of Statistical Planning and Inference*.